

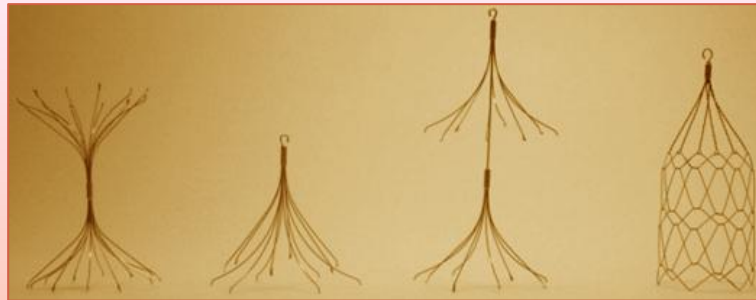
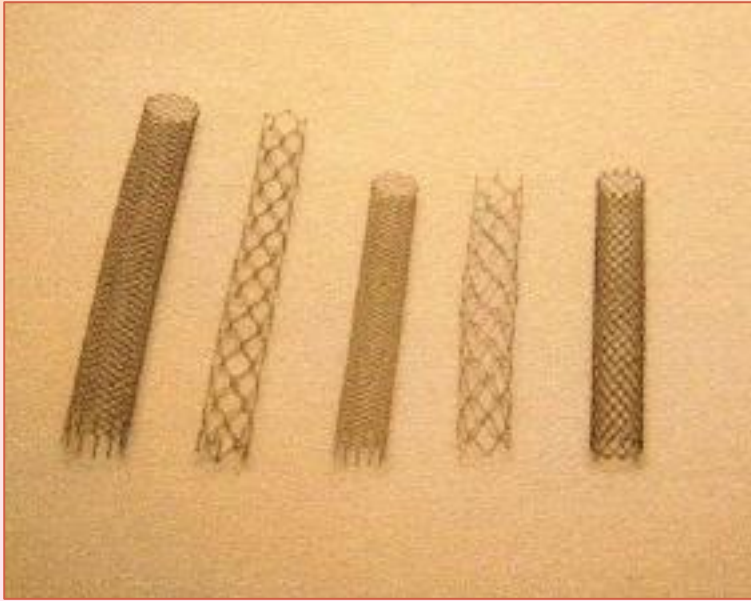
XV Всероссийская Конференция-школа молодых исследователей
"Современные проблемы математического моделирования"

Численное моделирование кровотока при наличии сосудистых имплантатов или патологий

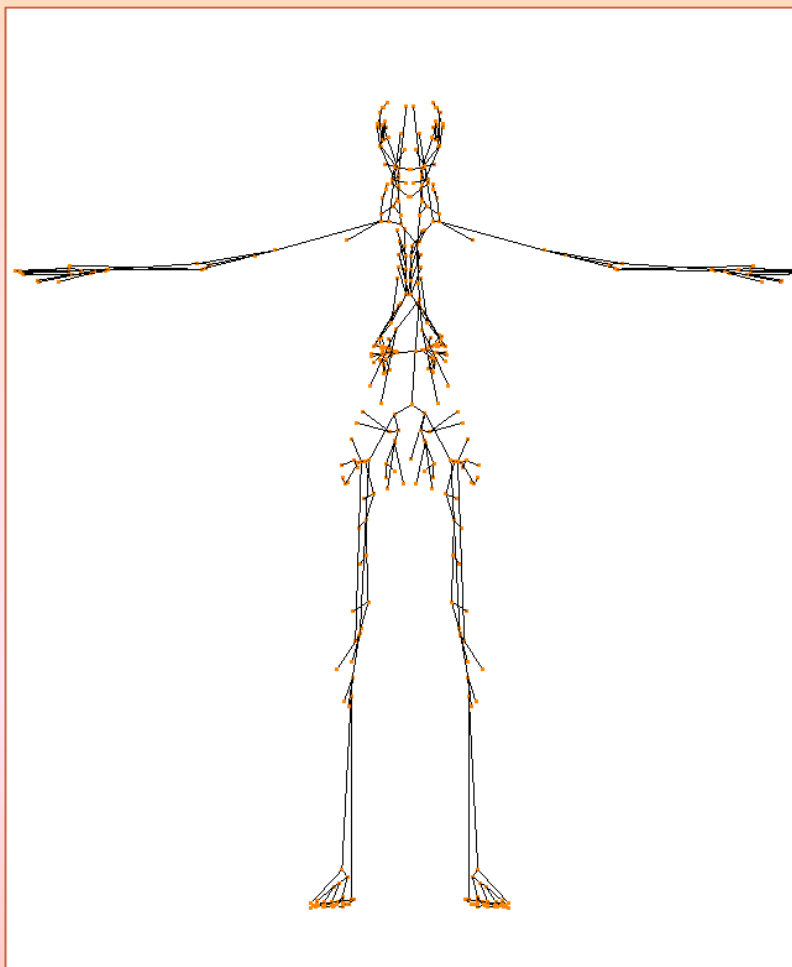
Добросердова Татьяна (МГУ)

Дюрсо
2013

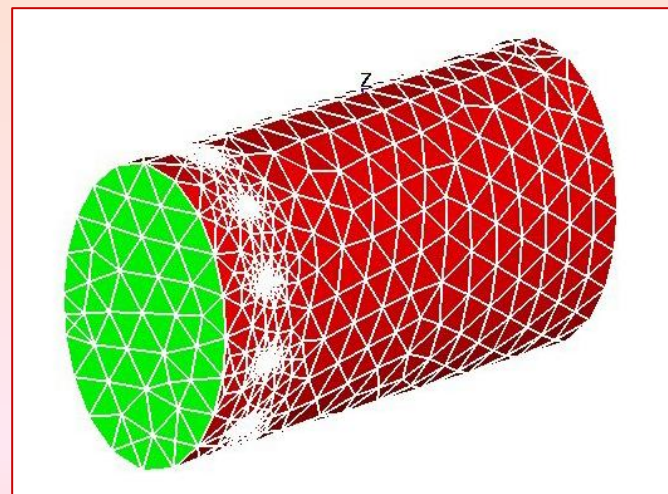
Учет патологий, сосудистых имплантатов



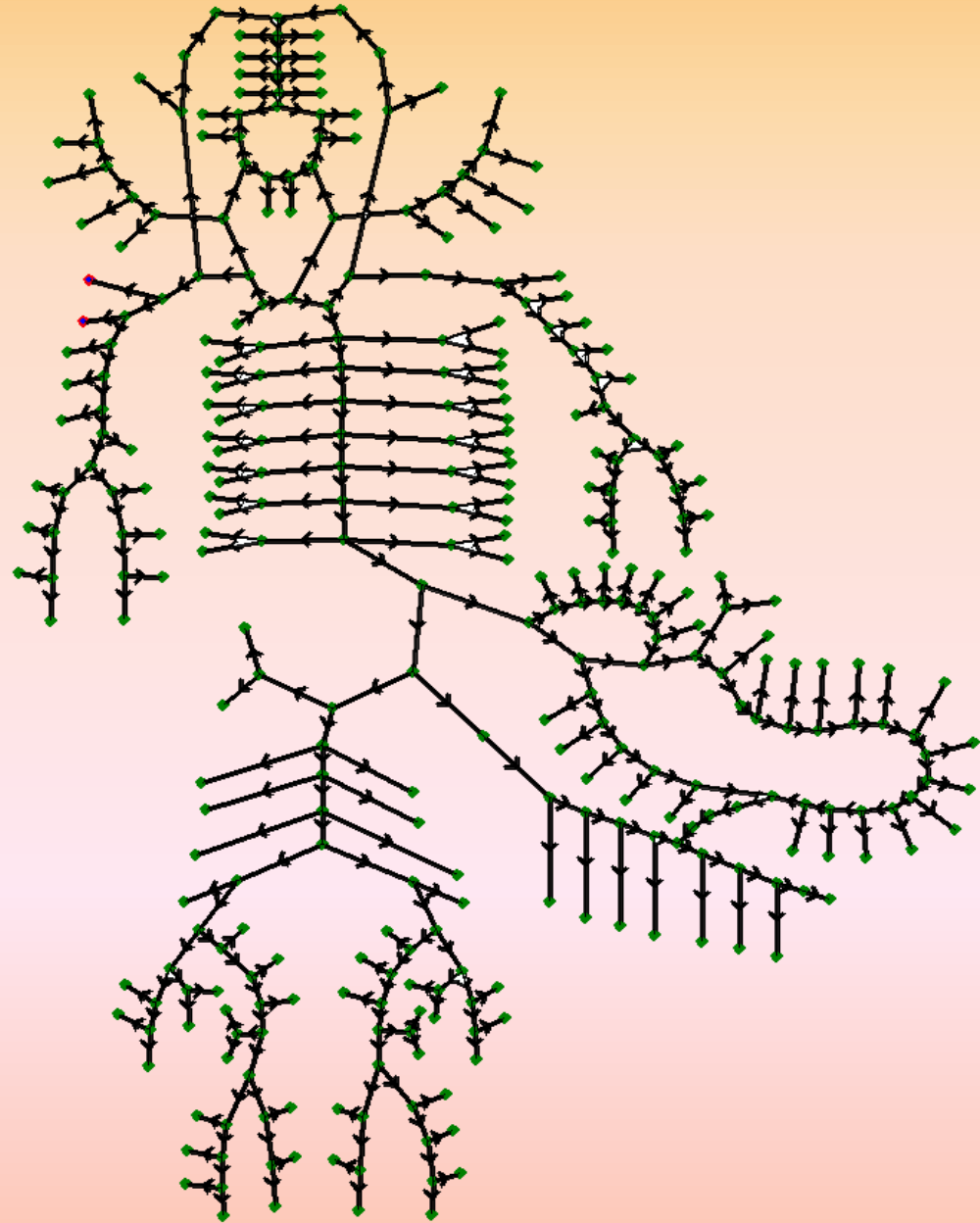
Модель течения крови в сети сосудов с патологией или имплантатом



+



**Модель
глобальной
циркуляции
крови**



Система уравнений

1. Баланс массы

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(uS)}{\partial x} = 0$$

2. Баланс импульса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = -16\mu u \frac{\eta(S)}{Sd^2}, \quad \eta(S) = \begin{cases} 2, & S > S_0 \\ \frac{S}{S_0} + \frac{S_0}{S}, & S \leq S_0 \end{cases}$$

3. Уравнение состояния

$$p = \rho c^2 f(S), \quad f(S) = \begin{cases} \exp\left(\frac{S}{S_0} - 1\right) - 1, & S > S_0 \\ \ln\left(\frac{S}{S_0}\right), & S \leq S_0 \end{cases}$$

Граничные условия

1. Закон сохранения массы:

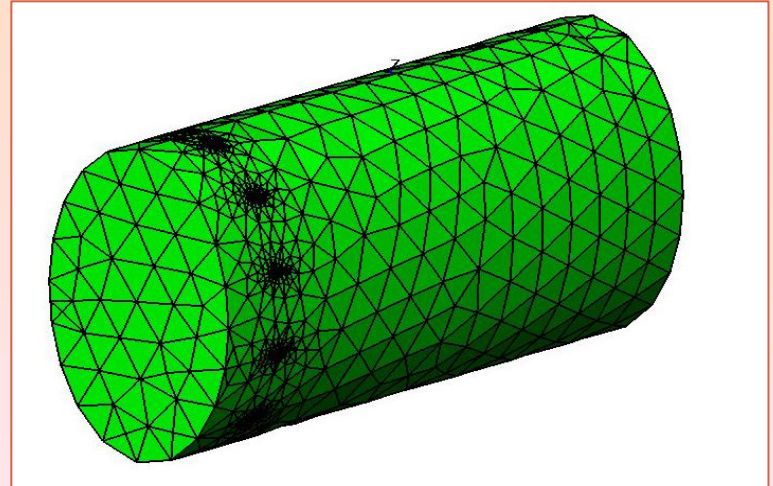
$$\sum_{k=k_1, \dots, k_M} \alpha_k^m Q_k = 0, \alpha_k^m = \pm 1, Q_k = u_k S_k$$

2. Закон Пуазейля:

$$p_k(t, x_k) - p_m^{node}(t) = \alpha_k R_k^m Q_k, x_k = 0, L_k$$

3. Уравнения совместности (условия, накладываемые характеристиками, покидающими область интегрирования)

**Трехмерная
модель
течения
жидкости**



Постановка задачи в 3D области

- Уравнения Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \text{ в } \Omega \times [0, T],$$
$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega \times [0, T]$$

- Граничные условия:

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ на } \Gamma_{in} \times [0, T],$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ на } \Gamma_W \times [0, T],$$

$$-\nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} + p \mathbf{n} = \mathbf{h} \text{ на } \Gamma_{out} \times [0, T]$$

- **Не предполагается:** $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} < 0$ на Γ_{in} , $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} > 0$ на Γ_{out}

Дискретизация уравнений Навье-Стокса

$$\frac{1}{2\Delta t} (3\mathbf{u}^{n+1} - 4\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}) - \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1} + (2\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) \nabla \mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^{n+1} = \mathbf{f}^{n+1},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} = 0,$$

$$\mathbf{u}^{n+1}|_{\Gamma_{in}} = \mathbf{u}_{in}, \mathbf{u}^{n+1}|_{\Gamma_0} = 0, (-\nu \frac{\partial \mathbf{u}^{n+1}}{\partial \mathbf{n}} + p^{n+1} \mathbf{n})|_{\Gamma_{out}} = \mathbf{h}^{n+1}.$$



МКЭ

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{G} \end{pmatrix}$$

Блочный переобуславливатель

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{G} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \hat{A} & B^T \\ 0 & -\hat{S} \end{pmatrix}$$

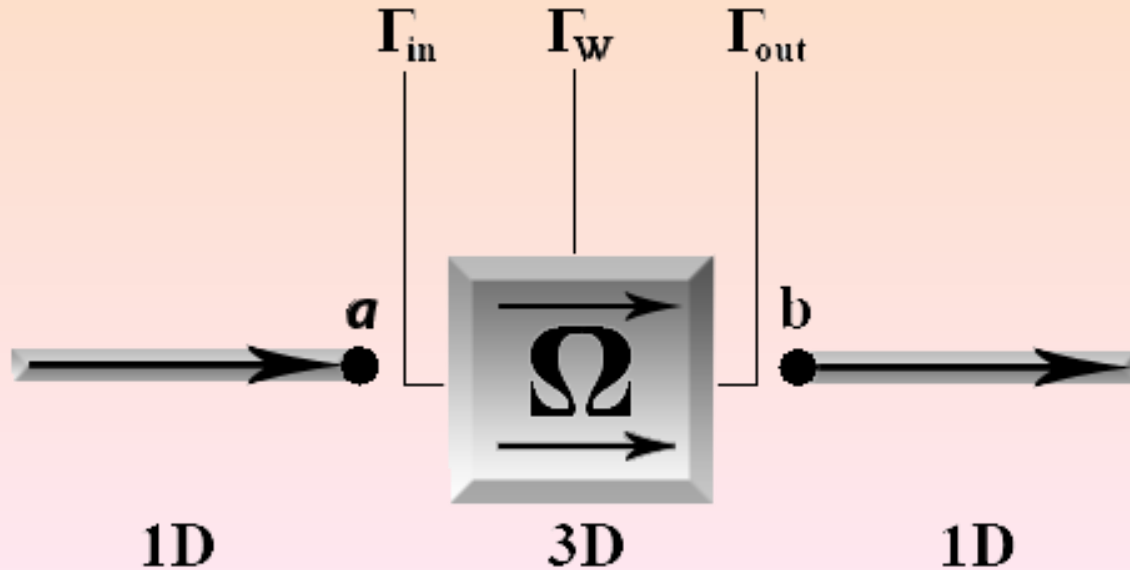
\hat{A} - переобуславливатель матрицы A

\hat{S} - переобуславливатель дополнения Шура S
системы уравнений

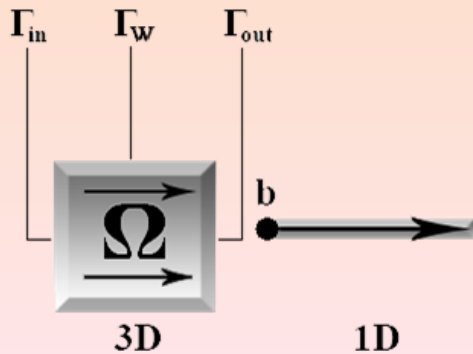
$$\hat{S}^{-1} := \nu \hat{M}_p^{-1} + (\alpha I + N_p)(B \hat{M}_u^{-1} B^T)^{-1}$$

(Olshanskii M., Yu.Vassilevski, 2007)

Двухмасштабная 1D-3D модель течения жидкости



Условия сопряжения трехмерного и одномерного решений в точке b



1D: Условие совместности.

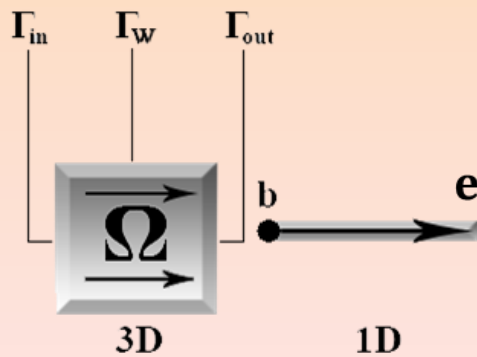
- $\int_{\Gamma_{out}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, ds = \bar{u}_b S_b$
 $(-v \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} + p \mathbf{n}) = p_b \mathbf{n}$
- $\int_{\Gamma_{out}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, ds = \bar{u}_b S_b$
 $-v \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} + (p + \frac{\rho}{2} |\mathbf{u}|^2) \mathbf{n} = (\bar{p} + \frac{\rho}{2} \bar{u}^2)|_b \mathbf{n}$
- $(-v \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} + p \mathbf{n}) = p_b \mathbf{n}$
 $\bar{p} \int \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, ds + \frac{\rho}{2} \int |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, ds = (\bar{p} S \bar{u} + \frac{\rho}{2} S \bar{u}^3)|_b$

Энергетическое равенство для 1D-3D модели

$$\frac{d}{dt} (E_{1D}(t) + E_{3D}(t)) + v \int_0^T \|\nabla \mathbf{u}\|^2 \, dt + 16v \int_0^T \int_{1D} \eta(\tilde{S}) \hat{S} d^{-2} \bar{u}^2 \, dx \, dt =$$

$$-\int_{\Gamma_{out}} \left((p + \frac{\rho}{2} |\mathbf{u}|^2) \mathbf{I} - v \nabla \mathbf{u} \right) \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \, ds + S \bar{u} (\bar{p} + \frac{\rho}{2} \bar{u}^2)|_b$$

Энергетическое равенство для 1D-3D модели



$$\left(-\nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} + p \mathbf{n}\right) = p_b \mathbf{n}$$

$$\bar{p} \int \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, ds + \frac{\rho}{2} \int |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, ds = (\bar{p} S \bar{u} + \frac{\rho}{2} S \bar{u}^3) |_b$$

$$\mathbf{u}_{in} = \mathbf{0}$$

$$\bar{u} |_e = 0$$

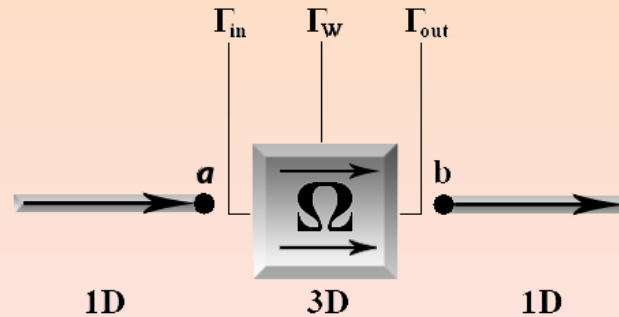
Достаточно гладкое решение удовлетворяет следующему энергетическому равенству:

$$E_{1D}(T) + E_{3D}(T) + \nu \int_0^T \|\nabla \mathbf{u}\|^2 \, dt + 16\nu \int_0^T \int_{1D} \eta(\tilde{S}) \hat{S} d^{-2} \bar{u}^2 \, dx \, dt = E_{1D}(0) + E_{3D}(0)$$

Совместная энергия модели монотонно убывает по времени для любого ненулевого решения:

$$\frac{d}{dt} (E_{1D}(t) + E_{3D}(t)) < 0$$

Условия сопряжения трехмерного и одномерного решений в точка a



В точке a :

$$|\Gamma_{in}|^{-1} \int \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, ds = \bar{u}_a$$

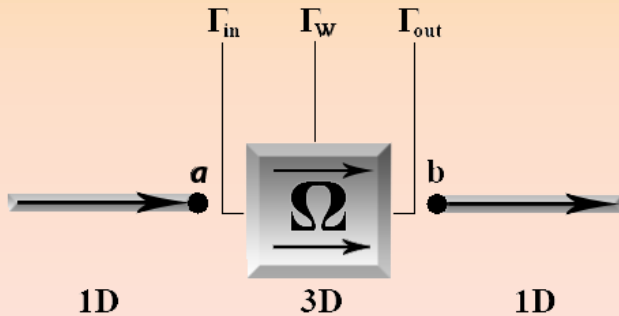
$$|\Gamma_{in}|^{-1} \int \tilde{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{n} \, ds = 1, \mathbf{u}_{in} = \bar{u}_a \tilde{\mathbf{g}}$$

1D:

$$(\text{Su})_x = 0,$$

Условие совместности

Алгоритм



$\bar{u}^n, \bar{p}^n, S^n, \mathbf{u}^n, p^n$ - известно

$\bar{u}^{n+1}, \bar{p}^{n+1}, S^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}$ - ищем

1. Решаем систему уравнений в 1D

2. $\mathbf{u}_{in} = \bar{u}_a \tilde{\mathbf{g}}$. \bar{p}^*, S^* - интерполяция \bar{p}, S с двух предыдущих шагов:

$$\frac{1}{2\Delta t} (3\mathbf{u}^{n+1} - 4\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}) - \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1} + (2\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) \nabla \mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^{n+1} = f^{n+1},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} = 0,$$

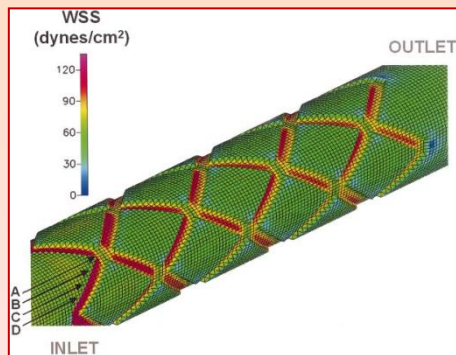
$$\mathbf{u}^{n+1}|_{\Gamma_{in}} = \mathbf{u}_{in}, \mathbf{u}^{n+1}|_{\Gamma_0} = 0, (-\nu \frac{\partial \mathbf{u}^{n+1}}{\partial \mathbf{n}} + p^{n+1} \mathbf{n})|_{\Gamma_{out}} = \bar{p}^* \mathbf{n}.$$

3. Вычисляем \bar{u}_b :

$$\bar{p}^* \int \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} ds + \frac{\rho}{2} \int |\mathbf{u}^{n+1}|^2 \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} ds = (\bar{p}^* S^* \bar{u}^{n+1} + \frac{\rho}{2} S^* (\bar{u}^{n+1})^3)|_b$$

Различные геометрии трехмерной области

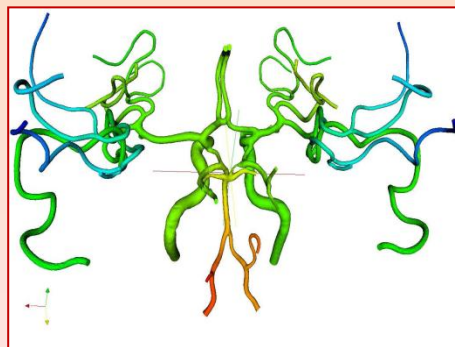
Артерия со стентом



Ladisa, Guler (США)

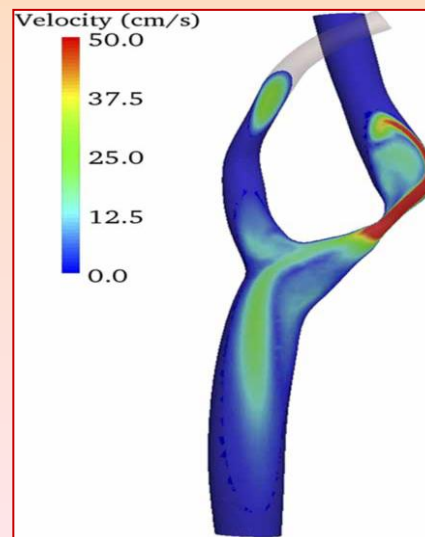
Артерии

Виллизиева круга



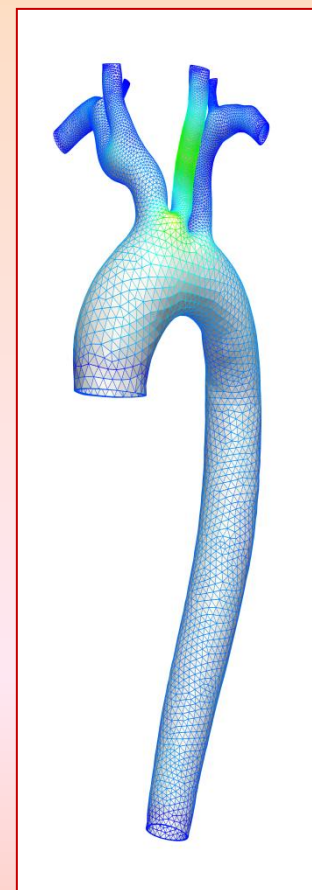
L.Grinberg, США

Артерия со стенозом



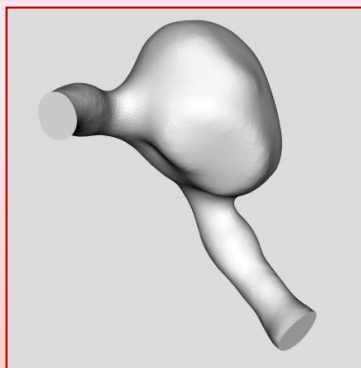
S. A. Urquiza, P. J. Blanco, (Аргентина), Vignon-Clementel, Figueroa (США), Malossi, Deparis (Швейцария), Blanco (Бразилия), Quarteroni (Италия), Stroud, Berger (США), Сазонов (Великобритания)

Дуга аорты

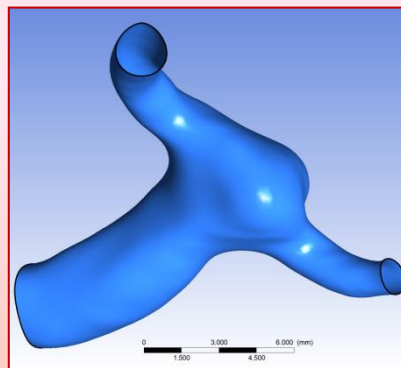


Malossi, Bonnemain, (Швейцария)

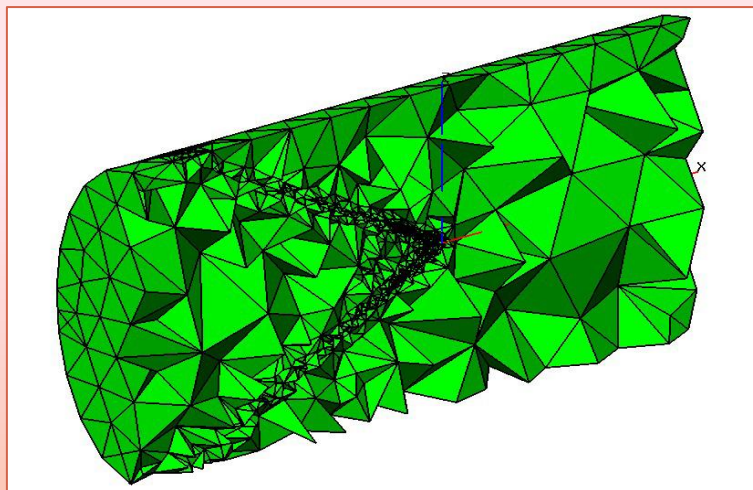
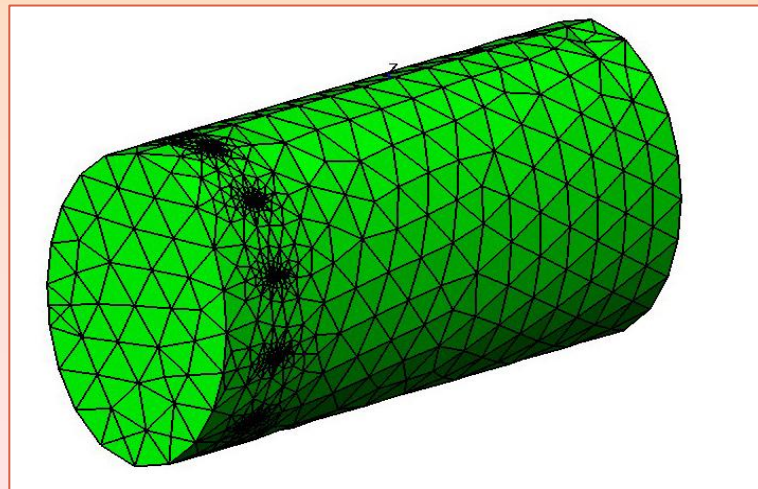
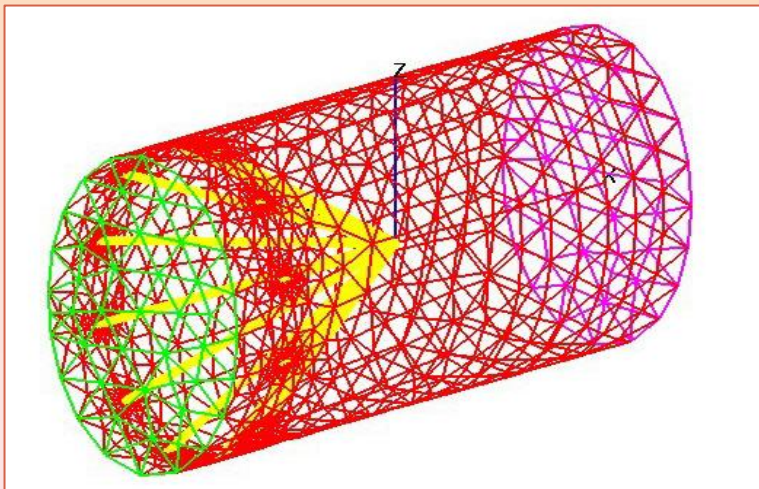
Аневризмы



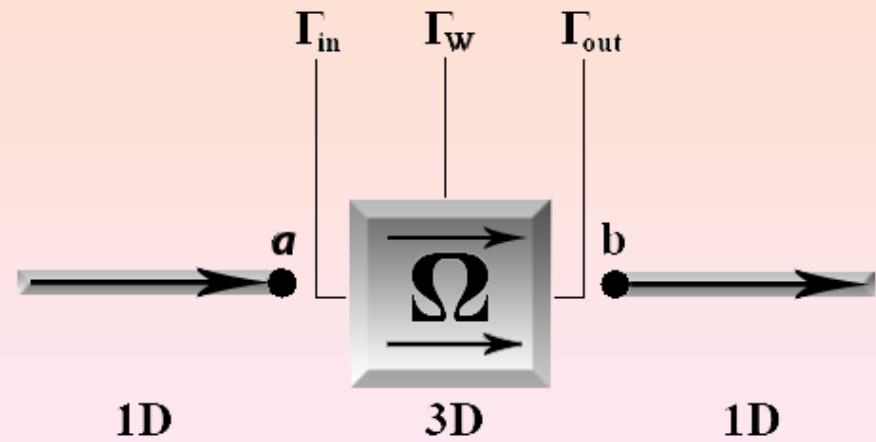
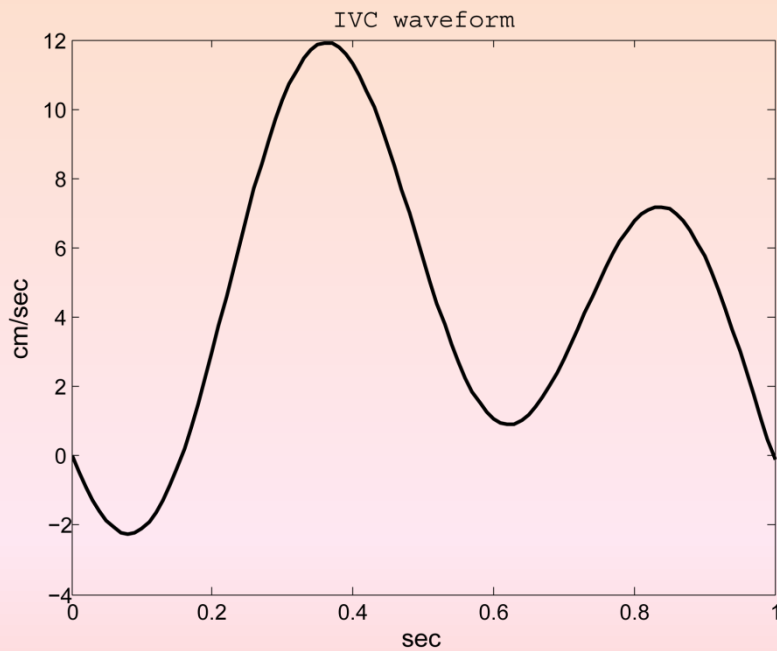
Silva, Camargo, Blanco (Бразилия), Чупахин, Черевко, Хе (Новосибирск)



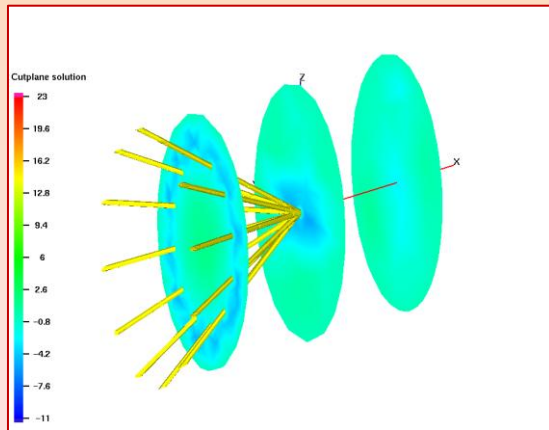
Пример сетки для кава-фильтра



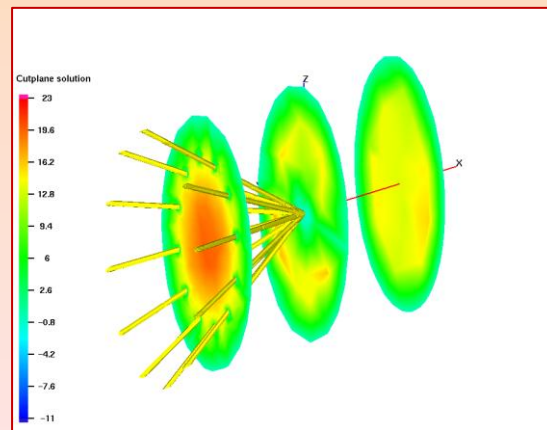
Расчет кровотока двухмасштабной моделью в вене с каво-фильтром



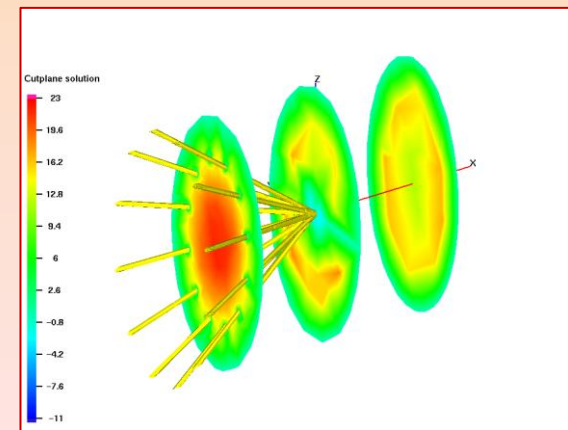
Распределение x -компоненты скорости в нескольких плоскостях, ортогональных Ox



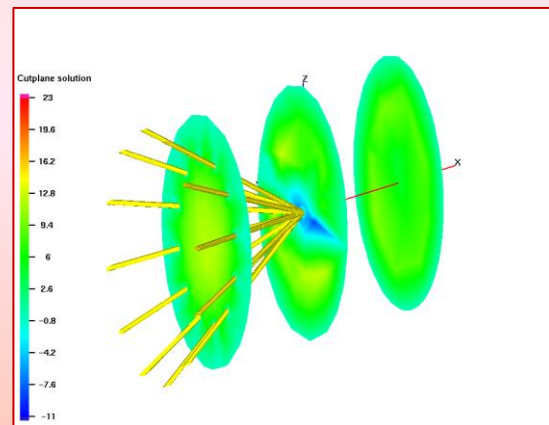
$t=3.06$



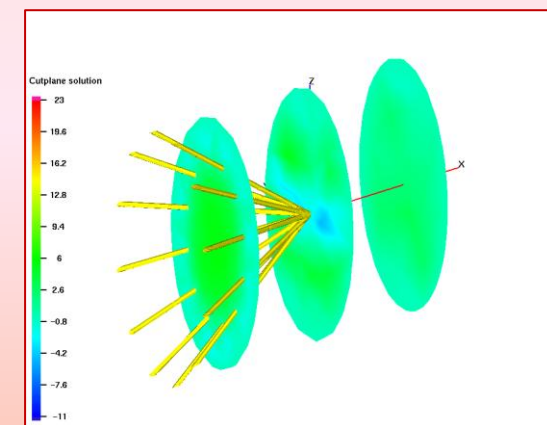
$t=3.34$



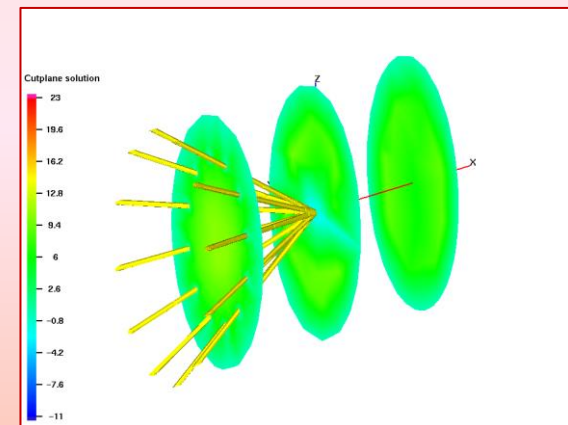
$t=3.39$



$t=3.52$

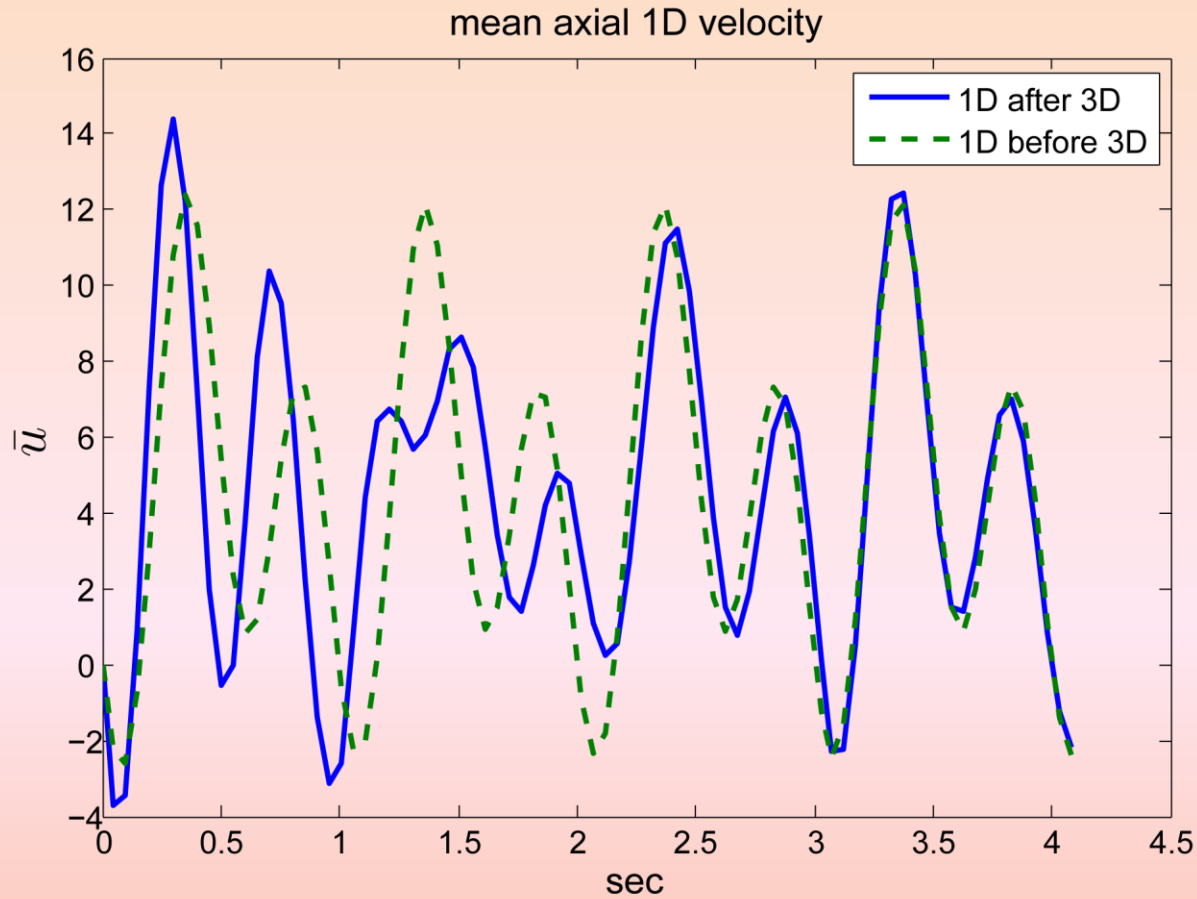


$t=3.66$

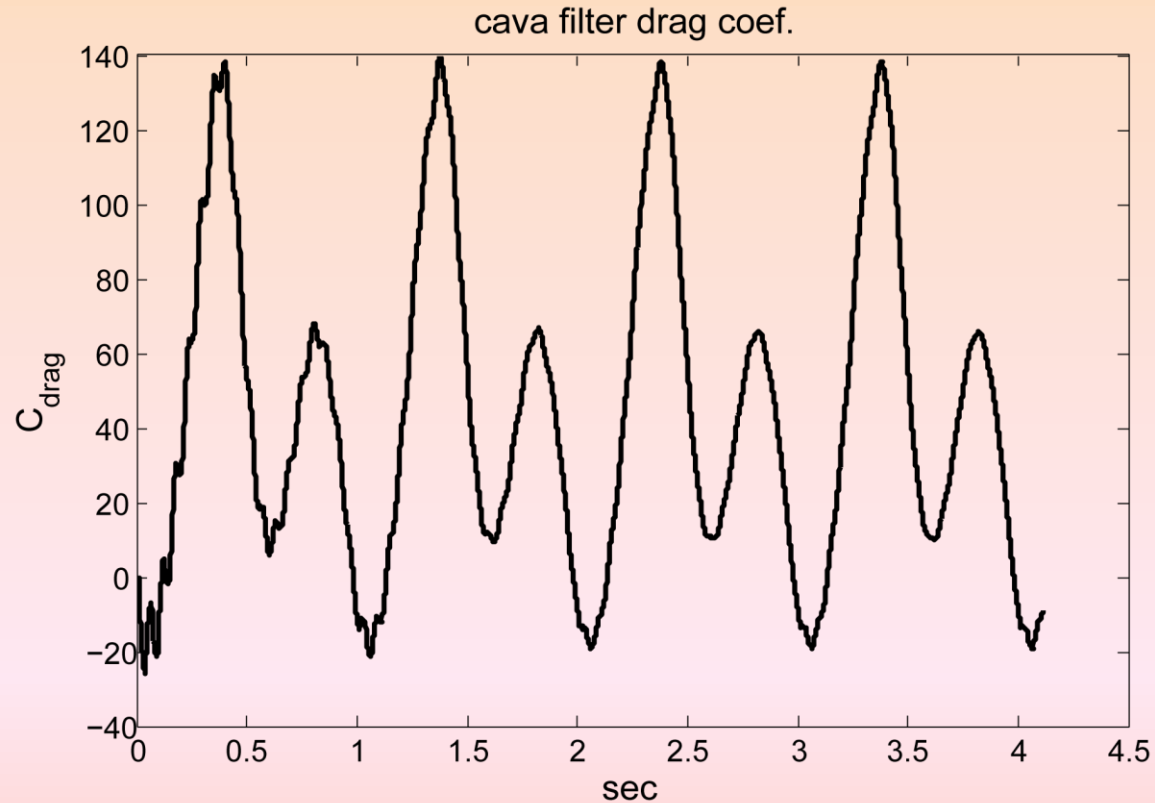


$t=3.92$

График скоростей в 1D сосудах до и после 3D области



Сила сопротивления, действующая на кава-фильтр



$$F = \int (\rho v \frac{\partial v_t}{\partial \mathbf{n}} n_y - p n_x) dS \quad [10^{-5} \text{N}]$$

Основные результаты

1. Предложены **новые граничные условия** на стыке трехмерной и одномерной моделей течения жидкости, гарантирующие выполнение энергетического баланса для двухмасштабной модели.
2. Предложен **алгоритм численных расчетов**, позволяющий на каждом временном шаге расщеплять задачу на одномерную и трехмерные подзадачи.
3. Проведен численный **расчет** течения крови в **вене с кава-фильтром** двухмасштабной моделью.

Спасибо за внимание!