

# Локальные неотражающие граничные условия в дифференциальных и разностных задачах

Л.В. Дородницын

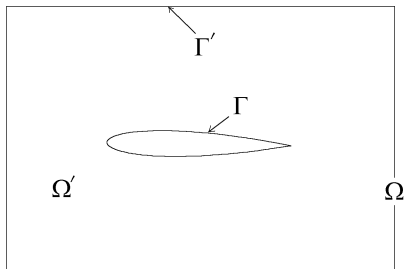
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

XV Всероссийская конференция-школа  
«Современные проблемы математического моделирования»



# Этапы математического моделирования

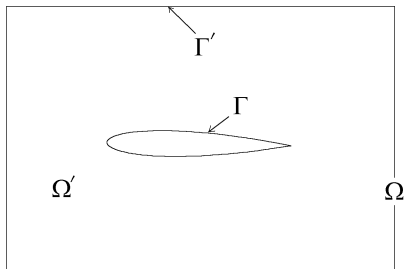
- Основные уравнения и начальные условия при  $\mathbf{x} \in \Omega$ , граничные условия при  $\mathbf{x} \in \Gamma$ : **исходная задача**.



## Этапы математического моделирования

- Основные уравнения и начальные условия при  $\mathbf{x} \in \Omega$ , граничные условия при  $\mathbf{x} \in \Gamma$ : **исходная задача**.
- Ограниченная подобласть  $\Omega' \subset \Omega$ . Те же уравнения при  $\mathbf{x} \in \Omega'$  и граничные условия при  $\mathbf{x} \in \Gamma$ ; искусственные граничные условия при  $\mathbf{x} \in \Gamma'$ : **редуцированная задача**.

У редуцированной задачи должно существовать единственное решение, совпадающее с решением исходной задачи при  $\mathbf{x} \in \Omega'$ .



## Этапы математического моделирования

- Основные уравнения и начальные условия при  $\mathbf{x} \in \Omega$ , граничные условия при  $\mathbf{x} \in \Gamma$ : **исходная задача**.
- Ограниченная подобласть  $\Omega' \subset \Omega$ . Те же уравнения при  $\mathbf{x} \in \Omega'$  и граничные условия при  $\mathbf{x} \in \Gamma$ ; искусственные граничные условия при  $\mathbf{x} \in \Gamma'$ : **редуцированная задача**.  
У редуцированной задачи должно существовать единственное решение, совпадающее с решением исходной задачи при  $\mathbf{x} \in \Omega'$ .
- Сетка  $\Omega'_h \subset \Omega'$ . Дискретные аналоги уравнений при  $\mathbf{x} \in \Omega'_h$  и граничных условий на  $\Gamma_h$  и  $\Gamma'_h$ : **разностная задача**.

# Одномерное волновое уравнение

Задача Коши с финитными начальными условиями

$$u_{tt} = c_0^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \\ \text{supp } \varphi \subset (0, X), \quad \text{supp } \psi \subset (0, X).$$

Задача на конечном отрезке  $x \in [0, X]$  дополняется краевыми условиями  $(u_t - c_0 u_x)|_{x=0} = 0, \quad (u_t + c_0 u_x)|_{x=X} = 0.$  (\*)

**Общая методика** — преобразование Фурье

$$u = \exp\{i\omega t - ikx\}, \quad \omega \geq 0, \quad k \in \mathbb{C},$$

$\omega$  — частота,  $k$  — волновое число.

Волновое уравнение  $\leftrightarrow -\omega^2 + c_0^2 k^2 = 0.$

$$k = k_1(\omega) \equiv \omega/c_0, \quad k = k_2(\omega) \equiv -\omega/c_0.$$

Обратное преобразование Фурье дает уравнения (\*).

# Двумерное волновое уравнение

$$u_{tt} - c_0^2 (u_{xx} + u_{yy}) = 0.$$

Преобразование Фурье:

$$u = \exp\{i\omega t - ikx - i\ell y\}, \quad \omega \geq 0, \quad k \in \mathbb{C}, \quad \ell \in \mathbb{R}.$$

$$-\omega^2 + c_0^2 (k^2 + \ell^2) = 0.$$

$$k = k_1 = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{1-s^2}, \quad k = k_2 = -\frac{\omega}{c_0} \sqrt{1-s^2}, \quad \text{где } s = \frac{c_0 \ell}{\omega}.$$

Обратное преобразование Фурье дает псевдодифференциальные уравнения, т.е. **нелокальные** граничные условия.

Рациональная аппроксимация радикала

$$\sqrt{1-s^2} = 1 - s^2/2 + O(s^4).$$

Локальные граничные условия:

$$u_t + c_0 u_x = 0;$$

$$2u_{tt} + 2c_0 u_{xt} - c_0^2 u_{yy} = 0.$$

# Граничные условия двух видов

## Нелокальные граничные условия

- (+) Точны для многомерных линеаризованных уравнений Эйлера
- (+) Устойчивы в большинстве случаев
- (-) Громоздки и трудны в реализации
- (-) По вычислительным затратам сопоставимы с основной схемой либо значительно превосходят ее
- (-) Трудны в распараллеливании
- (-) Плохо описывают нелинейные эффекты близ границы

## Локальные граничные условия

- (-) Приближенные в многомерном случае (проблема отражения косых волн)
- (-) Многие варианты приводят к неустойчивости
- (+) Обычно не сложнее основных уравнений
- (+) Вычислительные затраты намного меньше, чем у основной схемы
- (+) Легко распараллеливаются
- (+) Многие варианты допускают нелинейные обобщения

# Устойчивость искусственных граничных условий

## Многомерное волновое уравнение

Произвольная область конечного размера.

«Одномерное» неотражающее граничное условие.

$$\text{Основное уравнение} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta u = 0, \quad t > 0, \quad \mathbf{x} \in G. \quad (*)$$

$$\text{Граничное условие} \quad \partial u / \partial t + c_0 \partial u / \partial n = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial G. \quad (**)$$

**Теорема.** Для уравнения (\*) с граничным условием (\*\*) выполняется тождество

$$\frac{d}{dt} \int_G \left[ (u_t)^2 + c_0^2 (\nabla u)^2 \right] d^n x = -2c_0^3 \int_{\partial G} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 d\sigma \leq 0.$$



# Разностные задачи

## Проблемы постановки граничных условий

- Обычно для разностной схемы требуется большее количество граничных условий, чем для дифференциальной задачи.
- В большинстве разностных схем присутствуют дополнительные («ложные», «паразитные») волны, не имеющие аналогов в континуальной модели.

## Схема с центральными разностями для уравнения переноса

$$\partial u / \partial t + c_0 \partial u / \partial x = 0 \quad \mapsto \quad du_l / dt + c_0(u_{l+1} - u_{l-1}) / (2h) = 0$$

( $d/dt \mapsto$  схема Кранка–Николсон)

- Схема нуждается в условии на правой границе.
- Точного граничного условия не существует.

Образ Фурье  $\omega/c_0 = \sin(kh)/h \equiv \tilde{k}$ . Эффективное волновое число. Гармоническое решение содержит «физическую» моду и паразитную пилообразную осцилляцию:

$$u(x_l, t) = \exp\{i\omega t - ikx_l\} + R(-1)^l \exp\{i\omega t + ikx_l\}, \quad k = \frac{1}{h} \arcsin \frac{\omega h}{c_0}.$$

ГУ  $[\partial u / \partial t + c_0 u_{\bar{x}}]_N = 0$ , где  $\varphi_{\bar{x}, l} = (3\varphi_l - 4\varphi_{l-1} + \varphi_{l-2}) / (2h)$ .

- Есть примеры ГУ, дающие слабое отражение волн:  $R = O(h^3)$ .
- “Осциллирующими” схемами можно пользоваться.

# Схемы со спектральным разрешением

**DRP-схема** (Dispersion-Relation-Preserving scheme): высокоточная схема на широком шаблоне, применяемая в вычислительной аэроакустике.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \mapsto \quad \frac{du_j}{dt} + \frac{1}{h} \sum_{l=-3}^3 a_l u_{j+l} = 0$$

Tam & Webb:  $m = 3$  (7-точечный шаблон);

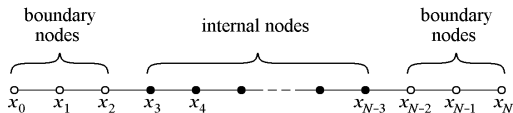
Vogey & Bailly:  $m = 4, 5, 6$  (9, 11, 13 точек).

Коэффициенты  $a_l$  выбираются из условия оптимизации дисперсионного соотношения. Симметрия:  $a_{-l} = -a_l$ .

$$\tilde{k} = \frac{2}{h} \sum_{j=1}^m a_j \sin(jkh). \quad \text{Подобрать } a_j, \text{ чтобы } \tilde{k} \approx k.$$

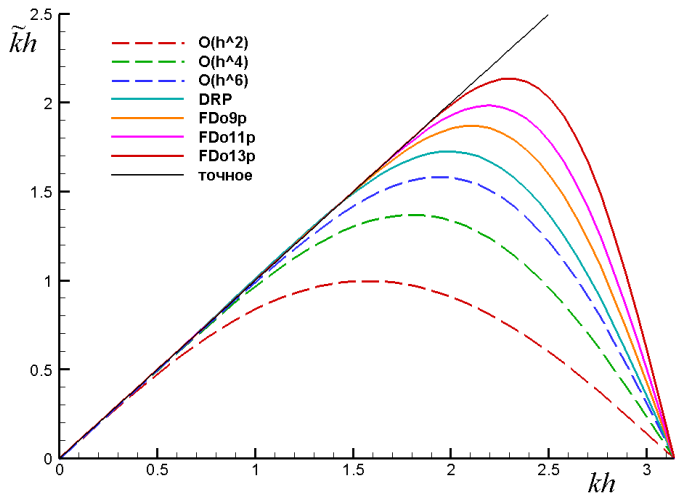
$d/dt \mapsto$  высокоточный метод Рунге–Кутты.

7-точечная схема  
DRP Tam & Webb:  
граничные условия



Неотражающие граничные условия...

# Оптимизация дисперсионного соотношения



Зависимость  
эффективного  
волнового числа  
от настоящего  
в различных  
схемах

# Граничные условия для DRP схемы Tam & Webb

- **Внутренние узлы:** симметричный 7-точечный шаблон.
- **Приграничные узлы:** косые 7-точечные шаблоны.

Разностная задача для уравнения переноса

Внутри области: 
$$\frac{du_j}{dt} + \frac{1}{h} \sum_{l=-3}^3 a_l u_{j+l} = 0, \quad j = 3, 4, \dots, N-3.$$

Левые ГУ: 
$$\frac{du_j}{dt} + \frac{1}{h} \sum_{l=0}^6 c_{jl} u_l = 0, \quad j = 0, 1, 2.$$

Правые ГУ: 
$$\frac{du_{N-j}}{dt} + \frac{1}{h} \sum_{l=0}^6 b_{jl} u_{N-l} = 0, \quad j = 0, 1, 2.$$

Матрицы коэффициентов  $\{b_{jl}\}$  и  $\{c_{jl}\}$  согласованы с набором  $\{a_j\}$ : аппроксимация  $O(h^4)$  и оптимизация дисперсионного соотношения.

# Нелинейные системы уравнений

## Трудности задания искусственных граничных условий

- Точные неотражающие условия существуют в редких случаях.
- Если граничные условия приближенные, то теоретическая оценка погрешности затруднительна.

# Адаптация линейных НГУ к нелинейным уравнениям

## Одномерные нелинейные уравнения Эйлера

Нелинейные уравнения Эйлера в квазилинейной форме vs. линеаризованные уравнения Эйлера

$$\frac{\partial V}{\partial t} + C_x(V) \frac{\partial V}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial t} + C_x \frac{\partial U}{\partial x} = 0.$$

- Производные возмущений заменяются производными исходных величин.
- В коэффициентах — текущие значения параметров вместо фоновых.

G.W. Hedstrom (1979); Л.В. Дородницын (2005).

Линейное граничное условие  $L_t \frac{\partial U}{\partial t} + L_x \frac{\partial U}{\partial x} = 0.$  (\*)

Нелинейное граничное условие  $L_t(V) \frac{\partial V}{\partial t} + L_x(V) \frac{\partial V}{\partial x} = 0.$  (\*\*)

**Теорема.** Если условие (\*) — неотражающее для линеаризованных 1D уравнений Эйлера, то соответствующее граничное условие (\*\*) является неотражающим для нелинейных 1D уравнений Эйлера.

# Нелинейные разностные граничные условия

**Квазилинейное уравнение переноса**  $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u^2) = 0.$

Схема:  $\frac{du_l}{dt} + \frac{u_{l+1}^2 - u_{l-1}^2}{4h} = 0;$   $\left[ \frac{\partial u}{\partial t} + u u_{\bar{x}} \right]_N = 0.$

Математический инструмент: гипотеза о фоне и «пиле»

$$u = \bar{u}(x_l, t) + (-1)^l a(x_l, t), \quad |a| \ll |\bar{u}|,$$

$\bar{u}(x, t), a(x, t)$  — гладкие функции.

Разновидность **метода дифференциального приближения**.

**Результат:** Соотношения между  $a$  и  $\bar{u}$  аналогичны линейным коэффициентам отражения.

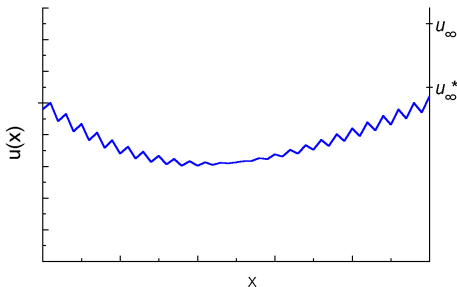


## Эффект «неправильной асимптотики».

Правое ГУ — релаксация к  $u_\infty$ :  $\partial u / \partial x = \beta (u_\infty - u)$ .

Аппроксимация направленной разностью

$$\frac{u_N - u_{N-1}}{h} = \beta (u_\infty - u_N) \quad \text{дает} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \beta (u_\infty^* - \bar{u}).$$



## Другой вариант правого граничного условия

$$\frac{u_N - u_{N-2}}{2h} = \beta (u_\infty - u_N).$$

# Перенос прямоугольного импульса

Уравнение переноса. Схема DRP Там.

# Распространение двух гауссовских импульсов

Линеариз. ур-ния  
Эйлера

Схема DRP Там

$$M \equiv u/c = 0.2$$
$$v = 0$$

Изолинии  $\rho'$

# Обтекание квадратного цилиндра

$$M \equiv u_\infty/c_\infty = 0.2, \quad \text{Re} = 150.$$

Уровни температуры  $T$

# Благодарю за внимание!

