XV Всероссийская Конференция-школа молодых исследователей "Современные проблемы математического моделирования"

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭФФЕКТОВ В ПЛАЗМЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА

Ефимова А.А., *Берендеев Е.А.*
Институт Вычислительной Математики
и Математической Геофизики СО РАН

- Работа направлена на изучение эффективности генерации электромагнитного излучения в различных нелинейных процессах, возникающих при инжекции в плазму электронного пучка. Данная задача актуальна как для лабораторных экспериментов по турбулентному нагреву плазмы в открытых ловушках, так и для интерпретации различных явлений в космической плазме (солнечные и гамма вспышки, излучения в магнитосферах планет, генерация высокоэнергетических космических лучей).
- Открытые магнитные ловушки являются одним из направлений в решении проблемы управляемого термоядерного синтеза, и одно из преимуществ этих систем перед замкнутыми конфигурациями состоит в возможности ввода в плазму электронных пучков большой мощности. В частности, инжекция килоамперного слаборелятивистского пучка в плазму на установке ГОЛ-3 (ИЯФ СО РАН) приводит к возбуждению сильной ленгмюровской турбулентности и последующему нагреву плазмы до температуры 2-3 кэВ за несколько микросекунд.
- Физический механизм взаимодействия плазмы с релятивистским электронным пучком включает в себя резонансное возбуждение колебаний плазмы, возникновение модуляции плотности плазмы с последующим рассеянием электронов в области с повышенной плотности.
- Именно за счет рассеяния электронов, как предполагается, и возникает эффект понижения теплопроводности на порядки. Под модуляцией плотности в данном случае подразумевается возникновение в плазме с первоначально равномерной плотностью областей с повышенной либо пониженной плотностью.

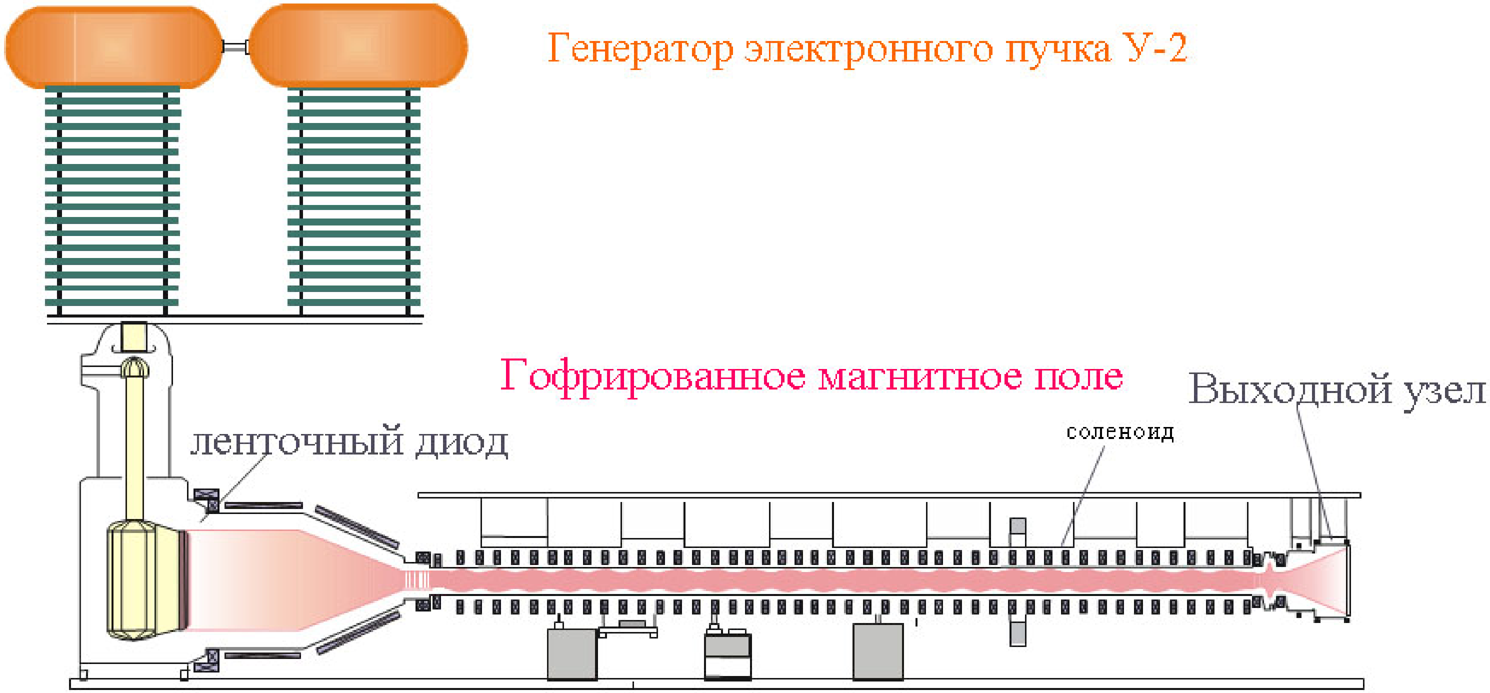
Установка ГОЛ-3 (ИЯФ СО РАН)

Электронный пучок

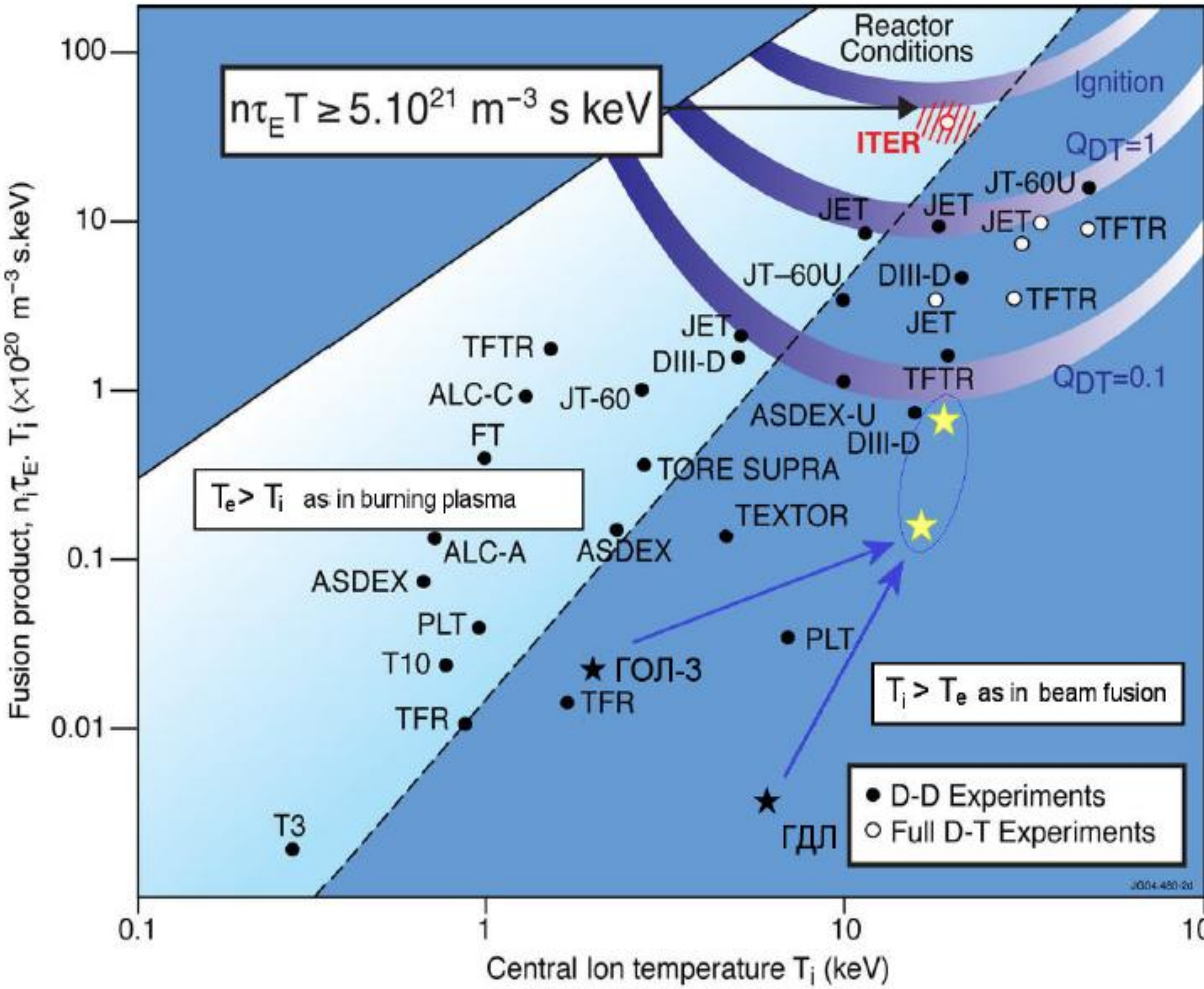
энергия 0.5 ÷ 0.8 МэВ
ток ~30 кА
длительность ~10 мкс

Плазма

плотность $10^{13} \div 10^{16}$ см$^{-3}$
температура $T_e \approx T_i$ ~ 2 кэВ
время жизни до 1 мс



Открытые ловушки ИЯФ в сравнении с токамаками



(c)JET

Постановка задачи

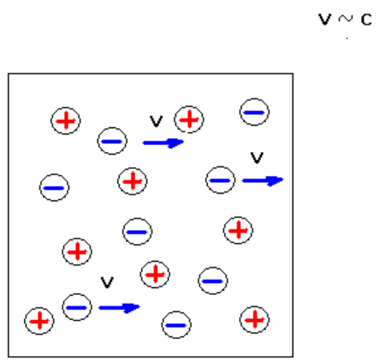
- Рассматривается приближение бесстолкновительной плазмы.
- Задача описывается системой уравнений Власова-Максвелла:

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + (\vec{\upsilon}, \vec{\nabla}) f_k + q_k \left(\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{\upsilon} \times \vec{H}] \right) \frac{\partial f_k}{\partial \vec{p}} = 0, \qquad k = 1, 2, 3$$

$$rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$div\vec{E} = 4\pi\rho \qquad div\vec{H} = 0$$

$$\vec{j} = \sum_k q_k \int \vec{\upsilon} f_k(\vec{p}, \vec{r}, t) d\vec{p} \qquad \rho = \sum_k q_k \int f_k(\vec{p}, \vec{r}, t) d\vec{p}$$



расчётная область

где f_k - функция распределения частиц сорта k (электроны пучка, электроны или ионы плазмы), $\vec{\upsilon}$ - скорость частиц,
$\vec{H}$ - магнитное поле, $\vec{E}$ - электрическое поле,
c - скорость света, ρ - плотность электрического заряда,
$\vec{j}$ - плотность электрического тока, q_k - заряд частицы сорта k.

- Область имеет форму прямоугольника.
- Граничные условия периодические.
- Начальная плотность электронов и ионов однородная.
- Распределение по скоростям ионов и электронов максвелловское.

Решение уравнения Власова

- Плазма моделируется набором отдельных частиц, каждая из которых характеризует движение многих физических частиц.
- Характеристики уравнения Власова описывают траектории движения частиц.
- Уравнения движения частиц:

$$\frac{d\vec{p}_k}{dt} = q_k\left(\vec{E} + \beta_0[\vec{\upsilon}_k, \vec{H}]\right) \qquad \vec{p}_k = \gamma_k m_k \vec{\upsilon}_k,$$

$$\frac{d\vec{r}_k}{dt} = \vec{\upsilon}_k \qquad \beta_0 = \upsilon_0/c \qquad \gamma_k = 1/\sqrt{1-\upsilon_k^2/c^2}$$

- Для решения этих уравнений используется схема 2-ого порядка по времени:

$$\frac{p_k^{m+1/2} - p_k^{m-1/2}}{\tau} = q_k\left(E^m + \beta_0\left[\frac{v_k^{m+1/2} + v_k^{m-1/2}}{2}, H^m\right]\right),$$

$$\frac{r_k^{m+1} - r_k^m}{\tau} = v_k^{m+1/2}.$$

Решение уравнений Максвелла

- Плотность тока определяется по скоростям и координатам отдельных частиц:

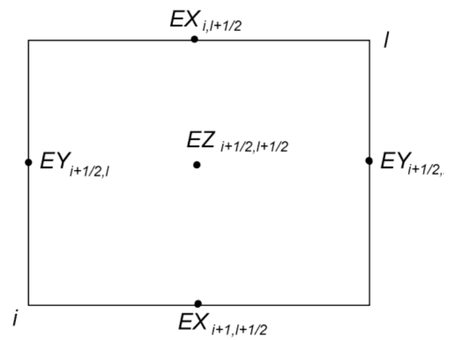
$$j(r,t) = \sum_{k=1}^{K} q_k v_k(t) R(r, r_k(t))$$

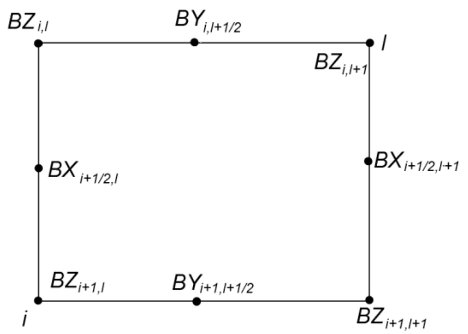
- Функция $R(r, r_k(t))$ характеризует форму, размер частицы и распределение в ней заряда.
- Разностная схема Лэнгдона-Лазинского для решения уравнений Максвелла:

$$\frac{H^{m+1/2} - H^{m-1/2}}{\tau} = -\frac{1}{\beta_0} rot_h E^m,$$

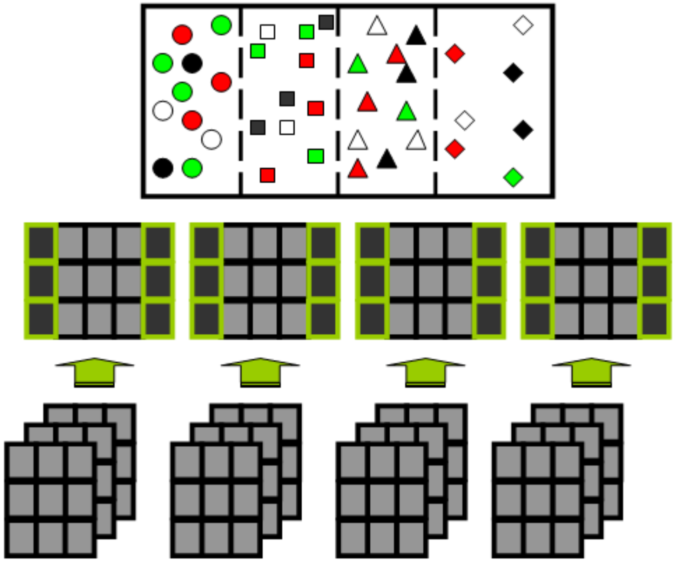
$$\frac{E^{m+1} - E^m}{\tau} = -j^{m+1/2} + \frac{1}{\beta_0} rot_h H^{m+1/2}.$$

- Условие устойчивости схемы: $\frac{(\beta_0 v + 1)\tau}{\beta_0 h} < 1$





Параллельная реализация алгоритма



- Программа реализована с использованием MPI. Расчеты проводились на следующих вычислительных системах:
- Суперкомпьютер «Ломоносов» Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ имени М.В.Ломоносова, г. Москва. Процессоры Intel Xeon 5570 2932 МГц, Cache 8 Mb;
- Суперкомпьютер «НКС-30Т» (НКС-G6) Сибирского Суперкомпьютерного Центра ИВМиМГ СО РАН, г. Новосибирск. Процессоры Intel Xeon E5540 2530 МГц, Cache 8 Mb.

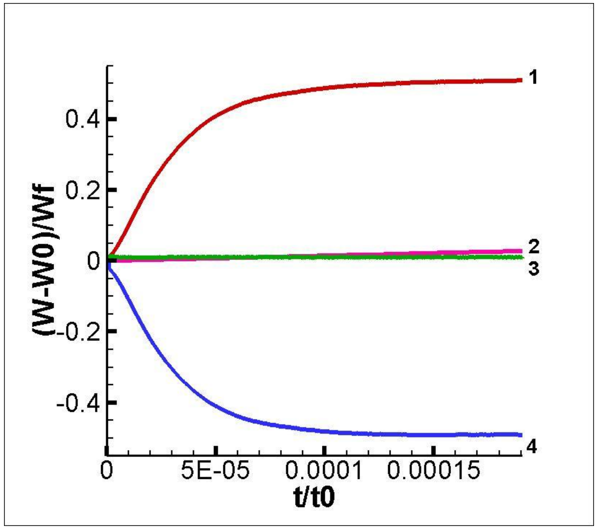
Общее количество используемых процессорных ядер	Число процессорных ядер на подобласть	Время расчёта одного шага, сек.	Ускорение по сравнению с 256 процессорными ядрами
256	4	2,737	1
512	8	1,448	1,89
1024	16	0,763	3,58

Таблица. Время счёта одного шага (в секундах) для различного числа процессоров и полученное ускорение.

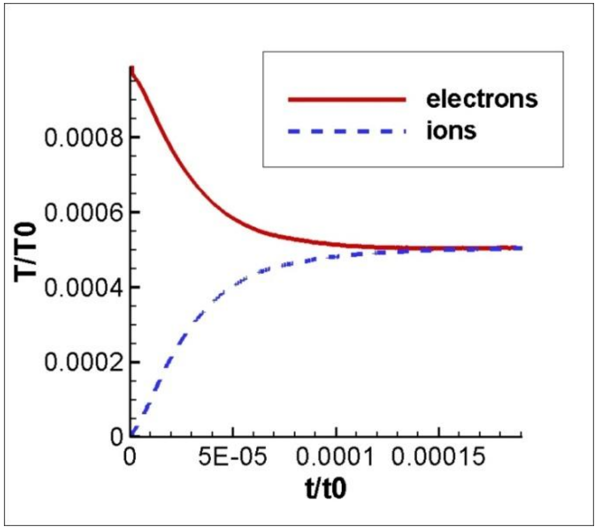
Установление температуры

- Плазма состоит из двух сортов частиц (ионов и электронов), электронный пучок отсутствует.
- Температура электронов задана, температура ионов в начальный момент времени - нулевая. В этом случае температура ионов и электронов должна устанавливаться, причем к одному значению. Для контроля решения использовалось изменение энергии, а темпы изменения скорости частиц являлись результатом тестирования.

- Выполнение законов сохранения



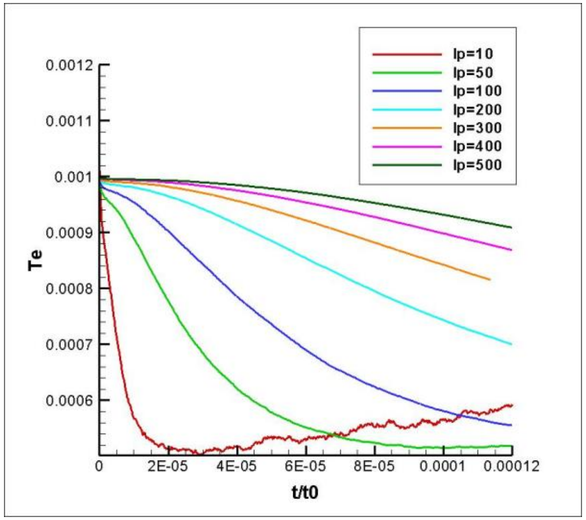
Установление температуры



- 1 – изменение энергии ионов;
- 2 – изменение полной энергии;
- 3 – изменение напряженности электрического поля;
- 4 – изменение энергии электронов фона.

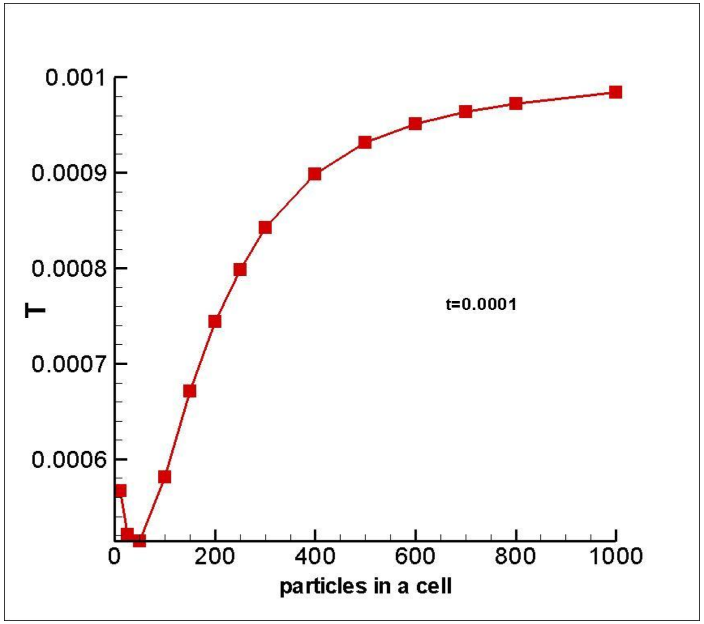
Влияние счетных параметров на решение

Число частиц в ячейке

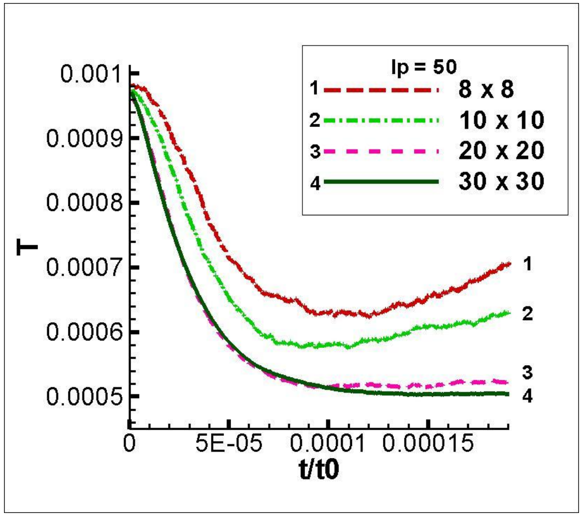


Определялась температура в момент времени t=5e-05 и t=0.0001
для различных значений числа частиц в ячейке.

Наблюдается сходимость решения для числа частиц в ячейке > 50.



Шаг сетки



Моделирование электростатической двухпотоковой неустойчивости

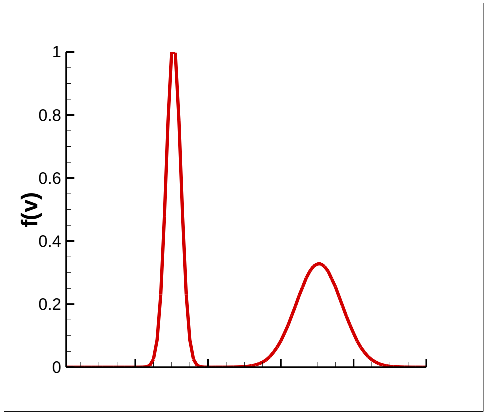
- Ионы образуют однородный неподвижный фон.
- Начальное распределение электронов:
  - пространственно однородно;
  - суперпозиция двух встречных максвелловских потоков.

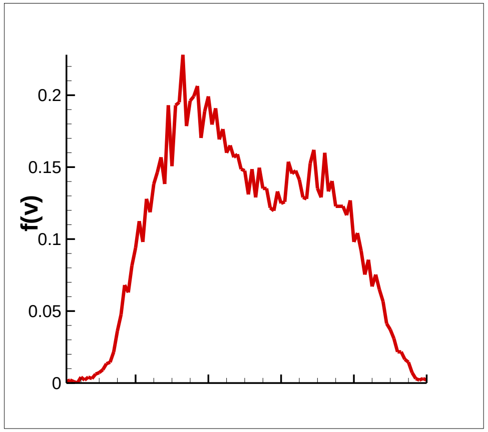
$$f_0(v) = a_1 \exp\left[-\frac{(\vec{v}-\vec{v}_0)^2}{2\sigma_1^{\,2}}\right] + a_2 \exp\left[-\frac{(\vec{v}+\vec{v}_0)^2}{2\sigma_2^{\,2}}\right],$$

$$\vec{v}_0 = \{u, 0, 0\},\ u = 1,$$

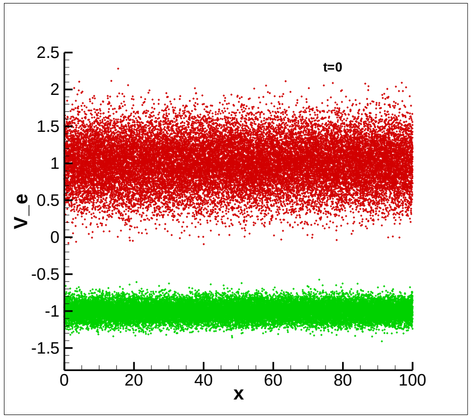
$$\sigma_1^2 = 0.1,\ \sigma_2^2 = 0.01.$$

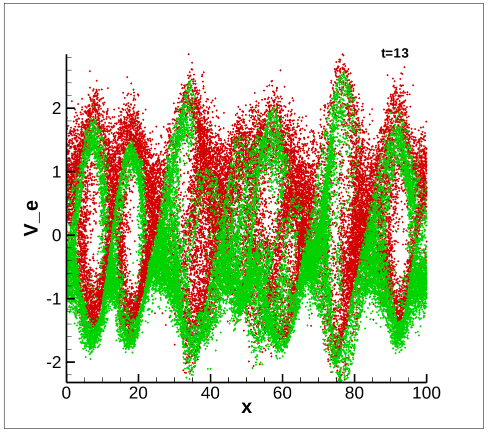
Функция распределения скорости по x



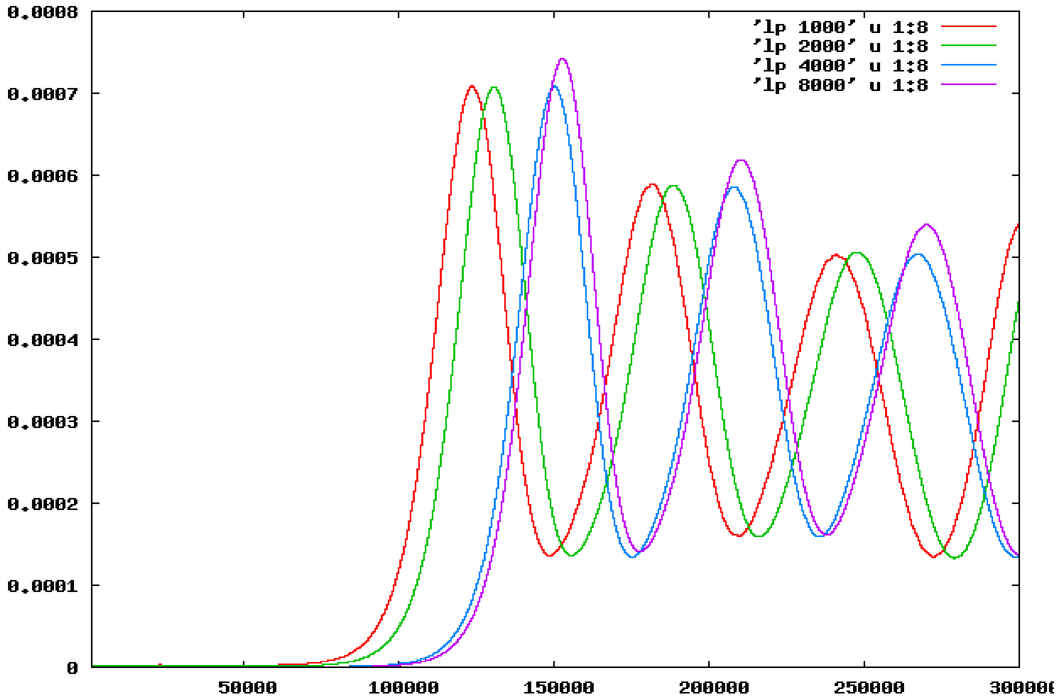


Фазовое пространство:





Расчет инкремента нарастания амплитуды поля



$$E \sim e^{\gamma t}, \quad \gamma = \frac{\partial(\ln E)}{\partial t}$$

Исходя из теоретических оценок, на некотором участке времени напряженность электрического поля описывается экспоненциальной функцией. Для определения инкремента нарастания амплитуды поля проводился дисперсионный анализ задачи в полной гидродинамической постановке.

Дисперсионный анализ

Гидродинамические уравнения для электронов фона

$$\frac{\partial n}{\partial t} + div(n\vec{v}) = 0$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{e}{m_e}\left(\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}\vec{B}]\right)$$

Гидродинамические уравнения для электронов пучка

$$\frac{\partial n_b}{\partial t} + div(n_b\overrightarrow{v_b}) = 0$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{v_b}}{\partial t} + (\overrightarrow{v_b}\nabla)\overrightarrow{v_b} = -\frac{e}{m_e}\left(\vec{E} + \frac{1}{c}[\overrightarrow{v_b}\vec{B}]\right)$$

Уравнения Максвелла

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c \cdot rot\vec{B} + 4\pi e(n\vec{v} + n_b\vec{v}_b)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -c \cdot rot\vec{E}$$

Начальные условия

$$E_0 = 0$$

$$n_0 \neq 0$$

$$B_0 = 0$$

$$v_{x0} = 0$$

$$v_{y0} = 0$$

$$v_{z0} = 0$$

$$v_{bx0} \neq 0, \quad v_0 = v_{bx0}$$

$$v_{by0} = 0$$

$$v_{bz0} = 0$$

$$n_{b0} \neq 0$$

Получаем систему относительно переменных:

$v_x^*, v_y^*, v_z^*, n_b^*, v_{bx}^*, v_{by}^*, v_{bz}^*, E_x^*, E_y^*, E_z^*, B_y^*, B_z^*$,

где $f^* = \tilde{f}\exp(-iwt + ikx)$

w – частота колебаний,

k – волновое число

$\gamma = Im(w) > 0$

γ - инкремент роста амплитуды поля

$$\begin{bmatrix} w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{Ie}{me} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{Ie}{me} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{Ie}{me} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w - k\,v0 & -k\,nb0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w - k\,v0 & 0 & 0 & \frac{Ie}{me} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w - k\,v0 & 0 & 0 & \frac{Ie}{me} & 0 & 0 & -\frac{Ie\,v0}{me\,c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w - k\,v0 & 0 & 0 & \frac{Ie}{me} & \frac{Ie\,v0}{me\,c} & 0 \\ 4I\pi\,e\,n0 & 0 & 0 & 4I\pi\,e\,v0 & 4I\pi\,e\,nb0 & 0 & 0 & -w & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4I\pi\,e\,n0 & 0 & 0 & 0 & 4I\pi\,e\,nb0 & 0 & 0 & -w & 0 & 0 & k\,c \\ 0 & 0 & 4I\pi\,e\,n0 & 0 & 0 & 0 & 4I\pi\,e\,nb0 & 0 & 0 & -w & -k\,c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k\,c & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k\,c & 0 & 0 & w \end{bmatrix}$$

Система имеет нетривиальное решение, если определитель матрицы равен нулю:

$$detA = \frac{1}{{m_e}^3} w^2(-w + kv_0)^2(-m_e w^2 + m_e k^2 c^2 + 4\pi e^2 n_{b0} + 4\pi e^2 n_0)^2\,(-m_e w^4 + 2w^3 m_e k v_0 + 4\pi e^2 n_{b0} w^2 - w^2 k^2 {v_0}^2 m_e + 4\pi e^2 n_0 w^2 - 8\pi e^2 n_0 w k v_0 + 4\pi e^2 n_0 w k^2 {v_0}^2) = 0$$

Нас интересует решение для уравнения:

$$(-m_e w^4 + 2w^3 m_e k v_0 + 4\pi e^2 n_{b0} w^2 - w^2 k^2 v_0{}^2 m_e + 4\pi e^2 n_0 w^2 - 8\pi e^2 n_0 w k v_0 + 4\pi e^2 n_0 w k^2 v_0{}^2) = 0$$

Поделим его на $-m_e$

$$w^4 - 2w^3 k v_0 + \frac{4\pi e^2 n_0}{m_e}\widetilde{n_{b0}} w^2 - w^2 k^2 v_0{}^2 - \frac{4\pi e^2 n_0}{m_e} w^2 + 2\cdot\frac{4\pi e^2 n_0}{m_e} w k v_0 - \frac{4\pi e^2 n_0}{m_e} k^2 v_0{}^2 = 0$$

Заметим, что: $\frac{4\pi e^2 n_0}{m_e} = w_{pe}^2, n_{b0} = n_0.\widetilde{n_{b0}}$

$$\left(\frac{w}{w_{pe}}\right)^4 - 2\left(\frac{w}{w_{pe}}\right)^3\left(\frac{kv_0}{w_{pe}}\right) + \widetilde{n_{b0}}\left(\frac{w}{w_{pe}}\right)^2 - \left(\frac{kv_0}{w_{pe}}\right)^2\left(\frac{w}{w_{pe}}\right)^2 - \left(\frac{w}{w_{pe}}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{kv_0}{w_{pe}}\right)\cdot\left(\frac{kv_0}{w_{pe}}\right) - \left(\frac{kv_0}{w_{pe}}\right)^2 = 0$$

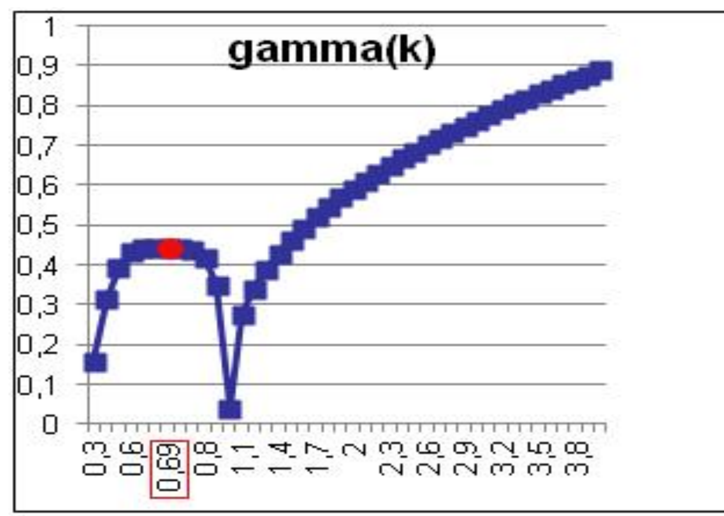
$$w_0 = w_{pe}, k_0 = \frac{w_{pe}}{v_0}.$$

Тогда уравнение можно переписать в безразмерном виде:

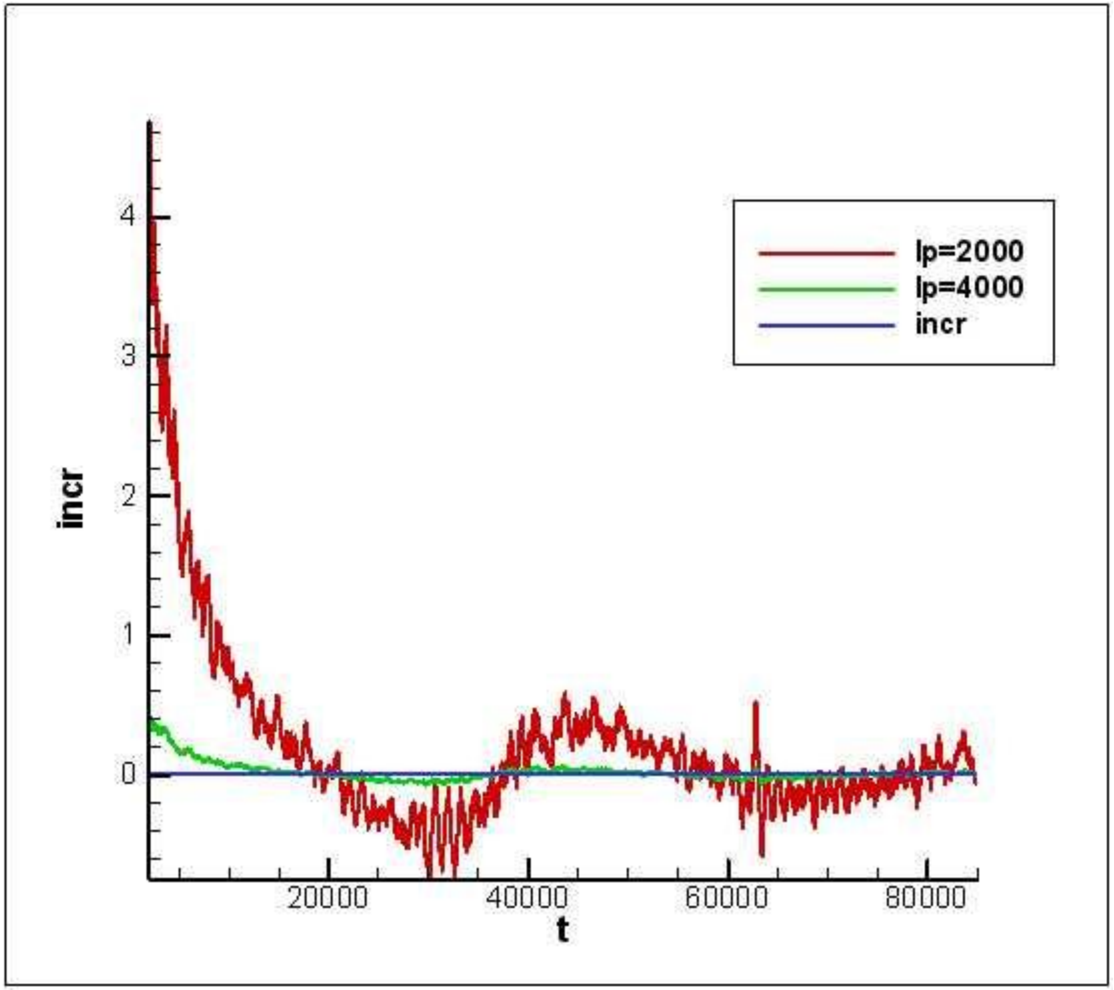
$$w^4 - 2\tilde{k}\tilde{w}^3 + \left(\tilde{k}^2 - \widetilde{n_{b0}} - 1\right)\tilde{w}^2 + 2\tilde{k}\tilde{w} - \tilde{k}^2 = 0$$

$$\gamma = \mathrm{Im}(w) > 0$$

γ – искомый инкремент роста амплитуды поля.



Вычисление инкремента для различного числа частиц в ячейке



$$\frac{n_b}{n_0} = \frac{1}{500}$$

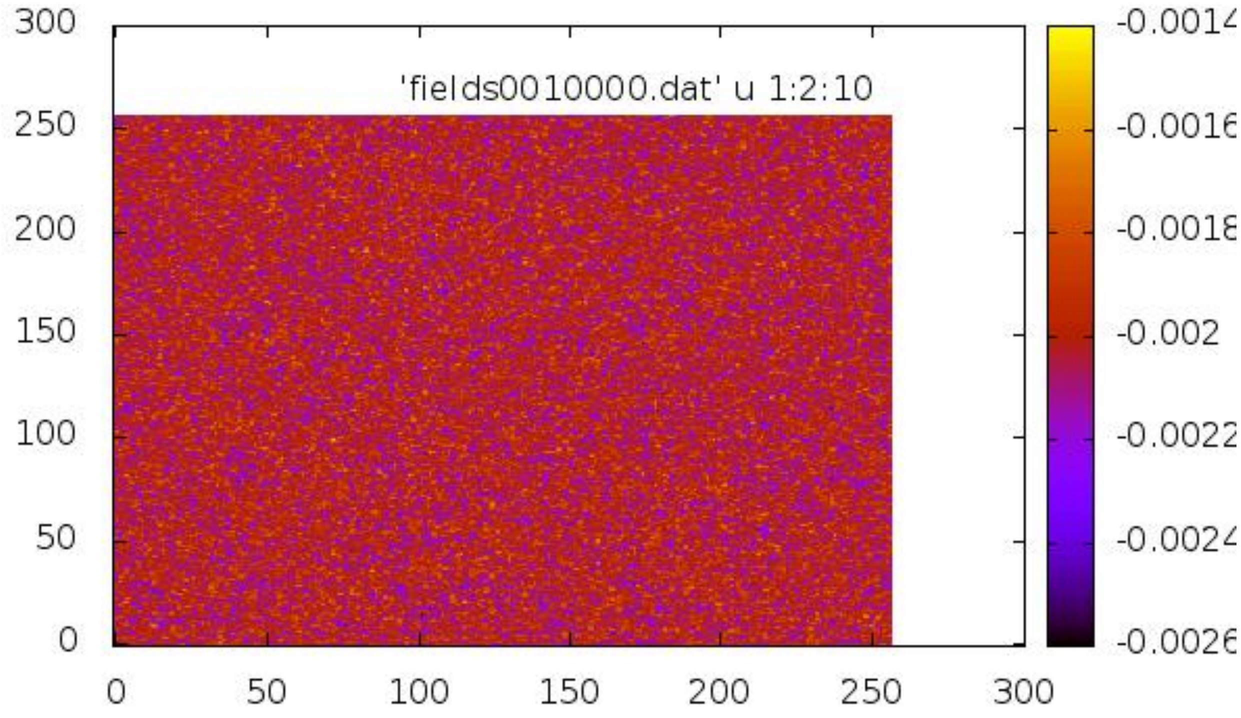
$$v_0 = 0.2$$

$$L = 1{,}2566$$

$$k = 1$$

$$w = 0{,}0091$$

Модуляция плотности



$\frac{n_b}{n_0} = \frac{1}{500}$

$v_0 = 0.2$

$L_x = L_y = 2{,}5136$

Сетка 128 x 128

1000 частиц в ячейке

256 процессорных ядер

Заключение

- Создан алгоритм и программа, позволяющая моделировать эффекты теплопроводности в плазме.

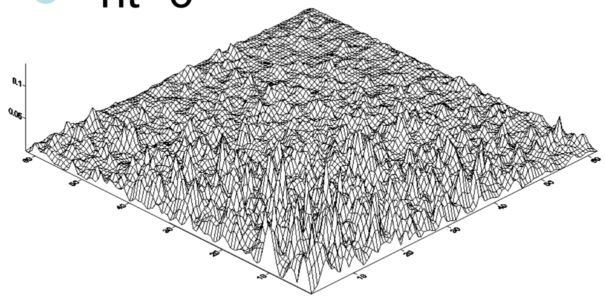
- Для тестирования программы рассматривалась задача установления температуры и задача о двухпотоковой неустойчивости. С помощью дисперсионного анализа получено аналитическое значение гармоники с максимальным инкрементом нарастания.

- С помощью численного моделирования удалось воспроизвести эффект резонансного возбуждения колебаний плазмы и возникновение модуляции плотности плазмы с последующим рассеянием электронов в области с повышенной плотности.

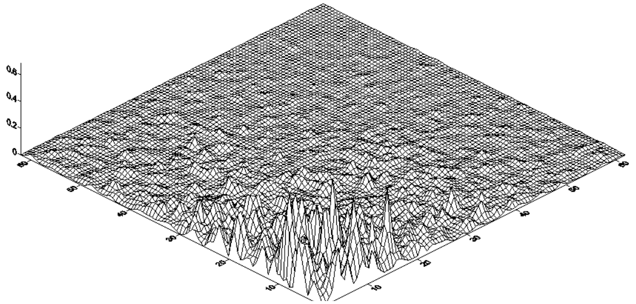
Спасибо за внимание!

Фурье-анализ плотности заряда

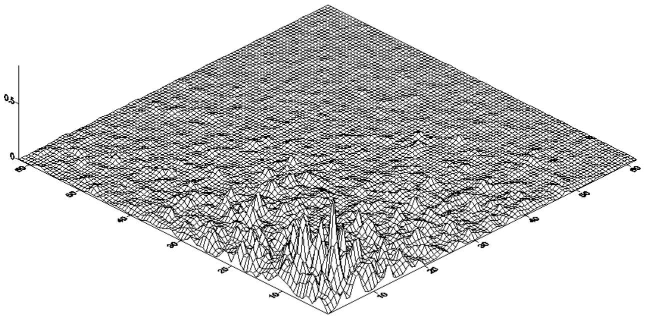
- Размер сетки: 120x120
- Число частиц в ячейке: 200
  - nt=0



  - nt=2000



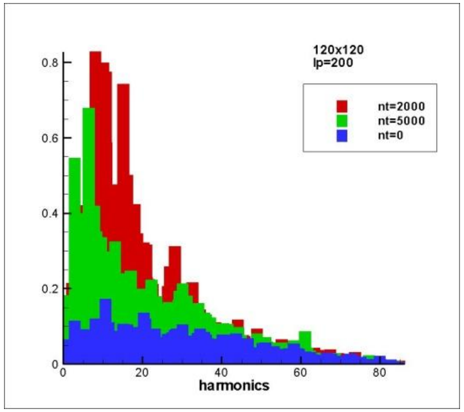
  - nt=5000



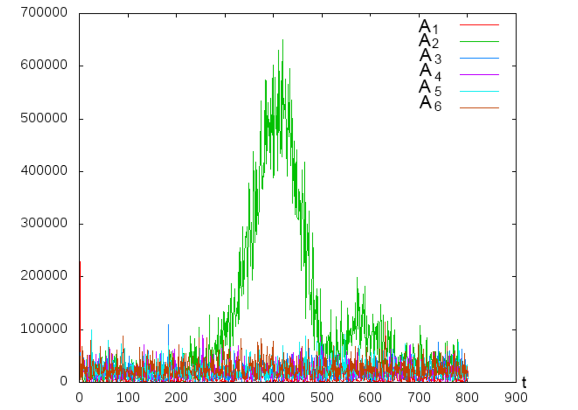
Физический механизм взаимодействия плазмы с релятивистским электронным пучком включает в себя резонансное возбуждение колебаний плазмы, возникновение модуляции плотности плазмы с последующим рассеянием электронов в области с повышенной плотности.

Именно за счет рассеяния электронов, как предполагается, и возникает эффект понижения теплопроводности на порядки. Под модуляцией плотности в данном случае подразумевается возникновение в плазме с первоначально равномерной плотностью областей с повышенной либо пониженной плотностью.

Сравнительный график гармоник Фурье-анализа плотности заряда



Амплитуды основных гармоник плотности плазмы в зависимости от времени



Запишем эту систему в декартовых координатах, предполагая, что волна распространяется только вдоль оси x,

т.е. пренебрегаем производными $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$

$$\frac{\partial n}{\partial t}+v_x\frac{\partial n}{\partial x}+n\frac{\partial v_x}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}=-\frac{e}{m_e}\left(E_x+\frac{1}{c}\left(v_yB_z-v_zB_y\right)\right)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}=-\frac{e}{m_e}\left(E_y+\frac{1}{c}\left(v_zB_x-v_xB_z\right)\right)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}=-\frac{e}{m_e}\left(E_z+\frac{1}{c}\left(v_xB_y-v_yB_x\right)\right)$$

$$\frac{\partial n_b}{\partial t}+v_{bx}\frac{\partial n_b}{\partial x}+n_b\frac{\partial v_{bx}}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial v_{bx}}{\partial t}+v_{bx}\frac{\partial v_{bx}}{\partial x}=-\frac{e}{m_e}\left(E_x+\frac{1}{c}\left(v_{by}B_z-v_{bz}B_y\right)\right)$$

$$\frac{\partial v_{by}}{\partial t}+v_{bx}\frac{\partial v_{by}}{\partial x}=-\frac{e}{m_e}\left(E_y+\frac{1}{c}\left(v_{bz}B_x-v_{bx}B_z\right)\right)$$

$$\frac{\partial v_{bz}}{\partial t}+v_{bx}\frac{\partial v_{bz}}{\partial x}=-\frac{e}{m_e}\left(E_z+\frac{1}{c}\left(v_{bx}B_y-v_{by}B_x\right)\right)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t}=4\pi e\left(nv_x+n_bv_{bx}\right)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t}=-c\frac{\partial B_z}{\partial x}+4\pi e\left(nv_y+n_bv_{by}\right)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t}=c\frac{\partial B_y}{\partial x}+4\pi e\left(nv_z+n_bv_{bz}\right)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t}=c\frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t}=-c\frac{\partial E_y}{\partial x}$$

Выполняем линеаризацию: $f = f^0 + f^*$, где f - одна из функций :

$n \; , v_x \; , v_y \; , v_z \; , n_b \; , v_{bx} \; , v_{by} \; , v_{bz} \; , E_x \; , E_y \; , E_z \; , B_x , B_y \; , B_z$

И пренебрегаем квадратами отклонений, получаем систему:

$$\frac{\partial n^*}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v_x^*}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial v_x^*}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} E_x^*$$

$$\frac{\partial v_y^*}{\partial t} = -\frac{e}{m_e}\left(E_y^* + \frac{1}{c} v_z^* B_0\right)$$

$$\frac{\partial v_z^*}{\partial t} = -\frac{e}{m_e}\left(E_z^* - \frac{1}{c} v_y^* B_0\right)$$

$$\frac{\partial n_b^*}{\partial t} + v_0 \frac{\partial n_b^*}{\partial x} + n_{b0} \frac{\partial v_{bx}^*}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial v_{bx}^*}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v_{bx}^*}{\partial x} = -\frac{e}{m_e} E_x^*$$

$$\frac{\partial v_{by}^*}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v_{by}^*}{\partial x} = -\frac{e}{m_e}\left(E_y^* + \frac{1}{c}(v_{bz}^* B_0 - v_0 B_z^*)\right)$$

$$\frac{\partial v_{bz}^*}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v_{bz}^*}{\partial x} = -\frac{e}{m_e}\left(E_z^* + \frac{1}{c}(v_0 B_y^* - v_{by}^* B_0)\right)$$

$$\frac{\partial E_x^*}{\partial t} = 4\pi e(n_0 v_x^* + n_{b0} v_{bx}^* + v_0 n_b^*)$$

$$\frac{\partial E_y^*}{\partial t} = -c\frac{\partial B_z^*}{\partial x} + 4\pi e(n_0 v_y^* + n_{b0} v_{by}^*)$$

$$\frac{\partial E_z^*}{\partial t} = c\frac{\partial B_y^*}{\partial x} + 4\pi e(n_0 v_z^* + n_{b0} v_{bz}^*)$$

$$\frac{\partial B_x^*}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial B_y^*}{\partial t} = c\frac{\partial E_z^*}{\partial x}$$

$$\frac{\partial B_z^*}{\partial t} = -c\frac{\partial E_y^*}{\partial x}$$

Любую функцию можно представить в виде: $f^* = \tilde{f}\exp\left(-iwt + ikx\right)$,

$\tilde{f}$ $-$ амплитуда волны, w - частота колебаний, k - волновое число.

Тогда учитывая, что $\frac{\partial f^*}{\partial t} = -iwf^*$, $\frac{\partial f^*}{\partial x} = ikf^*$,а так же что $B_0 = 0$, система перепишется в виде:

$$wn^* - kn_0 v_x^* = 0$$

$$wv_x^* + i\frac{e}{m_e}E_x^* = 0$$

$$wv_y^* + i\frac{e}{m_e}E_y^* = 0$$

$$wv_z^* + i\frac{e}{m_e}E_z^* = 0$$

$$wn_b^* - kv_0 n_b^* - kn_{b0}v_{bx}^* = 0$$

$$wv_{bx}^* - kv_0 v_{bx}^* + i\frac{e}{m_e}E_x^* = 0$$

$$wv_{by}^* - kv_0 v_{by}^* + i\frac{e}{m_e}E_y^* - i\frac{e}{m_e}\frac{v_0}{c}B_z^* = 0$$

$$wv_{bz}^* - kv_0 v_{bz}^* + i\frac{e}{m_e}E_z^* + i\frac{e}{m_e}\frac{v_0}{c}B_y^* = 0$$

$$wE_x^* - i4\pi e n_0 v_x^* - i4\pi e n_{b0} v_{bx}^* - i4\pi e v_0 n_b^* = 0$$

$$wE_y^* - kcB_z^* - i4\pi e n_0 v_y^* - i4\pi e n_{b0} v_{by}^* = 0$$

$$wE_z^* + kcB_y^* - i4\pi e n_0 v_z^* - i4\pi e n_{b0} v_{bz}^* = 0$$

$$B_x^* = 0$$

$$wB_y^* + kcE_z^* = 0$$

$$wB_z^* - kcE_y^* = 0$$

Получаем систему относительно переменных:

$v_x{}^*, v_y{}^*, v_z{}^*, n_b{}^*, v_{bx}{}^*, v_{by}{}^*, v_{bz}{}^*, E_x{}^*, E_y{}^*, E_z{}^*, B_y{}^*, B_z{}^*$, где $f^* = \tilde{f}\exp\left(-iwt + ikx\right)$

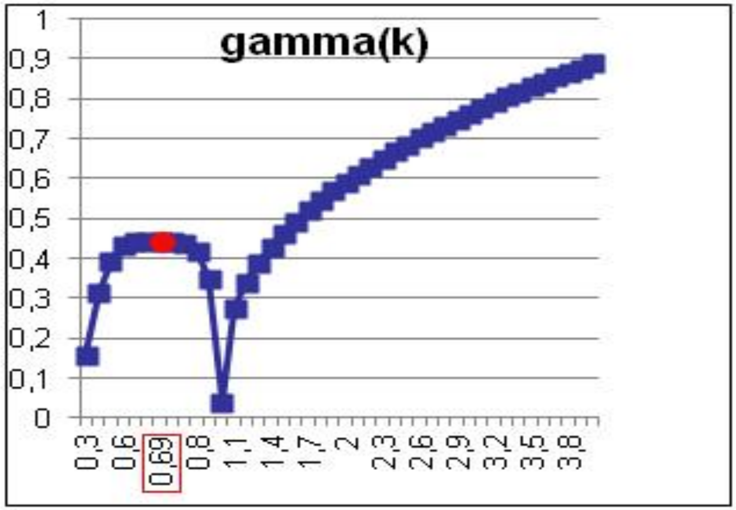
w – частота колебаний,

k – волновое число

$\gamma = Im(w) > 0$

γ - инкремент роста амплитуды поля

$$\begin{bmatrix}
w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{Ie}{me} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{Ie}{me} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{Ie}{me} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & w-k\,v0 & -k\,nb0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & w-k\,v0 & 0 & 0 & \frac{Ie}{me} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w-k\,v0 & 0 & 0 & \frac{Ie}{me} & 0 & 0 & -\frac{Ie\,v0}{me\,c} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w-k\,v0 & 0 & 0 & \frac{Ie}{me} & \frac{Ie\,v0}{me\,c} & 0 \\
4I\pi e\,n0 & 0 & 0 & 4I\pi e\,v0 & 4I\pi e\,nb0 & 0 & 0 & -w & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 4I\pi e\,n0 & 0 & 0 & 0 & 4I\pi e\,nb0 & 0 & 0 & -w & 0 & 0 & k\,c \\
0 & 0 & 4I\pi e\,n0 & 0 & 0 & 0 & 4I\pi e\,nb0 & 0 & 0 & -w & -k\,c & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k\,c & w & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k\,c & 0 & 0 & w
\end{bmatrix}$$

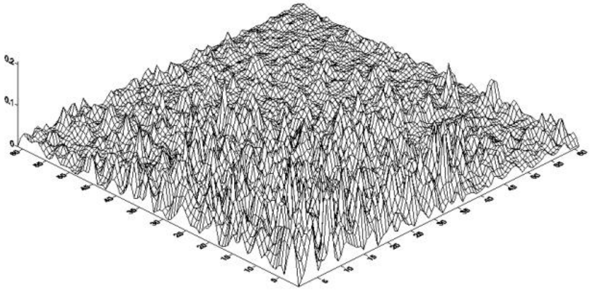


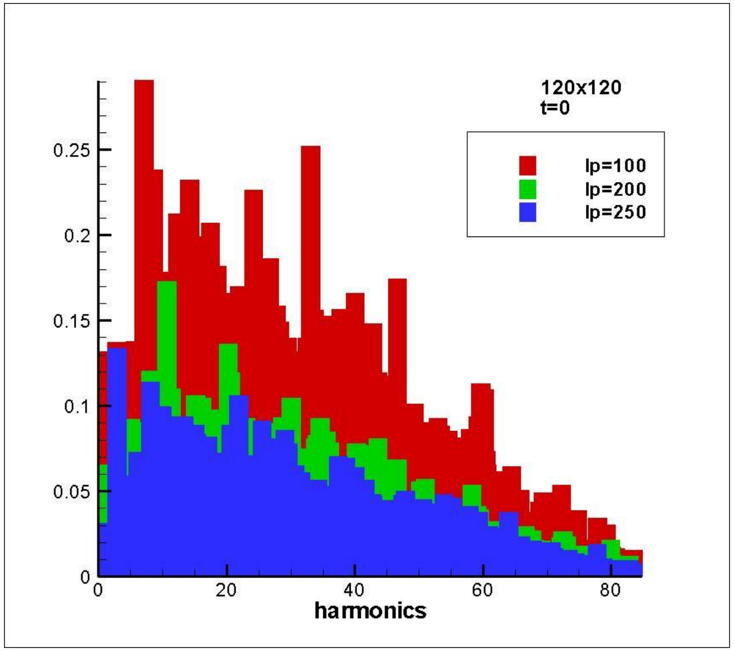
Система имеет нетривиальное решение, если определитель матрицы равен нулю:

$$detA = \frac{1}{m_e{}^3} w^2 (-w + kv_0)^2 (-m_e w^2 + m_e k^2 c^2 + 4\pi e^2 n_{b0} + 4\pi e^2 n_0)^2 \,(-m_e w^4 + 2w^3 m_e k v_0 + 4\pi e^2 n_{b0} w^2 - w^2 k^2 v_0{}^2 m_e + 4\pi e^2 n_0 w^2 - 8\pi e^2 n_0 w k v_0 + 4\pi e^2 n_0 w k^2 v_0{}^2) = 0$$

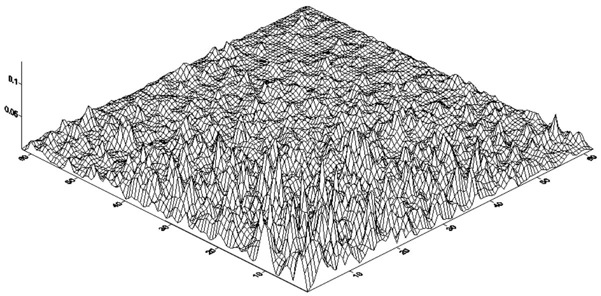
Влияние числа частиц в ячейке на решение

- Число частиц в ячейке: 100
- Максимальное значение амплитуды равно 0.29

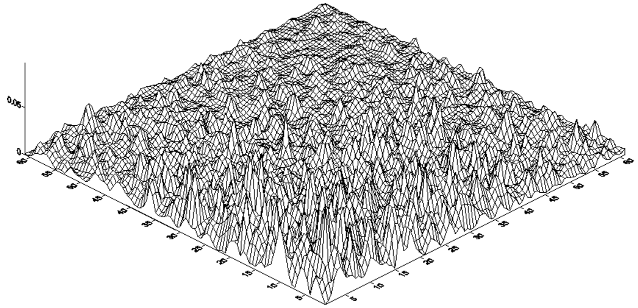




- Число частиц в ячейке: 200
- Максимальное значение амплитуды равно 0.17

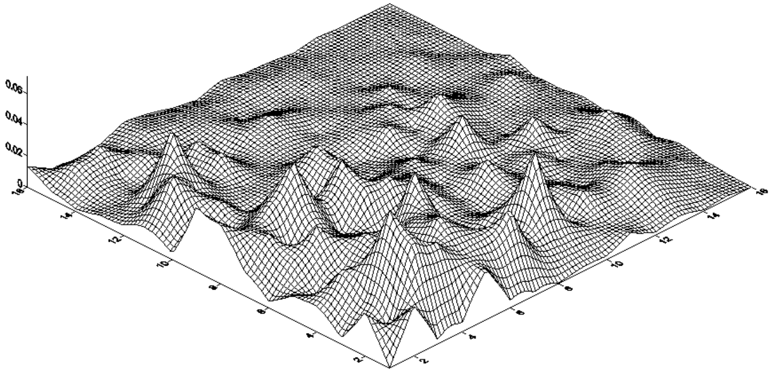


- Число частиц в ячейке: 250
- Максимальное значение амплитуды равно 0.13

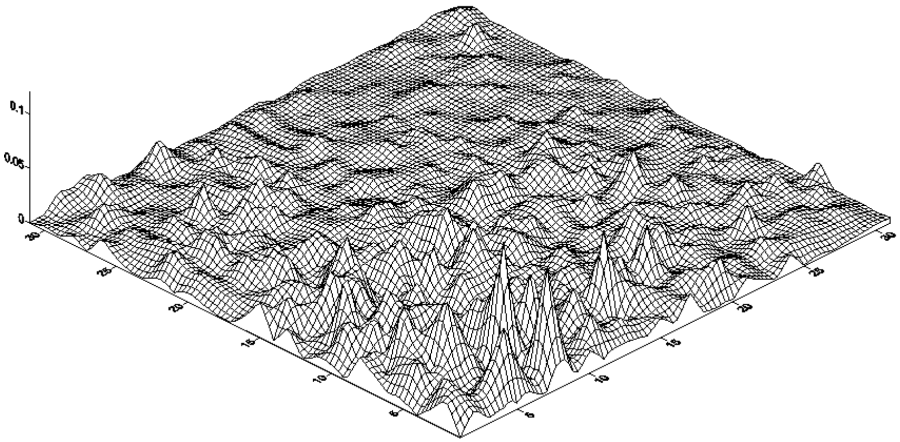


Влияние шага сетки на решение

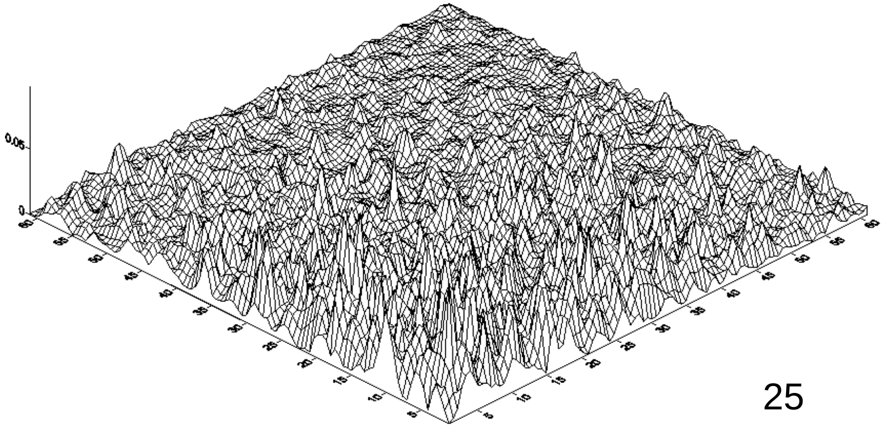
- Размер сетки: 30x30
- Число частиц в ячейке 250
- Максимальное значение амплитуды равно 0.07



- Размер сетки: 60x60
- Число частиц в ячейке 250
- Максимальное значение амплитуды равно 0.135



- Размер сетки: 120x120
- Число частиц в ячейке 250
- Максимальное значение амплитуды равно 0.13



Расчет инкремента нарастания амплитуды поля

$$E \sim e^{\gamma t}, \quad \gamma = \frac{\partial(\ln E)}{\partial t}$$