

Численное решение интегро- дифференциального уравнения КдВБ для моделирования волн в парожидкостных средах

Горбенко Н.И.

**Институт вычислительной
математики математической
геофизики СО РАН**

Новосибирск 2013

КдВБ с интегралом Дюамеля

Релаксационное уравнение Кортевега-де-Вриза-Бюргерса (КдВБ) с сингулярной подынтегральной функцией в правой части:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \gamma p \frac{\partial p}{\partial x} - \sigma \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} = -W \int_0^t \frac{\partial p}{\partial \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \quad (1)$$

Параметры γ, σ, β являются характерными критериями нелинейной дисперсионной волновой динамики с диссипацией, а W характеризует процесс массообмена в волне, обусловленным фазовым переходом первого рода.

Сведение к системе уравнений

Положим $W = 0$ и введем новые переменные $\varphi_x = p, v = \beta p_x, w = v_x - \sigma p_x + \frac{1}{2}\varphi_t - \gamma p^2$ и четырехмерный вектор $\bar{z} = (\varphi, p, v, w)^T$. В результате мы приходим от уравнения (1) к системе уравнений в частных производных первого порядка

$$K\bar{z}_t + L\bar{z}_x = \nabla_z S(\bar{z}), \quad (2)$$

где $S(\bar{z}) = \frac{1}{2\beta}v^2 - pw + \frac{\gamma}{6}p^3$ есть гамильтонова функция, а K и L – матрицы следующего вида:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \sigma & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

При $\sigma = 0$ получается уравнение КдВ и матрицы M, K являются кососимметричными, и в таком случае говорят, что уравнение (2) записано в мультисимплектической форме.

Описание вычислительных схем

Первая схема для (1) $\sigma = 0, W = 0$ была предложена в [7] и привела к открытию солитонов:

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - \frac{\gamma \Delta t}{3\Delta x} (u_{j+1}^n + u_j^n + u_{j-1}^n)(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) - \frac{\beta \Delta t}{\Delta x^3} (u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n).$$

Далее для компактности мы будем записывать схемы с помощью шаблона, который для предыдущей схемы выглядит следующим образом

$$\frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u + \frac{\gamma}{3\Delta x} [1 \ 1 \ 1] u [-1 \ 0 \ 1] u + \frac{\beta}{\Delta x^3} [1 \ -2 \ 0 \ 2 \ -1] u = 0.$$

Несмотря на то, что она достаточно точна, чтобы выявить понятие солитона, при длительных расчетах численные результаты показывают нефизические осцилляции и развал решения, независимо от величины шага по времени.

Разностные схемы (явная)

Явная шеститочечная схема, предложенная в [10]. Здесь I_h^n есть аппроксимация интегрального члена в (1).

$$\frac{1}{2\Delta t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} u + \frac{\gamma}{6\Delta x} [1 \ 1 \ 1]u [-1 \ 0 \ 1]u - \frac{\sigma}{\Delta x^2} [1 \ -2 \ 1]u + \frac{\beta}{2\Delta x^3} [-1 \ 3 \ 0 \ -3 \ 1]u = I_h^n.$$

Здесь при первом шаге по времени используется формула

$$\frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u + \frac{\gamma}{6\Delta x} [1 \ 1 \ 1]u [-1 \ 0 \ 1]u - \frac{\sigma}{\Delta x^2} [1 \ -2 \ 1]u + \frac{\beta}{2\Delta x^3} [-1 \ 3 \ 0 \ -3 \ 1]u = 0.$$

Разностные схемы (неявные)

Первая схема использовалась при моделировании распространения волн в жидкости с пузырьками пара [4].

$$\frac{1}{2\Delta t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{\gamma}{4\Delta x} [-1 \ 1] u^2 - \frac{\sigma}{\Delta x^2} [1 \ -2 \ 1] u + \frac{\beta}{\Delta x^3} [1 \ -2 \ 0 \ 2 \ -1] u.$$

Вторая схема [11] может быть представлена 12-точечной формулой :

$$\begin{aligned} \frac{1}{16\Delta t} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -3 & -2 \end{bmatrix} u + \frac{\gamma}{4\Delta x} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u \right)^2 \\ - \frac{\sigma}{4\Delta x^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} u + \frac{\beta}{4\Delta x^3} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ -2 & 6 & -6 & 2 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} u = I_h^n. \end{aligned}$$

Мы используем 8-точечную конечно-объемную схему для вычисления первого шага по времени.

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\Delta t} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & -3 & -2 \end{bmatrix} u + \frac{\gamma}{2\Delta x} [-1 \ 0 \ 1] \left(\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u \right)^2 \\ - \frac{\sigma}{4\Delta x^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} u + \frac{\beta}{2\Delta x^3} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} u = 0. \end{aligned}$$

Аппроксимация интеграла Дюамеля

Предполагаем, что уравнение (1) интегрируется с постоянным шагом по времени Δt . Так как подинтегральная функция вырождается в момент времени $t_n = n\Delta t$, то мы разобьем наш интеграл на две части, а именно

$$I = \int_{t_0}^{t_{n-m}} \frac{\partial p}{\partial \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t_n - \tau}} + \int_{t_{n-m}}^{t_n} \frac{\partial p}{\partial \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t_n - \tau}}$$

когда момент времени $t = t_n$ достаточно большой. Здесь m положительное целое и $m < n$. Обозначим первую и вторую части интеграла соответственно через $I_1(t_n)$ и $I_2(t_n)$. Для вычисления

$$E_1 = I_1(t_{n+1}) - I_1(t_n) = \int_0^{t_{n+1}-m} \frac{\partial p}{\partial \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t_n - \tau}} - \int_0^{t_{n-m}} \frac{\partial p}{\partial \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t_n - \tau}}$$

мы предлагаем следующую аппроксимацию E_1 с помощью метода левых прямоугольников для первого интеграла и с помощью правых прямоугольников для второго интеграла.

Алгоритм вычисления

1. Выбираем шаг по времени Δt , положительные числа m, l , причем $m \gg l$.

2. На первых $m + l$ шагах вычисляем интеграл по формулам

$$\begin{aligned}\tilde{E}_2 &= \sum_{k=n+1-m}^{n-l} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\partial p}{\partial \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t_{n+1}t - \tau}} \\ &= 2\sqrt{\Delta t} \left(\frac{1}{2\sqrt{m}} \left(\frac{\partial p}{\partial \tau} \right)_{n+1-m} + \sum_{k=0}^{n-m} \frac{1}{\sqrt{n+1-k}} \left(\frac{\partial p}{\partial \tau} \right)_k + \frac{1}{2\sqrt{l}} \left(\frac{\partial p}{\partial \tau} \right)_{n+1-l} \right)\end{aligned}$$

$$\tilde{E}_3 = \frac{1}{\Delta t} \left(\sum_{j=n+1-l}^{n+1} C_j^1 \left(t_j \frac{\partial p}{\partial t}(t_{j-1}) - t_{j-1} \frac{\partial p}{\partial t}(t_j) \right) + C_j^2 \left(\frac{\partial p}{\partial t}(t_j) - \frac{\partial p}{\partial t}(t_{j-1}) \right) \right),$$

где коэффициенты C_j^1, C_j^2 вычисляются интегрированием

$$C_j^1 = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{d\tau}{\sqrt{t_{n+1}t - \tau}}, \quad C_j^2 = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{\tau d\tau}{\sqrt{t_{n+1}t - \tau}}.$$

и запоминаем все данные.

продолжение

3. Когда $n > m + 1$ мы используем алгоритм для вычисления y_{n+1} , при котором интеграл разбивается на две части. Первая часть вычисляется по итеративной формуле

$$I_1^{n+1} = I_1^n + 2\sqrt{\Delta t} \left(\frac{\partial p}{\partial \tau} \right)_0 [\sqrt{n+1} - \sqrt{n}],$$

а вторую часть мы вычисляем по формулам из пункта 2.

Следовательно, для вычисления интеграла нам требуется фиксированное количество памяти, необходимое для запоминания $m + l + 1$ векторов.

Ошибка дискретизации алгоритма для приближенного вычисления интеграла Дюамеля имеет вид

$$E \leq 2\Delta t^{1.5} M_1 (\sqrt{n+1} - \sqrt{m}) + \Delta t^3 \frac{(m-l)M_2}{12} + \frac{(\Delta t)^2 M_3}{8} \int_{t_{n+1-l}}^{t_{n+1}} \frac{d\tau}{\sqrt{t_{n+1} - \tau}}$$

Численные эксперименты

Двухсолитонная волна (аналитическое решение):

$$u(x, t) = 2 \frac{K_1 + K_2}{(1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + a^2 e^{\theta_1 + \theta_2})^2}, \quad (18)$$

$$K_1 = k_1^2 e^{\theta_1} + k_2^2 e^{\theta_2} + 2(k_2 - k_1)^2 e^{\theta_1 + \theta_2}, K_2 = a^2 (k_2^2 e^{\theta_1} + k_1^2 e^{\theta_2}) e^{\theta_1 + \theta_2},$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 1.5, \quad a^2 = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 = \frac{1}{25}, \quad \eta = 0.0013020833,$$

$$\theta_1 = k_1 \frac{x}{\sqrt{6\eta}} - k_1^3 \frac{t}{6^{3/2} \sqrt{\eta}} - 3, \quad \theta_2 = k_2 \frac{x}{\sqrt{6\eta}} - k_2^3 \frac{t}{6^{3/2} \sqrt{\eta}} + 3.$$

Рассматриваем уравнение (1) с $\sigma = w = 0$ на отрезке $[-40, 40]$ с периодическими граничными условиями и начальными данными (22) для $t = 0$. Сеточная область содержит 500 узлов ($h = 0.016$) с отношением $\frac{\tau}{h} = 0.005$ для явных схем и $\frac{\tau}{h} = 0.5$ для неявных.

Численные эксперименты

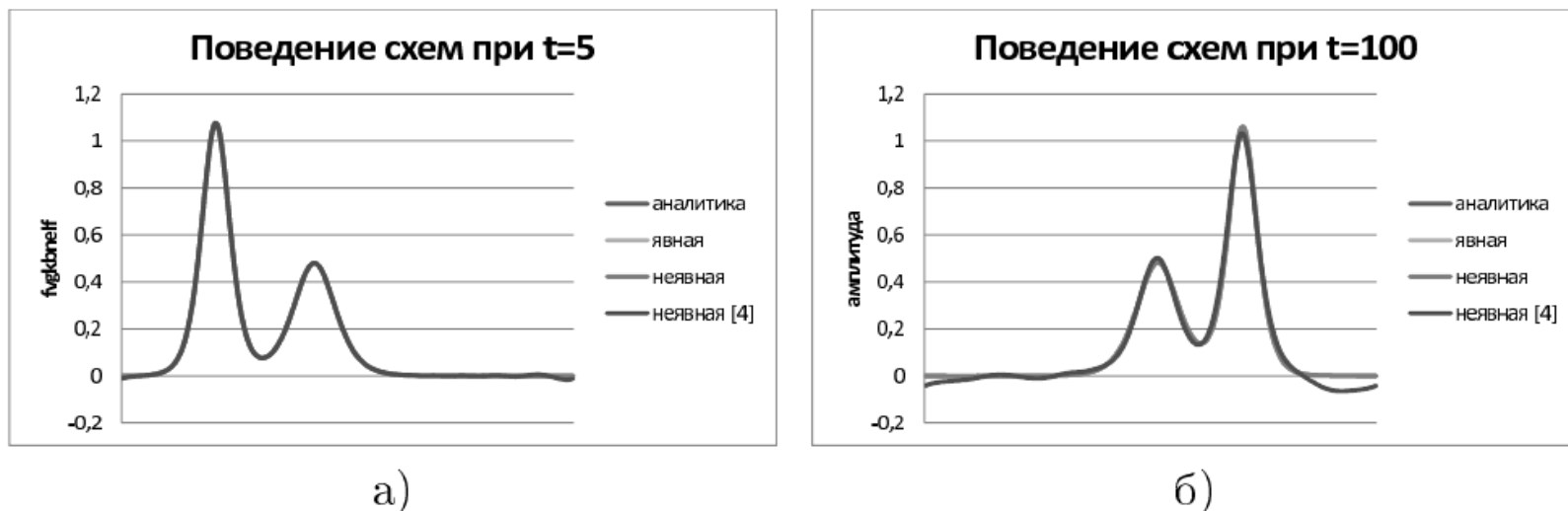


Рис. 1: Результаты решения модельной двухсолитонной задачи

На каждом из рисунков приведены точные решения, а также численные решения модельной задачи для уравнения с $\gamma = \beta = 1$ для моментов времени $t=5$ и $t=100$ соответственно по явной и неявной мультисимплектическим схемам, а также по неявной схеме [4]. Как наглядно видно мультисимплектические схемы дают хорошую точность, в то время как неявная схема имеет небольшую погрешность на концах отрезка при $t=5$, которая существенно увеличивается при $t=100$. Экспериментальные данные с различными сеточными шагами подтверждают второй порядок сходимости и действительно высокую устойчивость.

Численные эксперименты

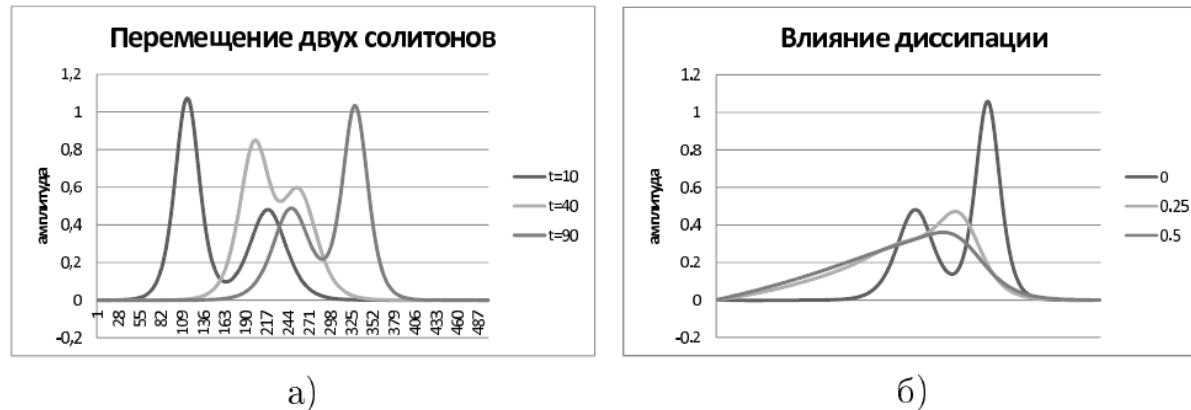


Рис. 1: Динамика взаимодействия двух солитонов: а) в разные моменты времени без диссипации; б) влияние диссипации при $t=100$

На рис. 2а приведены результаты расчетов взаимодействия двух солитонов без диссипации для этого же тестового примера. По конфигурации решений видно как солитон с большей амплитудой обгоняет солитон с низкой амплитудой. На рис. 2б показаны решения при $t=100$ для разных значений диссипативного коэффициента $\sigma = 0, 0.25, 0.5$ демонстрирующие естественный эффект расширения солитонов описываемых уравнением КдВБ с ростом диссипации.

Численные эксперименты

Второй цикл экспериментов был выполнен для уравнения (1) с нулевыми начальными данными для того чтобы продемонстрировать влияние интегрального члена и вязкости. На левой границе ставилось условие Дирихле вида

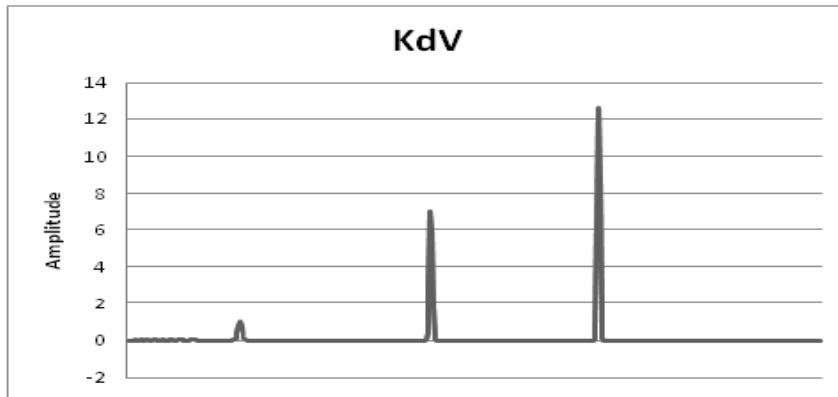
$$p(t, 0) = \begin{cases} p_0 \frac{t}{t_0}, 0 < t < t_1 \\ p_0 \frac{1-(t-t_1)}{t_2}, t_1 < t < t_2 \\ 0, t > t_2 \end{cases}$$

Все вычисления были проведены при следующих данных:

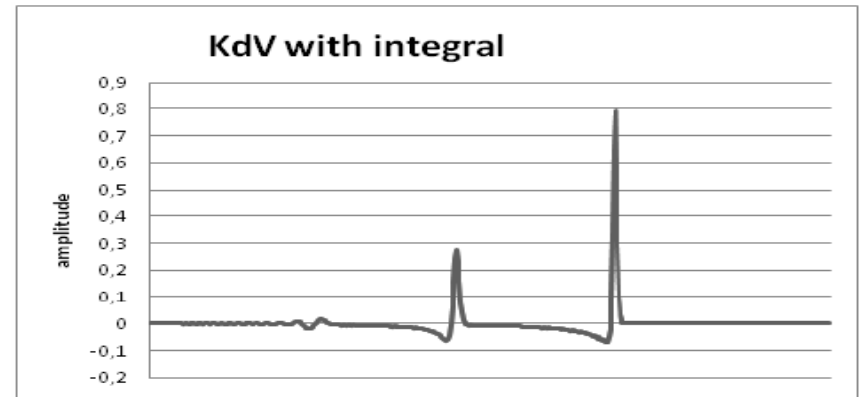
$$\begin{aligned} x \in [0, 44], \tau = 0.0002, h = 0.008, w = 0.25, \gamma = 0, \\ \beta = 10^{-6}, \nu = 10^{-2}, p_0 = 10, t_1 = 0.01, t_2 = 0.025, \\ T = 10. \end{aligned}$$

На Рис.3-Рис.4 показаны следующие численные результаты: KdV уравнение ($\nu = w = 0$), KdV уравнение с интегральным членом ($\nu = 0, w = 0.25$), KdV-Бюргерса уравнение с вязкостью и интегральным членом ($\nu = 10^{-2}, w = 0.25$), KdV-Бюргерса уравнение без интегрального члена ($\nu = 10^{-2}, w = 0$). Можно видеть, что рассмотренные задачи имеют различное волновое поведение.

Численные эксперименты

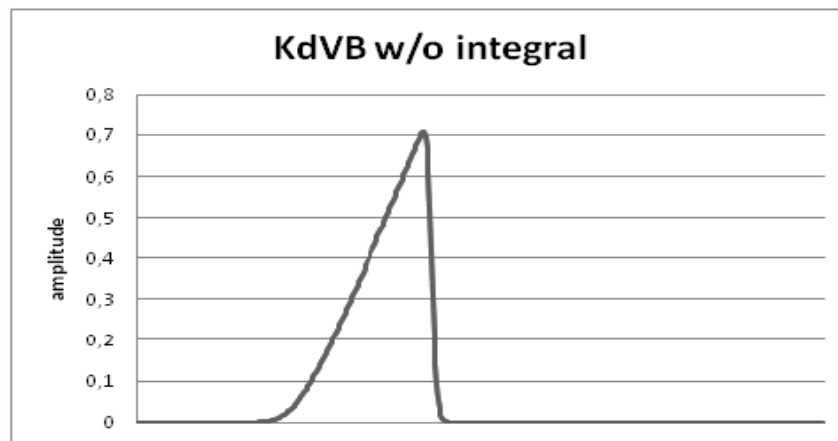


а)

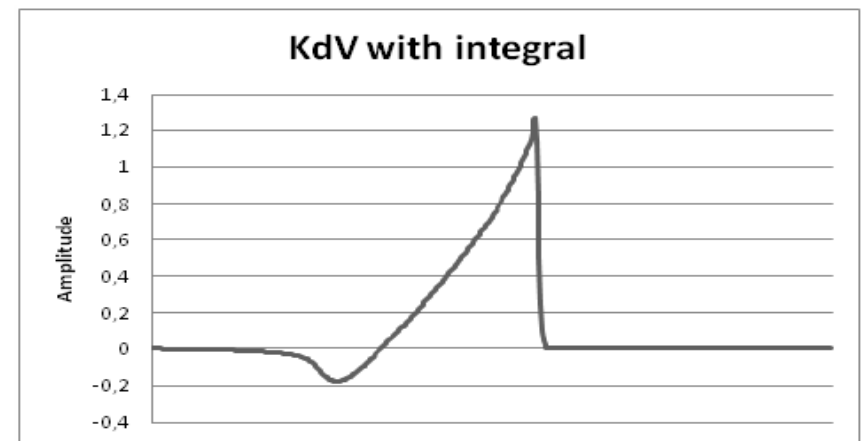


б)

Рис. 2: Численное решение при $t=10$, $\nu = 0$ а) $w = 0$, б) $w = 0.25$



а)



б)

Рис. 3: Численное решение при $t=10$, $\nu = 0.01$ а) $w = 0$, б) $w = 0.25$

Литература

4. Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р. Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. М.: Энергоатомиздат, 1990.
7. Zabusky N.J., Kruskal M.D. Interaction of 'soliton' in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. Phys. Rev. 15, 1965, 240-243.
10. Wang Y.S., Wang B., Chen X. An explicit scheme for the KdV equation. Chinese Phys., Lett., 25, 2008, 2335.
11. Zhao P.F., Qin M.Z. Multisymplectic geometry and multisymplectic Preissmann scheme for the KdV equation. J. Phys. A, 33(18), 2000, 3613-3626.

Спасибо за внимание