



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ



ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ЮЖНОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА в г. ТАГАНРОГЕ

Аббасов И.Б.

ТРЕХМЕРНАЯ МОДЕЛЬ НАКАТА НЕЛИНЕЙНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН НА БЕРЕГОВОЙ СКЛОН

*XV Всероссийская конференция-школа
«Современные проблемы математического моделирования»
Абрау-Дюрсо, 16 - 21 сентября 2013*

- постановка задачи;
- построение дискретной модели;
- исследование дискретной модели;
- метод решения, алгоритм работы программы;
- берегозащитные сооружения;
- конструкция мелководного бассейна;
- результаты моделирования;
- анализ и сравнение результатов.

ГЕОМЕТРИЯ ЗАДАЧИ

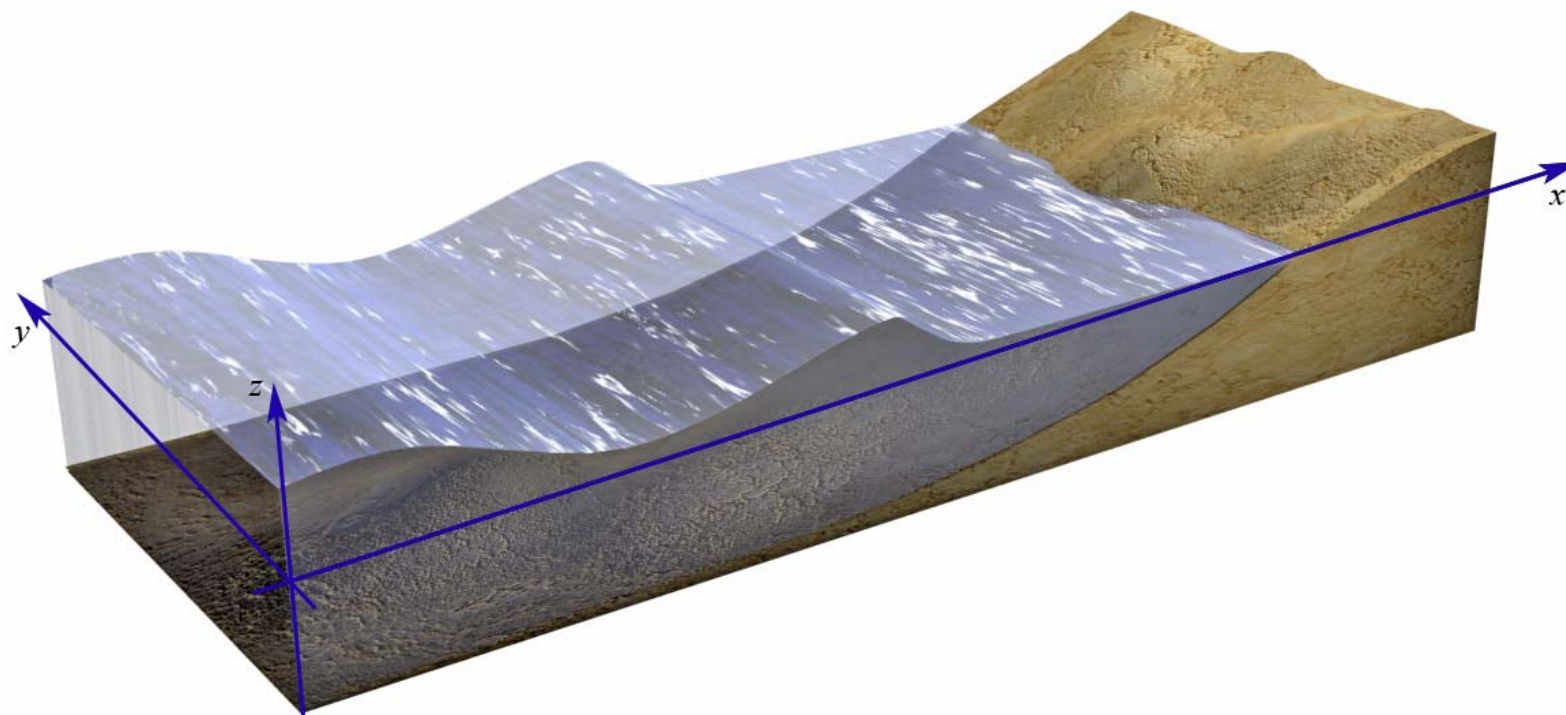


Рис.1. Геометрия трехмерной задачи
наката поверхностной гравитационной волны на берег

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Система уравнений гидродинамики вязкой жидкости в трехмерном случае, уравнение Навье-Стокса:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \eta \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + g.\end{aligned}\tag{1}$$

Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,\tag{2}$$

Полное гидродинамическое давление с учетом глубины определяется:

$$P(x, y, z, t) = p(x, y, z, t) + \rho g z.\tag{3}$$

где u, v, w – горизонтальные и вертикальная составляющие вектора скорости $V(u, v, w)$ движения частиц водной среды, ρ – плотность жидкости, g – гравитационная постоянная, μ, η – горизонтальная и вертикальная составляющие коэффициента турбулентного обмена ($0 < \mu \leq 1 \text{ м}^2/\text{с}$, $0 < \eta \leq 1 \text{ м}^2/\text{с}$).

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Граничные условия на дне, условия непротекания и скольжения:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{V}(x, y, z, t) = 0,$$
$$\rho\eta \frac{\partial}{\partial z} u(x, y, z, t) = -\tau_x(t), \quad \rho\eta \frac{\partial}{\partial z} v(x, y, z, t) = -\tau_y(t), \quad \rho\mu \frac{\partial}{\partial x} w(x, y, z, t) = -\tau_z(t); \quad (4)$$

- на свободной поверхности жидкости, кинематическое и динамическое:

$$P(x, y, z, t) = P_{атм.}, \quad w(x, y, z, t) = \frac{1}{g\rho} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (5)$$

- передняя вертикальная стенка является продолжением дна, на боковых границах условия непротекания и скольжения, на задней стенке располагается источник:

$$\frac{\partial}{\partial n} P(x, y, z, t) = \alpha, \quad u(x, y, z, t) = u^{(0)}, \quad v(x, y, z, t) = v^{(0)}, \quad w(x, y, z, t) = w^{(0)} \quad (6)$$

где \mathbf{n} – вектор нормали к донной поверхности, $\tau_x(t)$, $\tau_y(t)$, $\tau_z(t)$ – компоненты тангенциального напряжения на дне жидкости, параметр α – задается исходя из начальных условий,

$$t=0: \quad P(x, y, z, 0) = \rho g z, \quad u(x, y, z, 0) = 0, \quad v(x, y, z, 0) = 0, \quad w(x, y, z, 0) = 0.$$

РАСЩЕПЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПО ФИЗИЧЕСКИМ ПРОЦЕССАМ

- на первом этапе считается поле скоростей:

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+\sigma} - u^n}{\tau} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ \frac{v^{n+\sigma} - v^n}{\tau} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \\ \frac{w^{n+\sigma} - w^n}{\tau} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \eta \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + g, \end{aligned} \quad (8)$$

- на втором этапе рассчитывается давление:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \frac{\rho}{\tau} \left(\frac{\partial u^{n+\sigma}}{\partial x} + \frac{\partial v^{n+\sigma}}{\partial y} + \frac{\partial w^{n+\sigma}}{\partial z} \right), \quad (9)$$

- на третьем этапе уточняется поле скоростей по давлению:

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+\sigma}}{\tau} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{v^{n+1} - v^{n+\sigma}}{\tau} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{w^{n+1} - w^{n+\sigma}}{\tau} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}. \quad (10)$$

ПОСТРОЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ

Расчетная область представляет собой куб. Вводим равномерную сетку:

$$\varpi_h = \{x_i = ih_x, y_j = jh_y, z_k = kh_z; i = \overline{0..N_x}, j = \overline{0..N_y}, k = \overline{0..N_z}; N_x h_x = l_x, N_y h_y = l_y, N_z h_z = l_z\}, \quad (7)$$

где τ – шаг по времени, h_x, h_y, h_z – шаги по пространству,

N_t – верхняя граница по времени, N_x, N_y, N_z – границы по пространству,

l_x, l_y, l_z – пространственные размеры области.

Проводится аппроксимация уравнений по временной переменной, вводится промежуточный временной слой $n + \sigma$ (по аналогии с MAC-методом).

Дискретная конечно-объемная модель

Расчетные ячейки могут быть полностью заполненными, частично заполненными или пустыми. Если среднее давление в узлах ячейки больше давления столба жидкости внутри ячейки, то ячейка считается полностью заполненной $o_{i,j,k} = 1$.

Центры ячеек и узлы разнесены на $h_x/2, h_y/2$ и $h_z/2$ по соответствующим координатам x, y, z . Заполненность областей в окрестностях ячейки определяется коэффициентами $k_0, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$.

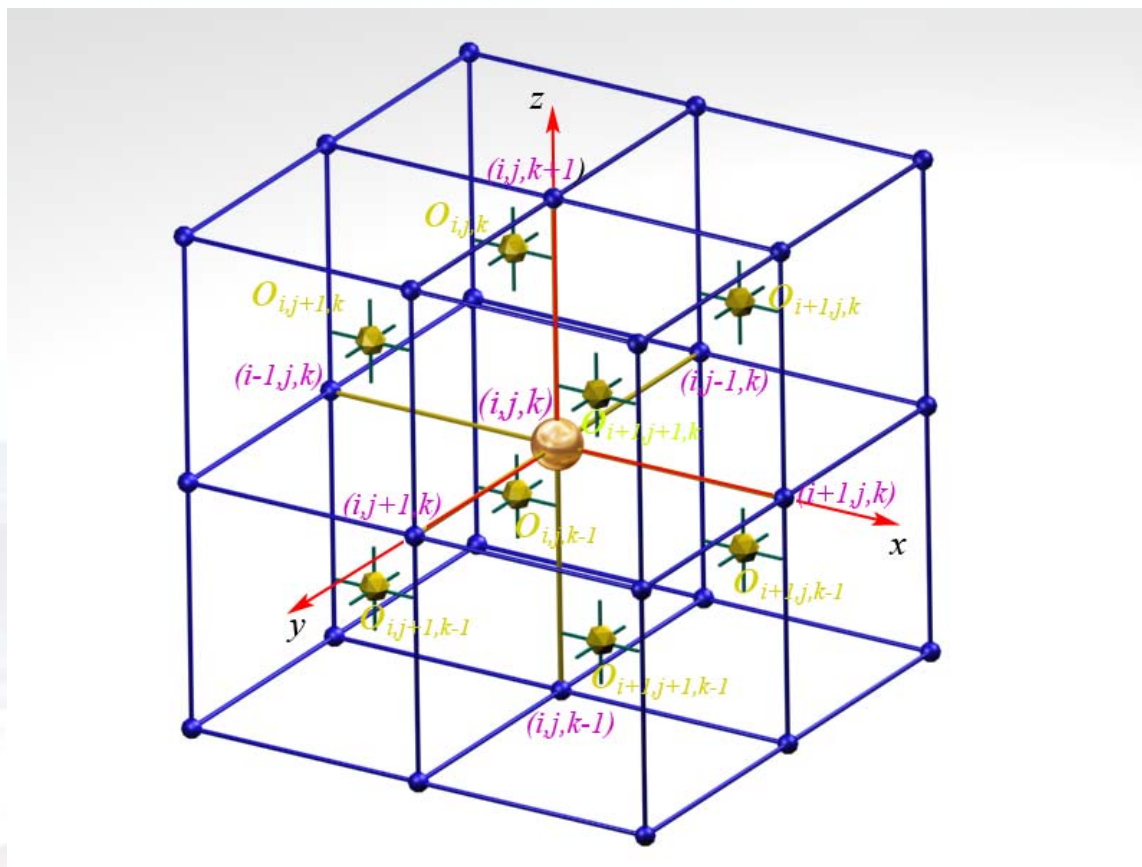


Рис.2. Геометрия ячейки

ИССЛЕДОВАНИЕ КОНСЕРВАТИВНОСТИ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ

Показано выполнение закона сохранения импульса на дискретном уровне для сеточного уравнения и сохранение потока согласно физическому процессу. Дискретные операторы конвективного переноса соответствуют своим непрерывным аналогам.

Построенные разностные схемы обладают условием консервативности, т.к. получены интегро-интерполяционным методом (методом баланса).

В качестве метода решения системы рассматривается вариант МАС - метода, метод поправки к давлению. Данный метод представляет собой аддитивную схему расщепления по физическим процессам и гарантирует выполнение баланса массы (уравнение неразрывности), являясь устойчивым.

Найдена погрешность аппроксимации модели: $O(\tau + h_x^2 + h_y^2 + h_z^2)$ - первый порядок погрешности аппроксимации по времени и второй порядок по пространственным координатам.

Исследована устойчивость задачи на основе принципа максимума, получены ограничения на шаги по времени и по пространственным координатам.

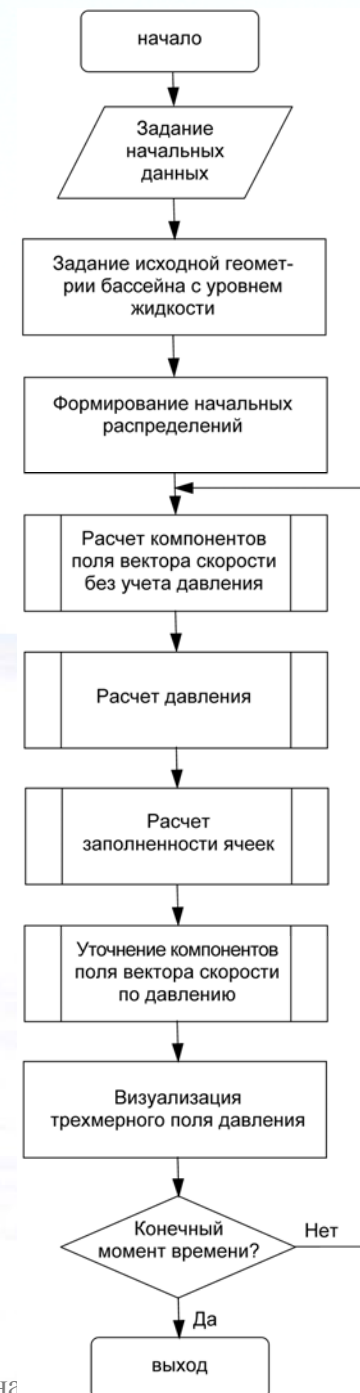
$$h_z < \left\| \frac{2\eta}{w} \right\|_{C(\varpi_k)}, \quad (\text{Re} \leq 2N).$$

ПРОГРАММА РАСЧЕТА «3DBayWaves»

Разработана программа «3DBayWaves» для расчета трехмерного поля скоростей и давления водной среды. Для решения дискретных уравнений используется метод верхней релаксации.

Структура программы «3DbayWaves» состоит из следующих блоков:

- блок ввода начальных данных: трехмерной геометрии бассейна, уровня заполненности водой, параметров волны для расчета скорости и давления, задание масок граничных условий и начальных значений заполненности ячеек;
- блок построения сеточных уравнений для поля скорости без учета давления в соответствии с конечно-объемной схемой;
- блок построения сеточных уравнений для поля давления;
- блок расчета заполненности ячеек;
- блок расчета поля трехмерного вектора скоростей (на следующем временном слое);
- блок расчета сеточных уравнений методом верхней релаксации;
- блок вывода значений давления и заполненности ячеек.



БЕРЕГОЗАЩИТНЫЕ СООРУЖЕНИЯ

К берегоукрепительным и оградительным сооружениям относятся: сооружения с бунами; подводные волноломы; сооружения откосного типа (высота волны до 4м); вертикальные сооружения, стены (высота волны до 7м). Морские гидротехнические сооружения всех видов и классов регламентируются строительными нормами и правилами СНиП 33-01-2003 РФ «Гидротехнические сооружения».



Рис.3. Жесткое воздействие поверхностных волн на защитное сооружение [ЦНИИС]

КОНСТРУКЦИЯ МЕЛКОВОДНОГО БАССЕЙНА

С учетом геоморфологии береговых образований (пологость и протяженность) наиболее подходящими берегозащитными сооружениями будут конструкции откосного типа (рис.4):

- галечный или песочный пляж (частично затопленный при накате);
- проницаемый откос (ж/б блоки), нижнее основание откоса прислонен к ж/б уступу (ростверку) на сваях;
- верхняя зона пляжа, монолитные ж/б плиты с парапетным ограждением (прогулочная терраса).

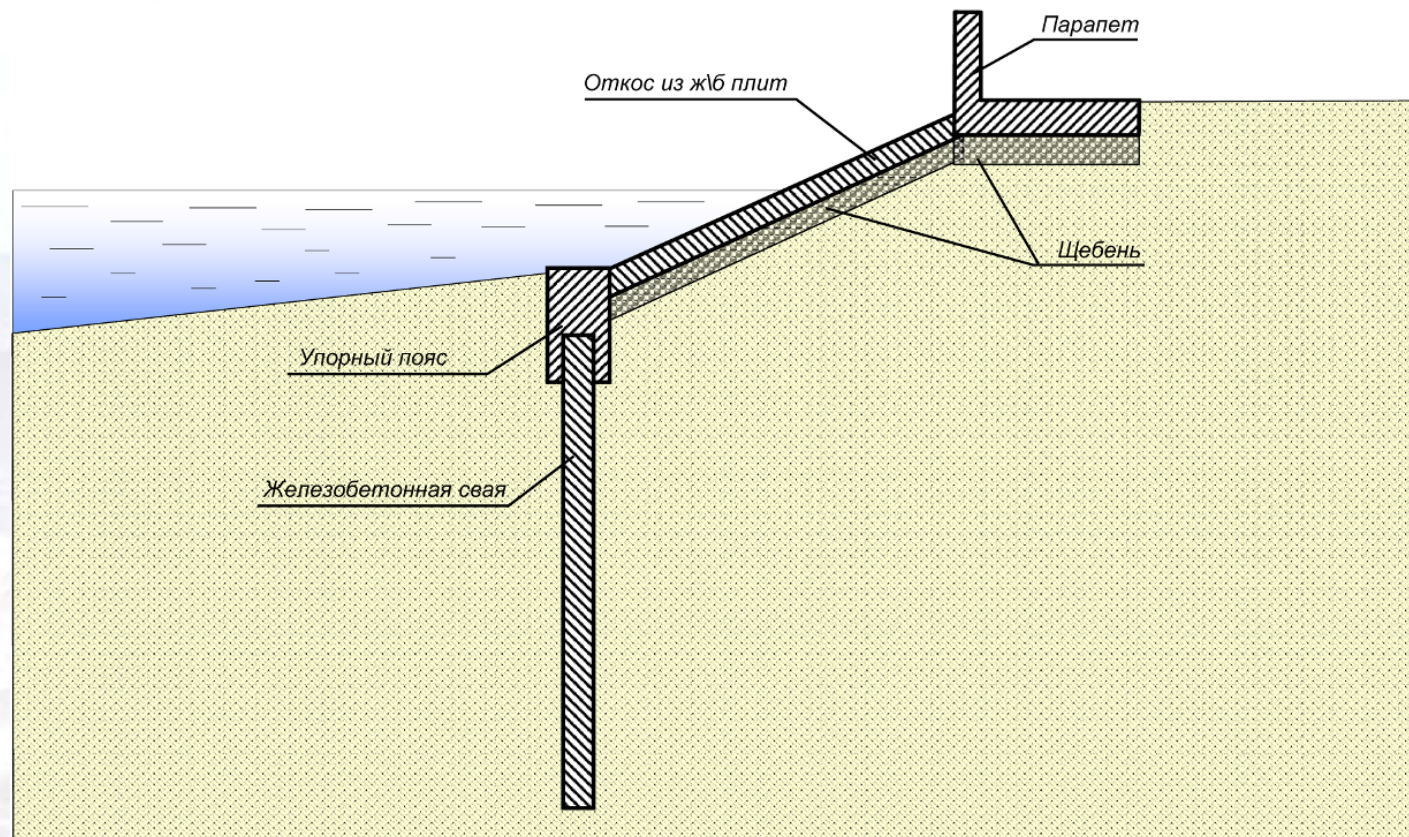


Рис.4. Схема берегозащитного сооружения откосного типа

СЕТКА ТРЕХМЕРНОГО БАСЕЙНА

Размеры сетки 100x40x60, уровень поверхности воды по вертикали: 5÷25. Глубина залива $H \leq 5$ м; длина бассейна 40 м; ширина 15 м; протяженность по вертикали 25 м (от дна); длина шага $h_x = h_y = h_z = 0,42$ м. Длина поверхностной волны $\lambda \leq 20$ м, начальные значения мелководности $0,2 \leq kH \leq 2$.

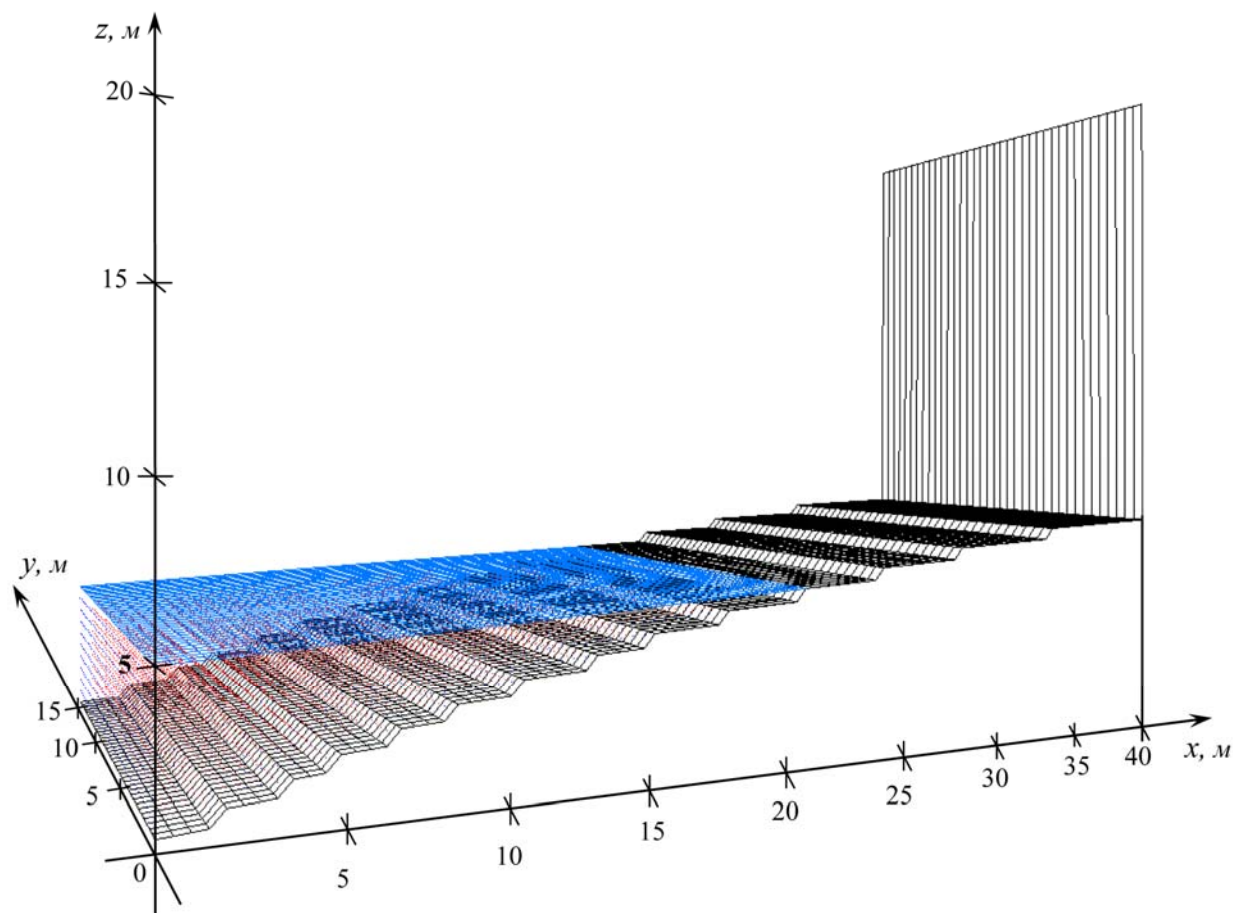


Рис.5. Сетка трехмерного бассейна в состоянии покоя

РЕЗУЛЬТАТЫ ТРЕХМЕРНОГО ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

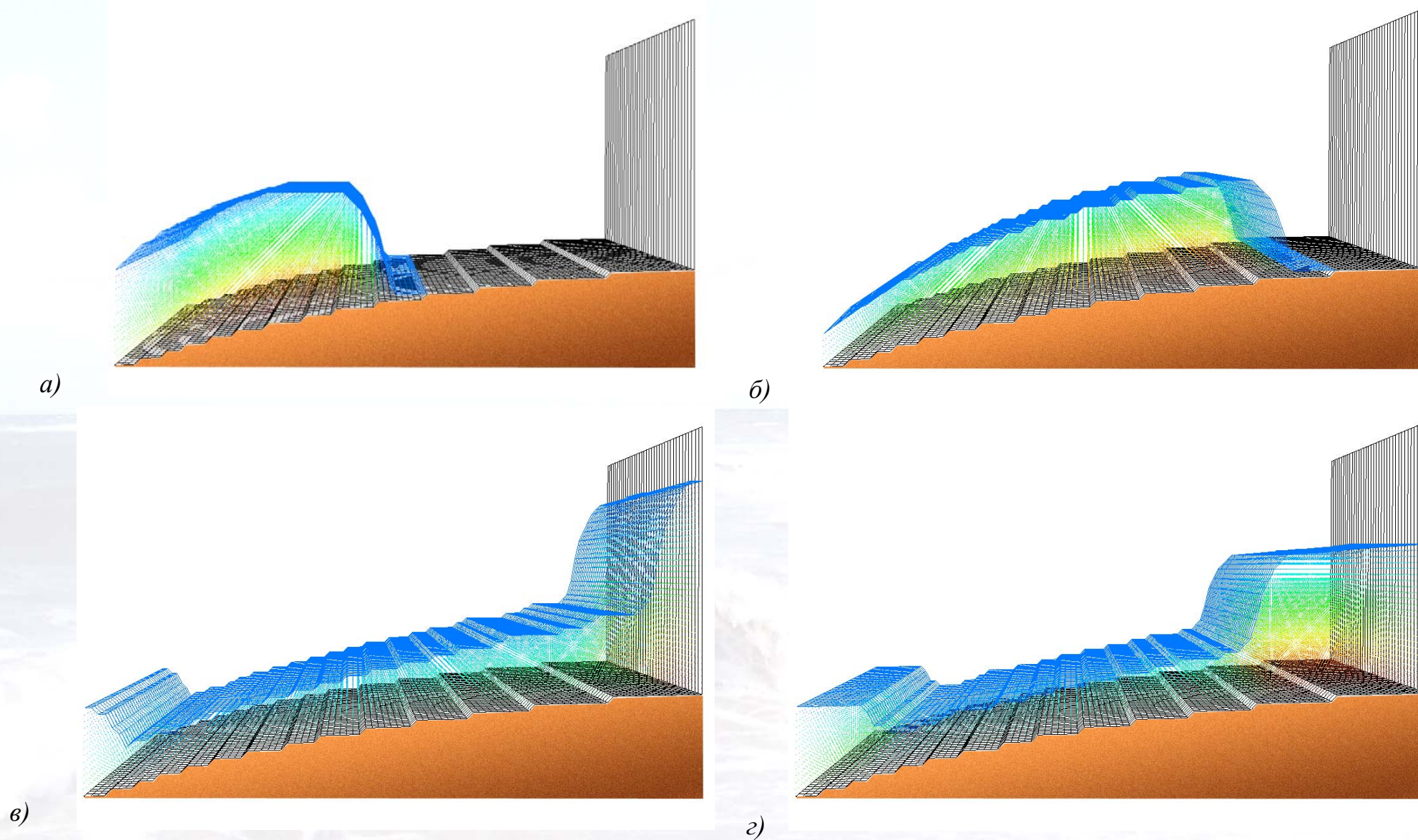


Рис.6. Последовательный накат поверхностной гравитационной волны с начальными параметрами: $f=0,13$ Гц; $\lambda=50$ м; $c=6,6$ м/с; $H=5$ м; $a=4,2$ м; $kH=0,6$; $\epsilon=0,8$; время t а) 3,7с; б) 4,3с; в) 6,3с; г) 7,7с [\(анимация\)](#)

Аббасов И.Б. Трехмерная модель наката нелинейных поверхностных гравитационных волн на береговой склон.

Сетка 40x10x20
(шаг 1,0м)

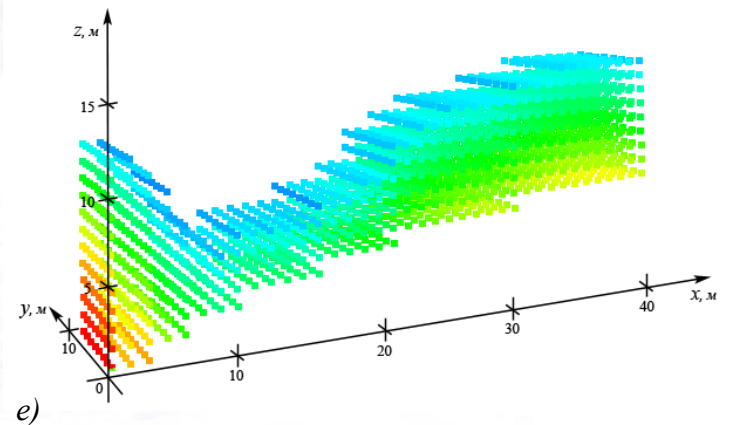
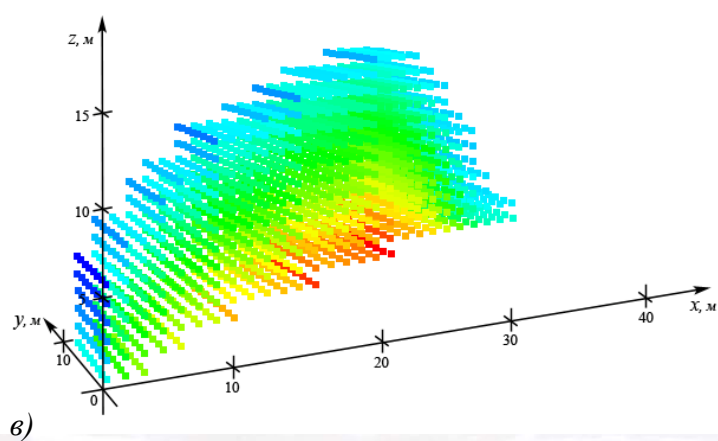
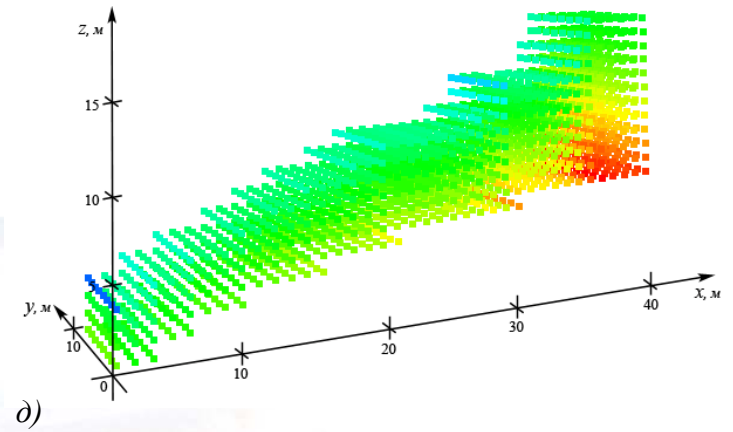
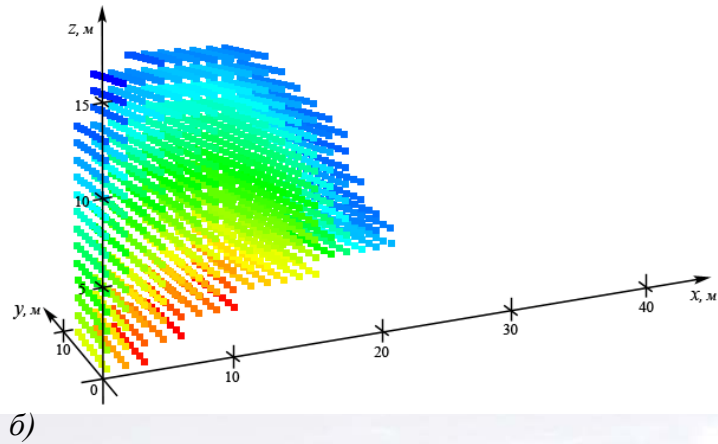
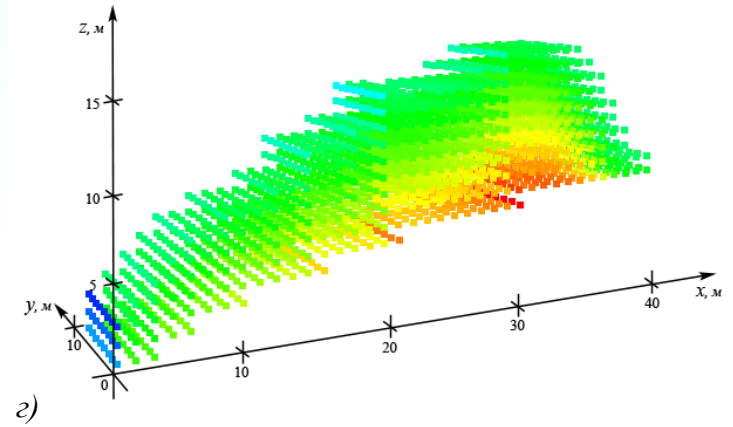
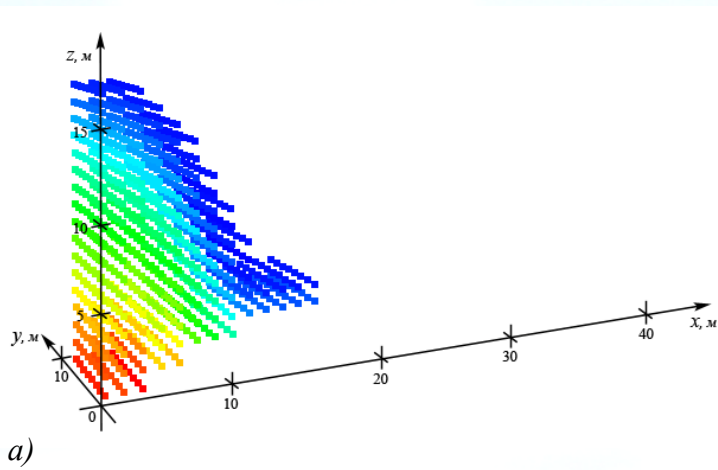


Рис.7. Последовательный накат поверхностной гравитационной волны с начальными параметрами:

$f=0,12\text{Гц}$; $\lambda=60\text{м}$; $c=6,7\text{м/с}$; $H=5\text{м}$; $a=5,5\text{м}$; $kH=0,5$; $\varepsilon=1,1$; время t а) 3,1с; б) 4,8с; в) 6,9с; г) 9,7с; д) 12,7с; е) 20,9с,

ИНДИКАЦИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ

водной массы внутри бассейна при накате поверхностной гравитационной волны

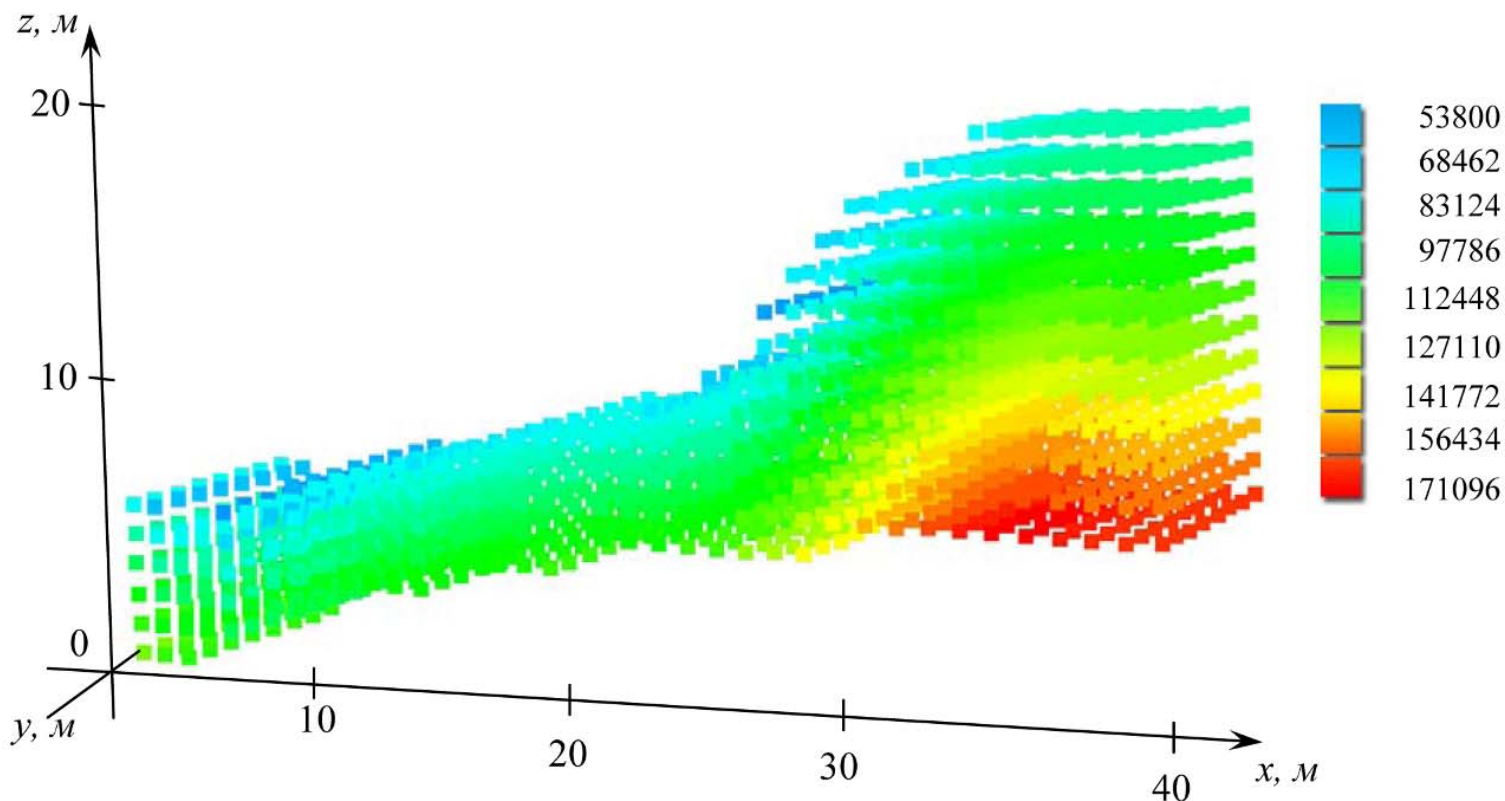
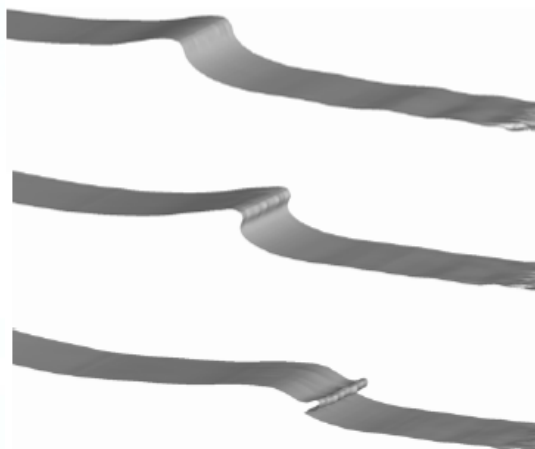


Рис.8. Пространственное распределение давления водной массы при:
 $\lambda=60\text{ м}$; $a=5,5\text{ м}$; $t=16,4\text{ с}$; скорость частиц $u=4,15\text{ м/с}$; давление на поверхности $p=53,8\text{ кПа}$.

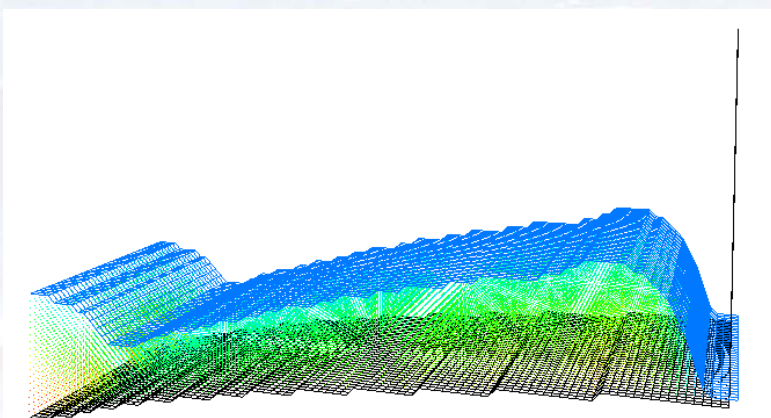
АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

- с уменьшением глубины трехмерного бассейна волна выходит на сухой берег, из-за возрастания нелинейных эффектов происходит укрупнение переднего фронта гребня волны, далее передний фронт волны становится отвесным, и происходит его обрушение;
- волна, обрушиваясь, рассыпается и ударяется о правую вертикальную стенку бассейна, потом водная масса начинает стекать обратно по береговому склону, происходит откат волны;
- откатывающаяся волна сбивает гребень следующей волны, ещё больше укрупняя его и ускоряя его обрушение, к приходу следующего гребня уровень покоящейся жидкости в бассейне поднимается;
- предлагаемая модель позволяет проводить оценку силового воздействия волновых процессов на берегозащитные сооружения мелководных акваторий;
- подробно описывает силовое воздействие поверхностной волны не только на границы бассейна, но и по всему внутреннему объему.

СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ



а)



б)

Рис.9. Сравнение процесса набегания поверхностной гравитационной волны на основе разных моделей:

а) $\lambda=2,5\text{м}$; $H=0,7\text{м}$; $T=1,3\text{с}$; $a=0,07\text{м}$ [Lubin et al., 2006];

б) $\lambda=25\text{м}$; $H=6,7\text{м}$; $c=7,5\text{м/с}$; $a=4,2\text{м}$; $t=4,7\text{с}$ (исследуемая модель).



Рис.10. Накат поверхностных волн в экспериментальном бассейне МГСУ (30x30x1,1м) [Кантаржи, 2011]

ВЫВОДЫ

- сформулирована постановка задачи, приведена геометрия задачи, описаны граничные и начальные условия. Методом расщепления по физическим процессам построена дискретная модель, получены конечно-разностные схемы исходных дифференциальных уравнений интегро-интерполяционным методом;
- была разработана дискретная конечно-объемная модель исследуемой задачи с учетом коэффициента заполненности ячеек;
- проведено исследование консервативности дискретной модели, найдена погрешность аппроксимации конечно-разностной схемы;
- разработана программа для расчета трехмерного поля скоростей и давления водной, приведено описание структуры и алгоритма работы программы;
- описаны особенности берегозащитных сооружений для условий Азовского моря, предложена конструкция мелководного бассейна с защитным береговым откосом;
- проведена оценка силового воздействия волновых процессов на берегозащитные сооружения мелководных акваторий;
- анализированы и сравнены результаты трехмерного численного моделирования набегания нелинейных поверхностных гравитационных волн на береговые образования мелководных акваторий.

Публикации

1. *Аббасов И.Б., Сухинов А.И., Чистяков А.Е.* Численное моделирование наката нелинейных поверхностных гравитационных волн на основе уравнения Навье-Стокса // XIV Всероссийская конференция-школа «Современные проблемы математического моделирования» с международным участием: Сб. трудов, Абрау-Дюрсо, 12 – 17 сентября 2011 г. – Ростов на-Дону, Изд-во ЮФУ. – 2011. – С.10-15.
2. *Аббасов И.Б.* Моделирование наката нелинейных поверхностных гравитационных волн на основе уравнений Навье–Стокса// Вычислительная механика сплошных сред. 2012. Т.5. №3. С.322-326. ([doi:10.7242/1999-6691/2012.5.3.38](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2012.5.3.38))
3. *Аббасов И.Б.* Трехмерное моделирование наката нелинейных поверхностных гравитационных волн // Вестник ХНТУ. Херсон. 2012. № 2 (45). С.7-11.
4. *Аббасов И.Б., Семёнов И.С., Царевский В.В.* Программа трехмерного моделирования наката поверхностных волн на мелководье «3DByWaves». Свидетельство № 2012617087 о государственной регистрации программы для ЭВМ, заявлена 22.05.2012г., зарегистрирована 08.08.2012г.
5. *Abbasov I.B.* Simulation the runup of nonlinear surface gravity waves a steep coastal slope //International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2013. V.84. №3. P.299-306. (<http://dx.doi.org/10.12732/ijpam.v84i3.15>)



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!