

Абрау-Дюрсо, сентябрь 2013

Компактные разностные схемы для уравнений диффузии и Шредингера

В.А.Гордин, Е.А.Цымбалов

Высшая школа экономики, Гидрометцентр России (Москва)

Дискретизации по времени задачи Коши для однородного эволюционного дифференциального уравнения $d_t U = AU$ - явные и неявные разностные схемы - имеют вид

$$P_0[\tau A_h]U^{n+1} + P_1[\tau A_h]U^n + \dots + P_n[\tau A_h]U^0 = 0,$$

где P_j - многочлены, A_h - разностная аппроксимация пространственного оператора A , h - шаг сетки по пространственным переменным, могут классифицироваться степенями d_j многочленов P_j , n - слойность схемы. Схема явная, если $P_0 = E$.

Коэффициенты многочленов P_j определяются из условия аппроксимации:

$$P_0[\tau A_h] \exp[\tau n A_h] + P_1[\tau A_h] \exp[\tau(n-1)A_h] + \dots + P_n[\tau A_h] E = O(\tau^{N+1}); \tau \rightarrow 0,$$

или

$$P_0[z] \exp[nz] + P_1[z] \exp[(n-1)z] + \dots + P_n[z] = O(z^{N+1}); z \rightarrow 0.$$

Устойчивость схемы определяется по A_h, τ, h . Простейшие примеры:

Схема	n	d_j	Многочлены	N
Явная Эйлера	1	0, 1	$P_0(z) = 1, P_1(z) = -(1+z)$	1
Неявная Эйлера	1	1, 0	$P_0(z) = (1-z), P_1(z) = -1$	1
Неявная Кранка - Николсон	1	1, 1	$P_0(z) = (1-z/2), P_1(z) = -(1+z/2)$	2
Явная двухслойная leap-frog	2	0,1,0	$P_0(z) = 1, P_1(z) = -z, P_2(z) = -1$	2

N1. Разнообразие схем может быть увеличено, если многочлены P_j могут зависеть еще от одного аргумента: оператора осреднения $Z = [T_{-h} + T_h] / 2$, где T_h - оператор сдвига аргумента функции на шаг сетки. И это один из путей к построению компактных схем.

N2. При $n > 1$ для разностной схемы требуется больше начальных условий, чем для исходного дифференциального уравнения. Требуются специальные алгоритмы формирования этих дополнительных начальных полей, чтобы из-за этого не потерять порядок аппроксимации по времени.

Алгоритм построения **КОМПАКТНЫХ СХЕМ** (иногда их называют **схемами Нумерова**) основан на совместной аппроксимации оператора и по времени, и пространству, что часто позволяет повысить порядок аппроксимации.

Сначала задается шаблон схемы. Затем задаются тестовые функции – пары: $u_{k,m} = t^k x^m$, $f_{k,m} = \partial_t u_{k,m} - Au_{k,m}$. Для неэволюционных задач слагаемое $\partial_t u_{k,m}$ отбрасываем. Потребуем, чтобы однослойная (она связывает значения функций u и f в два соседних момента времени) разностная схема в точке была точна для некоторого набора тестовых функций.

$$\sum_{i \in S(0,u)} \alpha_j^0 u_{k,m}(t_{n+1}, x_{j+i}) + \sum_{i \in S(1,u)} \alpha_j^1 u_{k,m}(t_n, x_{j+i}) = \sum_{i \in S(0,f)} \beta_j^0 f_{k,m}(t_{n+1}, x_{j+i}) + \sum_{i \in S(1,f)} \beta_j^1 f_{k,m}(t_n, x_{j+i})$$

Примеры будем рассматривать для двух важных классов уравнений: **диффузии (теплопроводности)** $\partial_t u = D \partial_x^2 u + f$ и **Шрёдингера** $\partial_t u = iD \partial_x^2 u + f$.

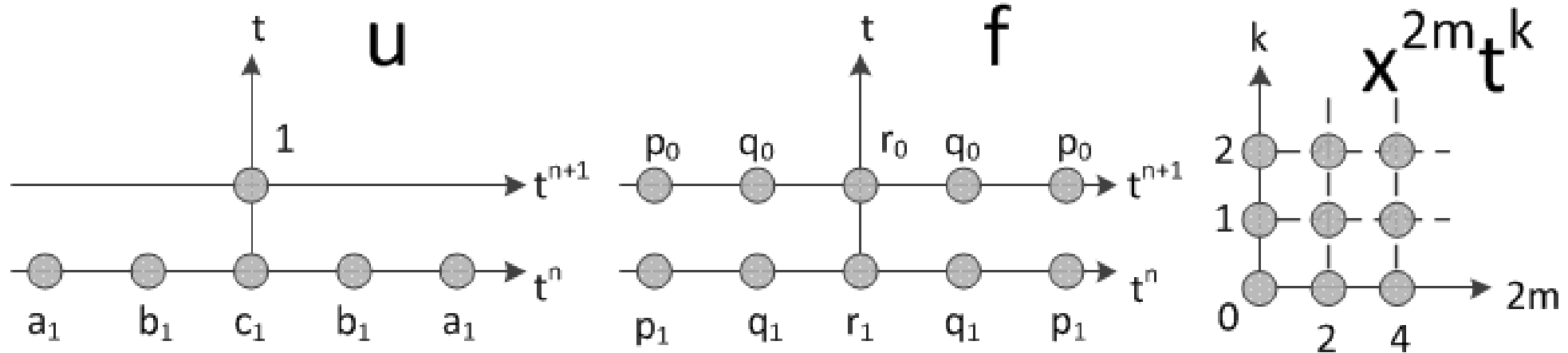
Затем будут рассмотрены двухслойные схемы

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in S(0,u)} \alpha_j^0 u(t_{n+2}, x_{j+i}) + \sum_{i \in S(1,u)} \alpha_j^1 u(t_{n+1}, x_{j+i}) + \sum_{i \in S(2,u)} \alpha_j^2 u(t_n, x_{j+i}) = \\ & = \sum_{i \in S(0,f)} \beta_j^0 f(t_{n+2}, x_{j+i}) + \sum_{i \in S(1,f)} \beta_j^1 f(t_{n+1}, x_{j+i}) + \sum_{i \in S(2,f)} \beta_j^2 f(t_n, x_{j+i}). \end{aligned}$$

<u>диагонали</u>	Однослойная	Двухслойная
3		
5		Эксперименты не проводились
1 - Явная		

Явная однослойная компактная схема.

Выберем 5-точечные шаблоны для функций u и f . Коэффициенты определим из условий точности на тестовых функциях, перечисленных на диаграмме Ньютона



$$a_0 = -\frac{\nu(6\nu - 1)}{12}; b_0 = \frac{2\nu(3\nu - 2)}{3}; c_0 = -(2\nu - 1)(3\nu - 1); p_0 = p_1 = \frac{\tau\nu(6\nu - 1)}{48},$$

$$q_0 = q_1 = -\frac{\tau\nu(3\nu - 2)}{6}; r_0 = r_1 = \frac{\tau}{2} + \frac{3\tau\nu^2}{4} - \frac{5\tau\nu}{8},$$

где параметр (число) Куранта $\nu = \tau Dh^{-2}$ или $\nu = i\tau Dh^{-2}$, соответственно.

Н.3. При сокращении шаблона в момент t^n до 3 узлов не можем получить схему 4-го порядка.

Условие устойчивости такой схемы для уравнения диффузии: $\nu \leq 47 / 66$.

Для сравнения: **явная схема Эйлера**; уравнение однородное

$$u^{n+1} = u^n + \tau A_h u^n,$$

где A_h - разностная аппроксимация оператора только по переменной x . Можно рассмотреть две версии аппроксимации, **трех-** и **пяти-точечную**:

$$A_{h,3}u = h^{-2} [u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}], \quad A_{h,5}u = h^{-2} \left[\frac{1}{12}u_{j-2} - \frac{4}{3}u_{j-1} - \frac{5}{3}u_j - \frac{4}{3}u_{j+1} + \frac{1}{12}u_{j+2} \right].$$

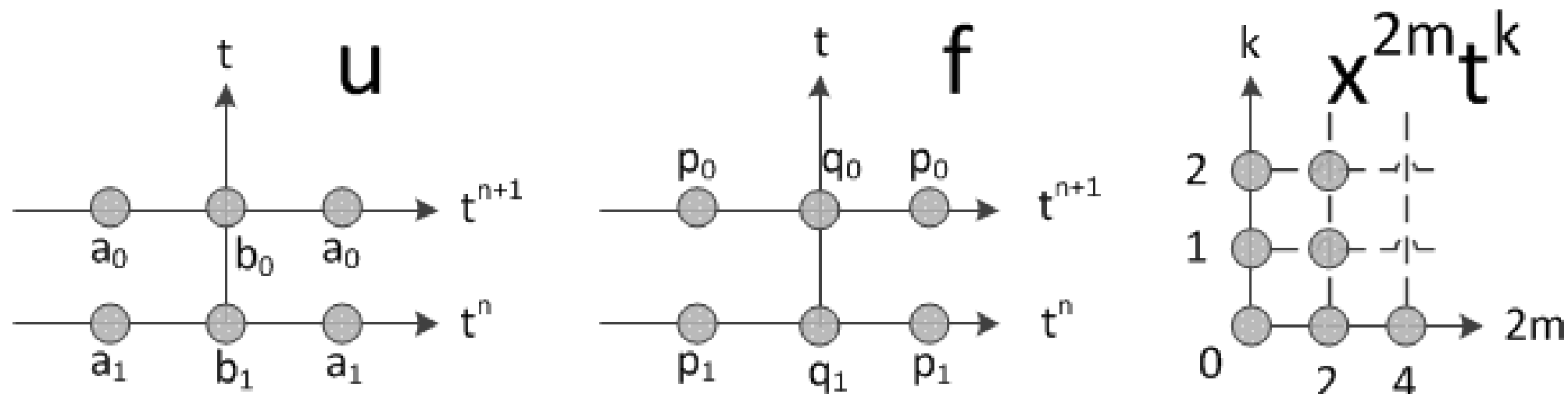
Условие устойчивости схемы Эйлера для $A_{h,3}$: $\nu \leq 1/2$, для $A_{h,5}$: $\nu \leq 3/8$.

Для уравнения Шрёдингера все эти схемы абсолютно неустойчивы.

Однако самое важное преимущество компактной схемы не расширение пределов устойчивости, а лучшая точность приближенного решения.

Неявная однослойная схема абсолютно устойчива

Для обращения трехдиагональной матрицы в одномерном случае используется метод прогонки. Количество арифметических операций на одном шаге по времени прямо пропорционально количеству узлов сетки.



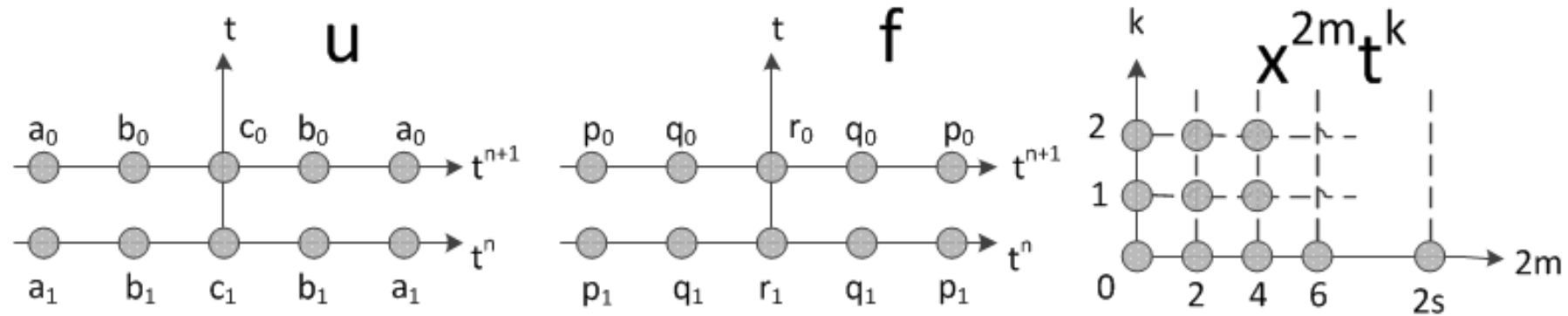
Компактная схема в общем виде:

$$a_0(u_{-h,\tau} + u_{h,\tau}) + b_0 u_{0,\tau} + a_1(u_{-h,0} + u_{h,0}) + b_1 u_{0,0} = p_0(f_{-h,\tau} + f_{h,\tau}) + q_0 f_{0,\tau} + p_1(f_{-h,0} + f_{h,0}) + q_1 f_{0,0}$$

а ее коэффициенты (и для диффузии, и для Шрёдингера) получаются из системы линейных алгебраических уравнений:

$$a_0 = 2(6\nu - 1); a_1 = 2(6\nu + 1); b_0 = -4(6\nu + 5); b_1 = -4(6\nu - 5); \quad p_0 = p_1 = -\tau; q_0 = q_1 = -10\tau.$$

Неявная однослойная схема на пятиточечном шаблоне абсолютно устойчива



Общий вид компактной неявной однослойной схемы на таких шаблонах по одной из приведенных диаграмм Ньютона имеет вид

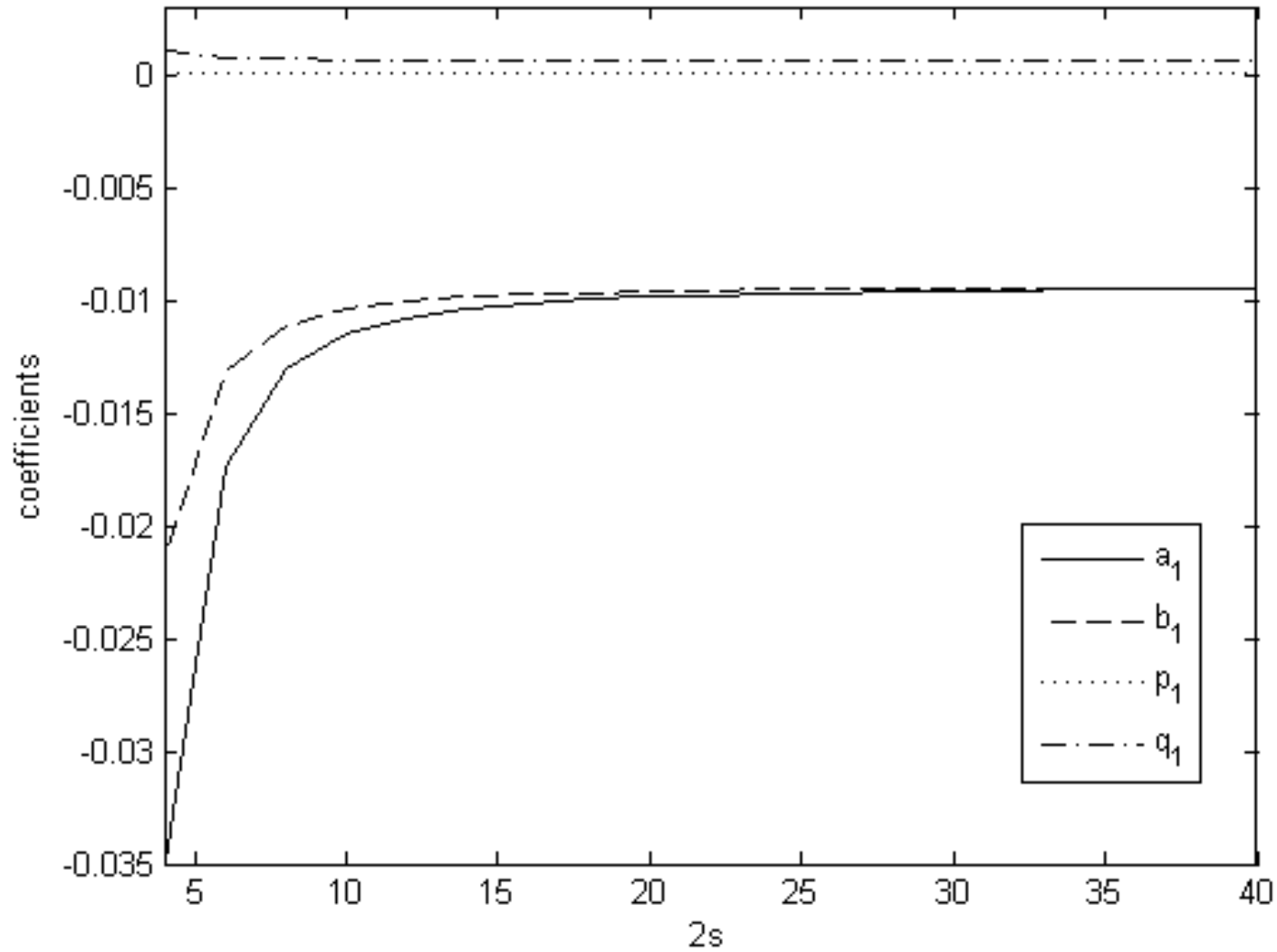
$$a_0(u_{-2h,0} + u_{2h,0}) + b_0(u_{-h,0} + u_{h,0}) + c_0 u_{0,0} + a_1(u_{-2h,\tau} + u_{2h,\tau}) + b_1(u_{-h,\tau} + u_{h,\tau}) + c_1 u_{0,\tau} = p_0(f_{-2h,0} + f_{2h,0}) + q_0(f_{-h,0} + f_{h,0}) + r_0 f_{0,0} + p_1(f_{-2h,\tau} + f_{2h,\tau}) + q_1(f_{-h,\tau} + f_{h,\tau}) + r_1 f_{0,\tau}.$$

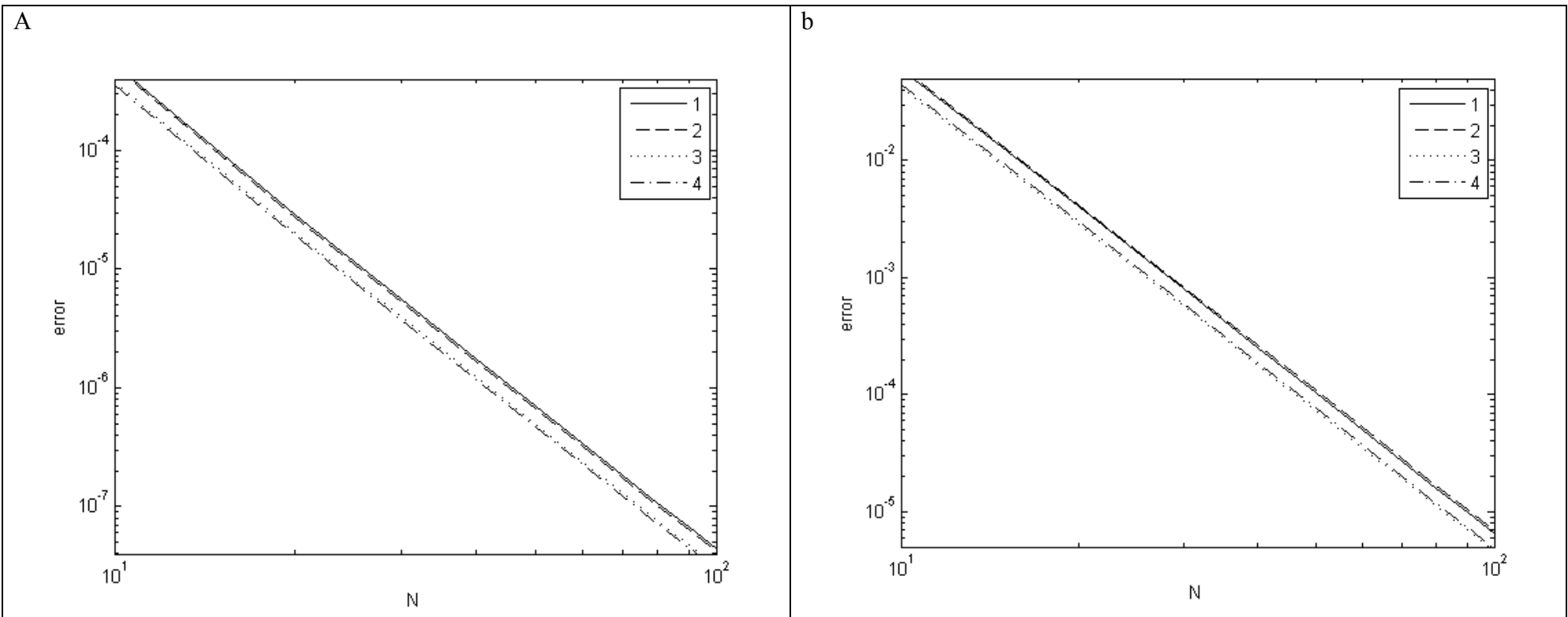
Эти схемы абсолютно устойчивы, а для Шрёдингера еще и недиссипативны. Формулы для коэффициентов получены, но они весьма громоздки. Вот они при $s=4$:

$$a_0 = -\frac{13402}{477(265\nu + 262)} - \frac{31}{318}; a_1 = \frac{10964}{477(265\nu + 262)} - \frac{31}{318}; c_0 = 1; c_1 = 1 - \frac{524}{265\nu + 262}; p_0 = p_1 = \frac{23\tau}{18(265\nu + 262)};$$

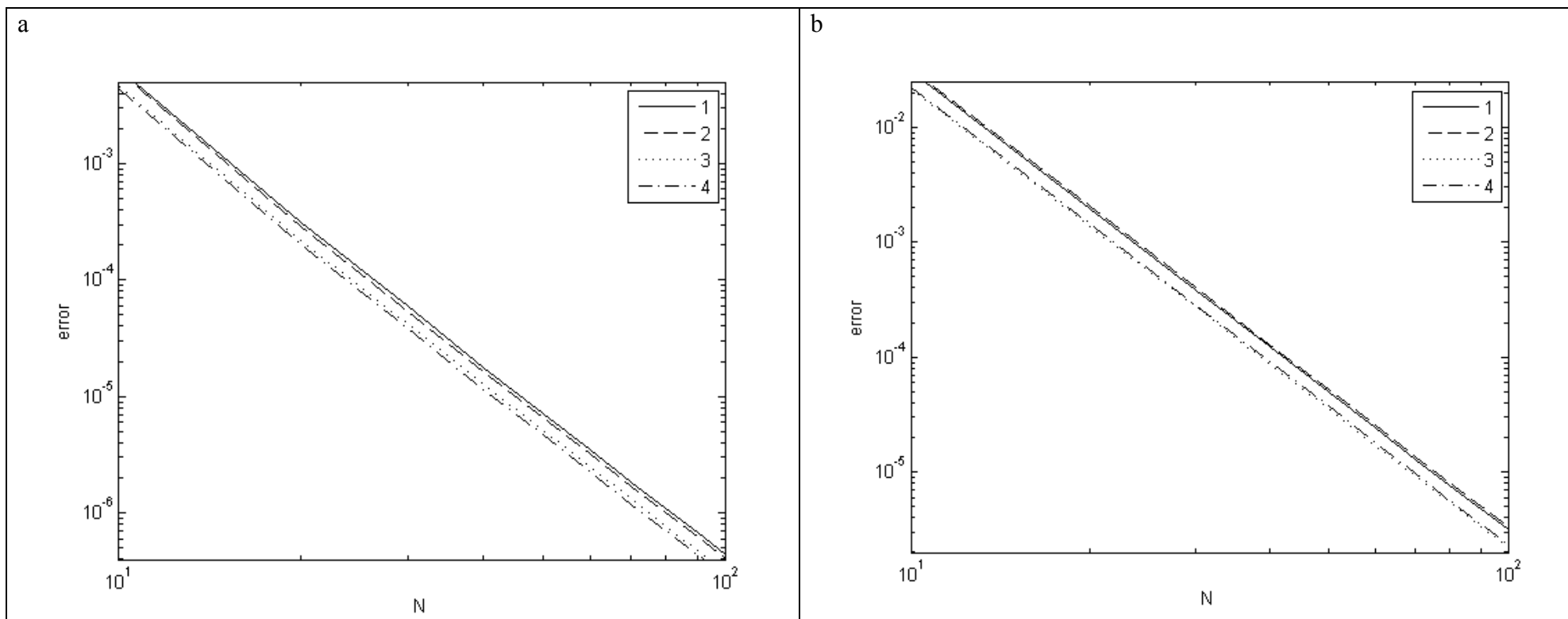
$$b_0 = \frac{86768}{477(265\nu + 262)} - \frac{64}{159}; b_1 = \frac{13840}{477(265\nu + 262)} - \frac{64}{159}; q_0 = q_1 = \frac{344\tau}{9(265\nu + 262)}; r_0 = r_1 = \frac{131\tau}{265\nu + 262}.$$

Коэффициенты эти весьма близки для разных значений дискретного параметра s .
Зависимость коэффициентов от «внешнего» параметра s представлена на графике





Ошибки неявных компактных схем, 3-точечной и 5-точечной при $s = 4$ в нормах C и L^2 для уравнения диффузии при $\nu = 1$, $T = 10$, $D = 1$ на эталонном решении а) Однородное уравнение $u(0, x) = \cos(x)$, $f(t, x) \equiv 0$; б) Неоднородн: $u(t, x) = \cos(x)\sin(t)$, $f(t, x) = \cos(x)[\cos(t) + D\sin(t)]$
 5-точечная схема оказалась точнее, но она дороже. Что эффективнее?



То же для Шрёдингера: $\nu = i$, $T = 5$, $D = i$ а) Однородное уравнение для $u(0, x) = \cos(x)$, $f(t, x) \equiv 0$; б) Неоднородное уравнение для $u(t, x) = \cos(x)\sin(t)$, $f(t, x) = \cos(x)[\cos(t) + iD\sin(t)]$. Выводы те же.

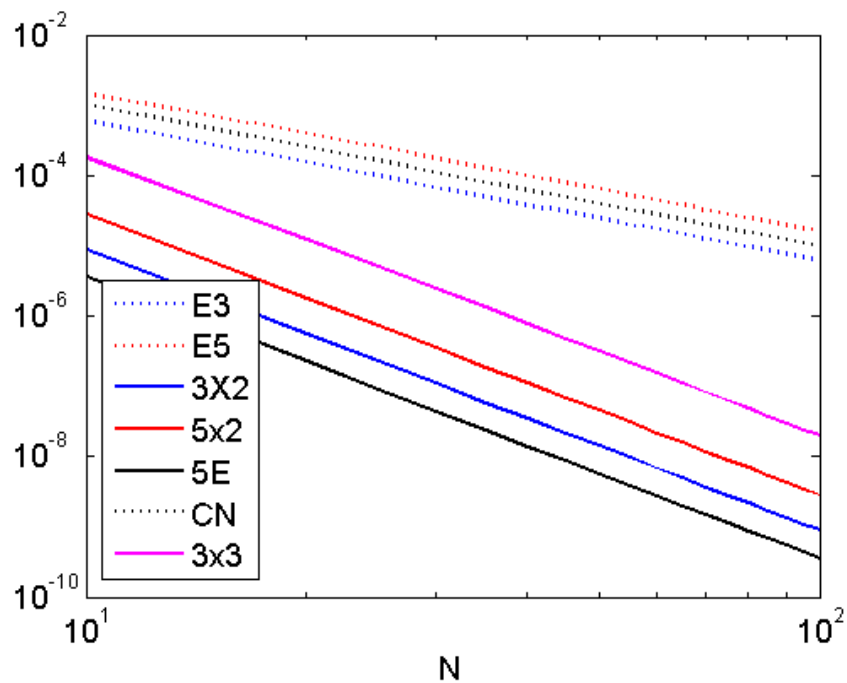
Далее тестировать будем на решениях с ограниченной гладкостью, так как от порядка гладкости зависит и оценка качества схем.

Альтернативный вариант: оценивать равномерно по волновому числу ω .

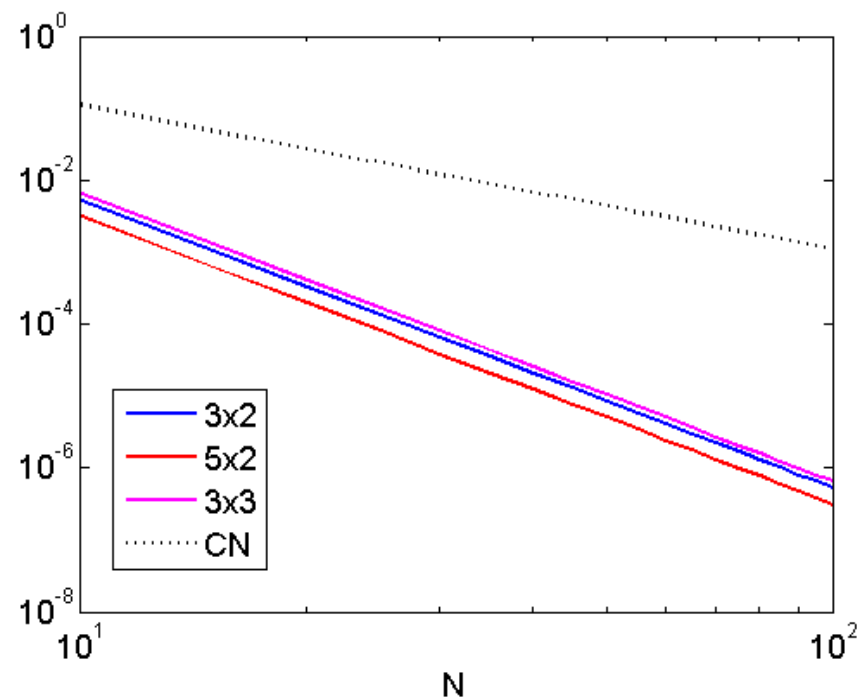
Компактные схемы сравним с классической неявной схемой второго порядка Кранка – Николсон

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \left\{ Dh^{-2} \left[u_{j-1}^{n+1} + u_{j-1}^n - 2(u_j^{n+1} + u_j^n) + u_{j+1}^{n+1} + u_{j+1}^n \right] + f_j^{n+1} + f_j^n \right\} / 2.$$

Неявная схема Кранка – Николсон конкурирует с неявными компактными схемами (см. ниже) на 3- и 5-точечном шаблонах. Все три схемы абсолютно устойчивы и для диффузии, и для Шрёдингера. Первый эксперимент с ними проводился для $\nu = 0,27$ при $x \in [0, 2\pi]$, $u(t, x) = \exp(-Dt) \cos(x)$, $f \equiv 0$. Граничные условия периодические, интегрирование на срок $T=10$ при $D=1$. При уменьшении шагов по времени и пространству погрешность L^2 (в норме С картинки аналогичны) уменьшается, но с разным порядком. Этот и следующие графики приводим в двояко-логарифмической системе координат.



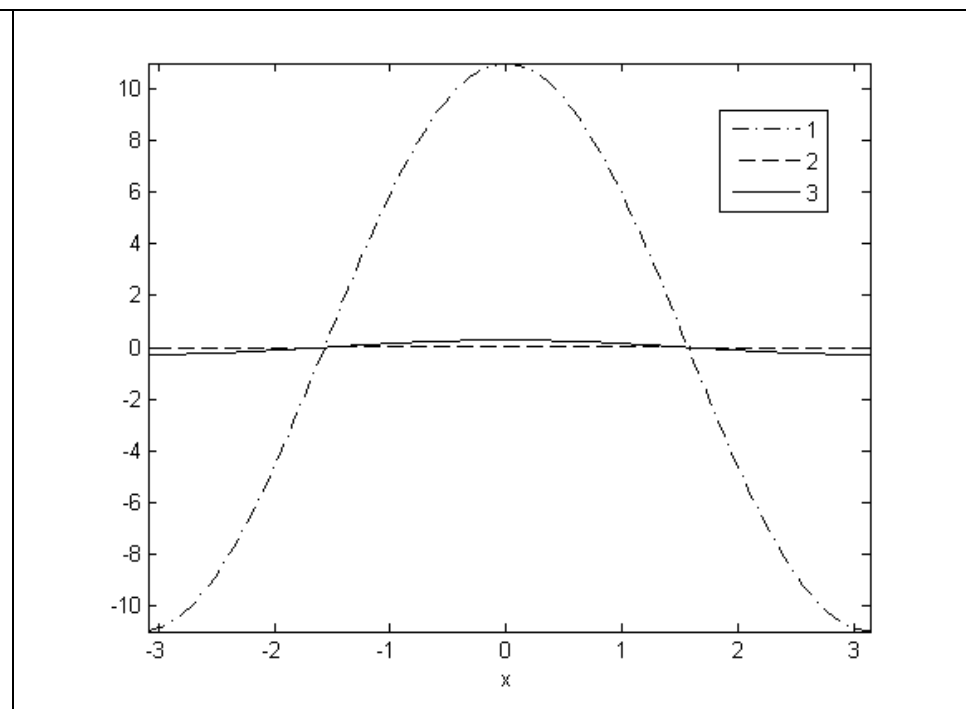
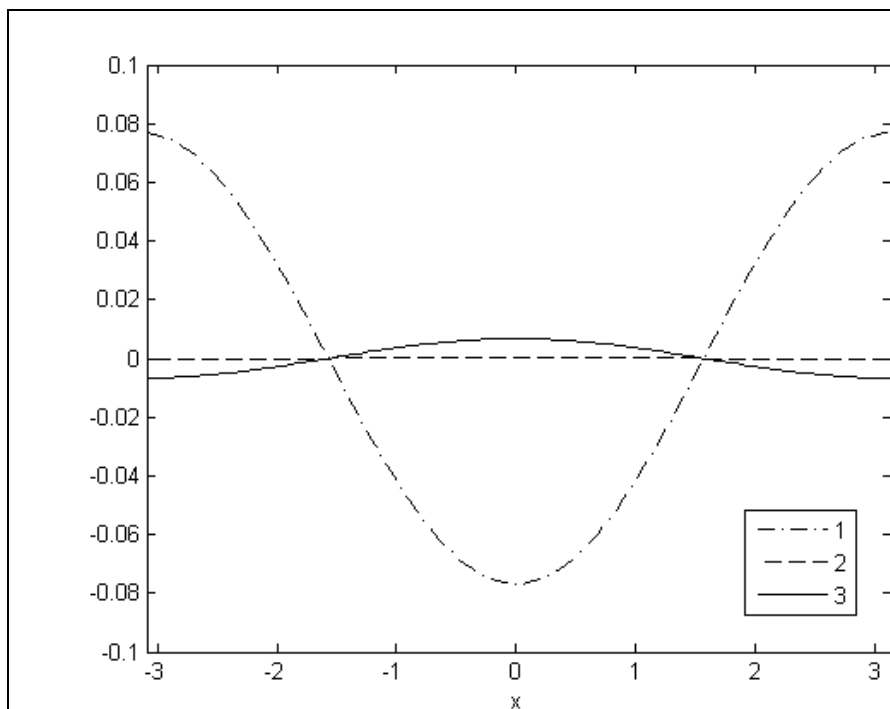
Интегрирование уравнения диффузии



Интегрирование уравнения Шрёдингера

Зависимость от числа узлов N по переменной x погрешности интегрирования однородного уравнения диффузии и Шрёдингера на период $T = 10$, $D=1$. Вначале $u(0, x) = \cos(x) \Rightarrow u(t, x) = \cos(x) \exp(-t)$ или $u(t, x) = \cos(x) \exp(-it)$. Очевидны второй и четвертый порядки сходимости, соответственно. Шкала билогарифмическая.

Более точные порядки сходимости - согласно эксперименту		Euler-3	Euler-5	5CompEx	C.Imp3x2	C.Imp 5x2	C-N
	C диффуз	2.0019	1.9679	4.0286	3.9915	4.0077	2.0249
	C Шрёд	*	*	*	3.9983	3.9972	2.0034
	L^2 диффуз	2.0019	1.9679	4.0286	3.9915	4.0077	2.0249
L^2 Шрёд	*	*	*	3.9983	3.9972	2.0034	



Пример точного решения и умноженных на 10^4 погрешностей схемы Кр.-Ник. и неявной однослойной компактной схемы при числе точек сетки $N=120$. Слева однородное уравнение диффузии, справа вещественные части решения и погрешности для Шрёдингера. Погрешность компактной схемы много меньше.

Стандартный подход к оптимизации явных схем по параметрам: выбрать параметр Куранта, близкий к пределу по устойчивости. Затем одновременно выбирается количество шагов по времени и пространству. Такова явная схема Эйлера (3- и, как правило, 5- точечная). Если же решать задачу о минимизации погрешности компактной схемы при заданном количестве арифметических операций, ответ может получиться иным – по параметру Куранта схему нужно оптимизировать.

Для экспериментов выберем периодические граничные условия с возможным **изломом решения на краю**. Результат зависит от класса гладкости решения и правой части.

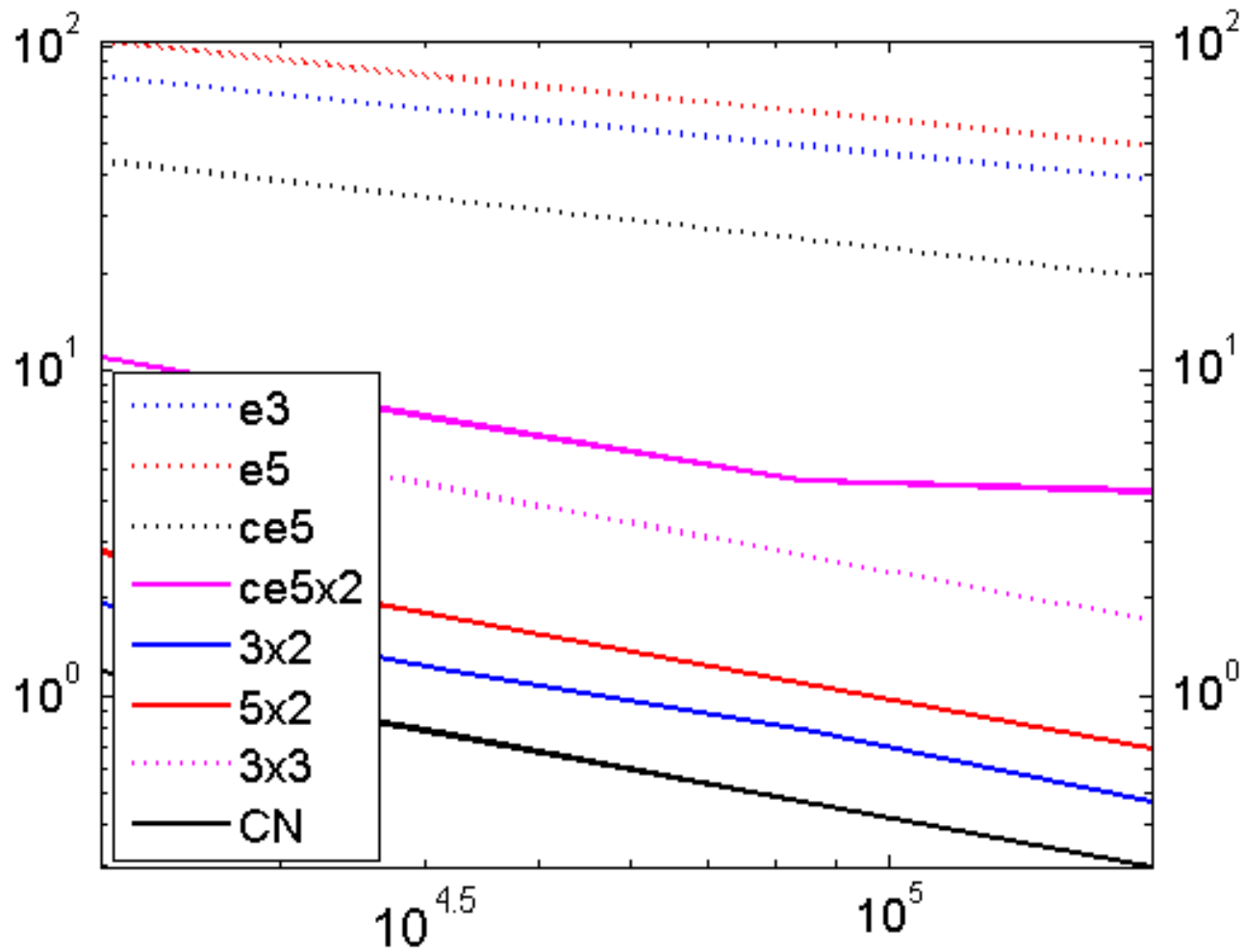
Для заданного количества арифметических операций для данной схемы и заданных класса гладкости решения и времени T интегрирования задачи Коши, стоит выбрать оптимальное соотношение переменных M, N – чисел шагов по пространству и времени.

Норма погрешности разностного решения $E=E(t)$, (помимо прочих входных параметров) зависит от числа арифметических операций C . Будем говорить, что **порядок эффективности разностной схемы** равен $d>0$, если при $C \rightarrow \infty$ выполняется следующая асимптотическая оценка: $E = O(C^{-d})$. Предполагается, что остальные параметры выбраны наилучшим образом, чтобы обеспечить минимальное значение E . Например, оптимально выбрано соотношение между разбиениями по переменным x и t . Наилучший параметр Куранта схемы ν может зависеть от числа C .

Эффективность зависит от эталонного решения (в первую очередь, от его непрерывности и гладкости) и от момента T , в который численное разностное решение сравнивается с эталонным. Может влиять на ответ и конкретный выбор нормы в пространстве функций.

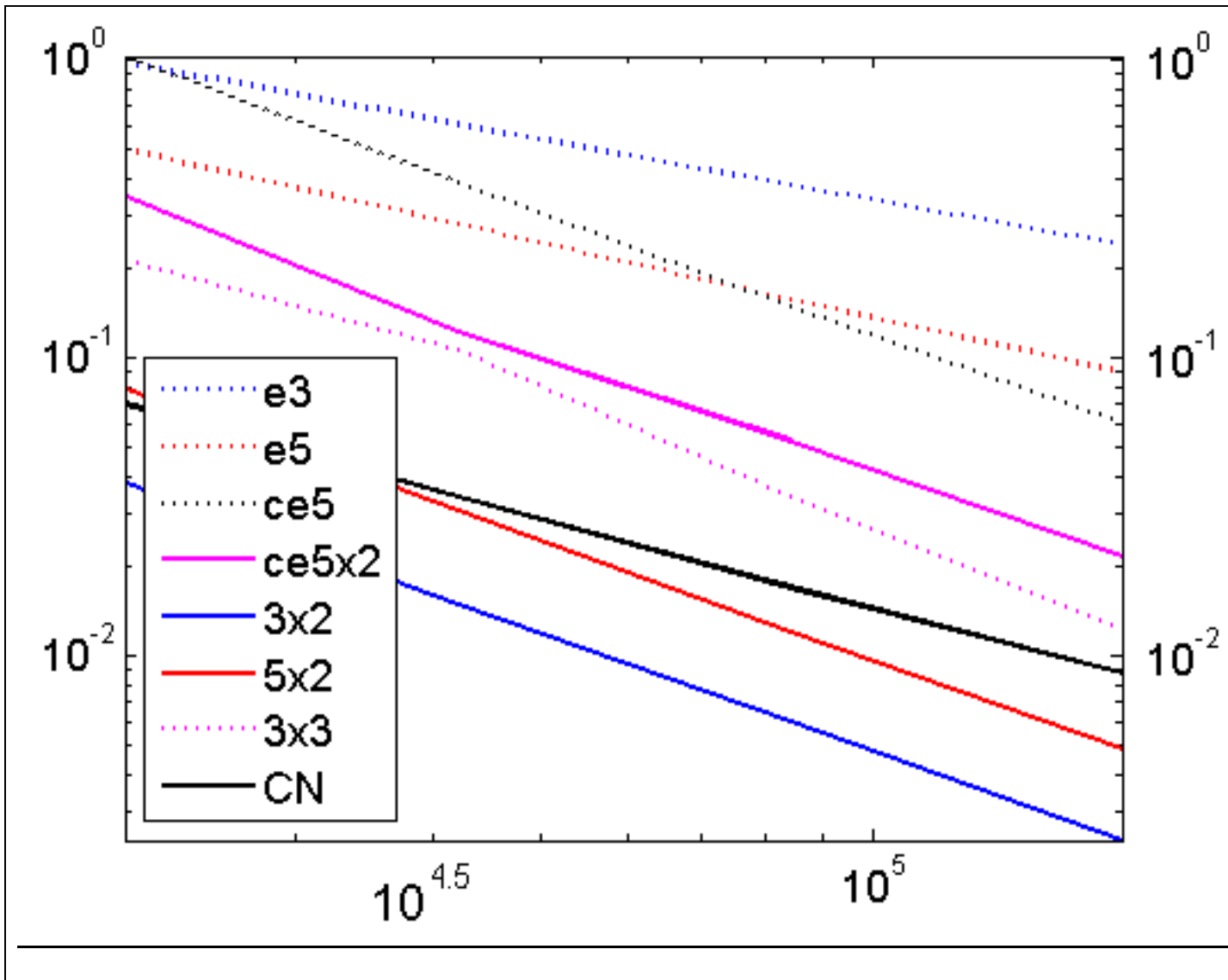
Оценим погрешность решения уравнения диффузии на эталонах:

$u_k^*(t, x) = \sin(t) \sin^k(x) \exp(x)$, $f_k^*(t, x) = \left[\partial_t - D \partial_x^2 \right] u_k^*(t, x)$, $k=2$, $t=T = 3\pi / 2$. Правая часть имеет разрыв на краю отрезка. Ниже C – количество умножений и делений, используемое схемой для интегрирования уравнения диффузии.



Погрешность схем в зависимости от количества умножений и делений S . Параметр Куранта $\nu = \nu(S)$ подбираем оптимальным для каждой схемы отдельно.

Чемпион – схема Кранка - Николсон



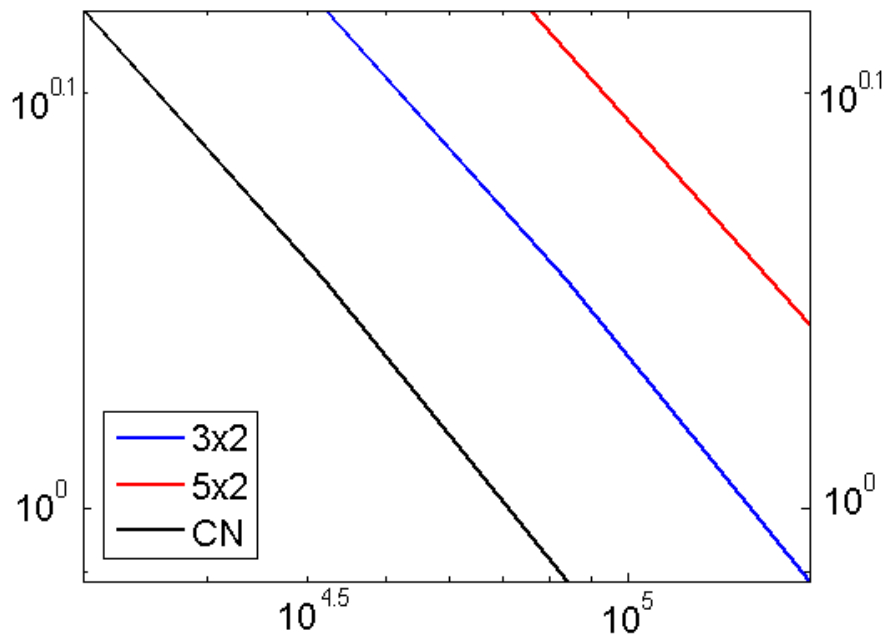
То же, но при $k=4$.
 Решение и правая часть - гладкие функции.
 Компактные схемы имеют высший порядок эффективности.

Для уравнения Шрёдингера точное эталонное решение задачи Коши:

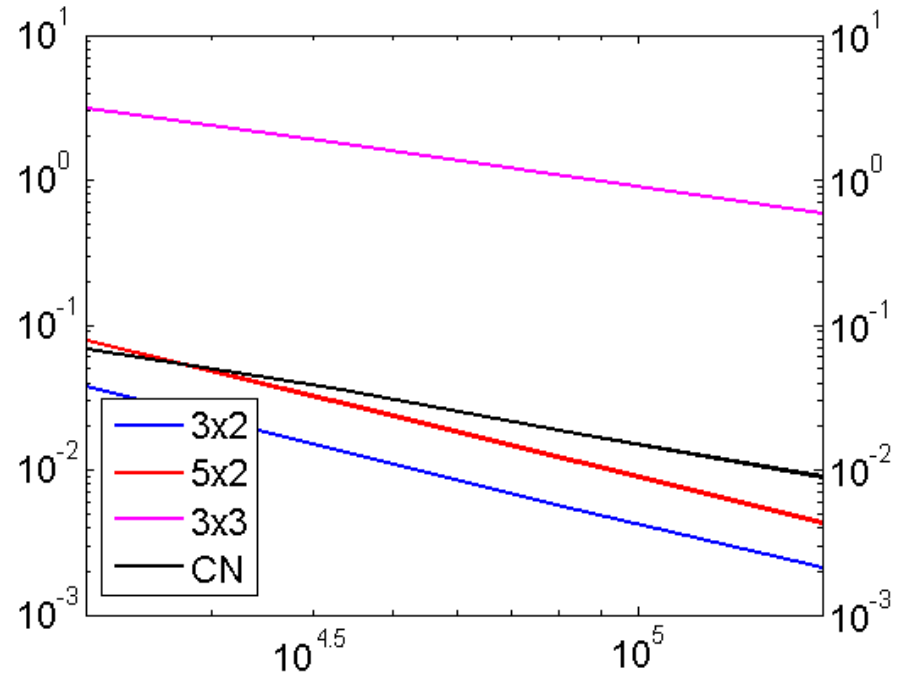
$$u_k^*(t, x) = \sin(t) \sin^k(x) \exp(x), \quad f_k^*(t, x) = \left[\partial_t - iD\partial_x^2 \right] u_k^*(t, x).$$

Зависимость погрешности от числа арифметических операций.

$k=2$. Лучшая – схема Кранка-Николсон



$k=4$. Лучшая – компактная схема 3x2



Порядок эффективности в L^2 при аппроксимации уравнения диффузии.

	$k = 2$		$k = 4$	
	C	L^2	C	L^2
Эйлера 3 точек	0.3426	0.3452	0.6315	0.6767
Эйлера 5 точек	0.3592	0.3600	0.9311	0.8248
Комп. явн. односл.	0.4003	0.4002	1.3613	1.3676
Комп. явн. двухсл.	1.7498	0.9703	1.3490	1.3417
Комп. неявная 3 т.	0.6705	0.6749	1.3486	1.3283
Комп. неявная 5 т.	0.6602	0.6717	1.3483	1.3374
Комп. Неявная 2сл.	0.7538	0.6683	1.3578	1.3985
Кранка-Николсон	0.6638	0.6647	1.0057	1.0032

Порядок эффективности в L^2 при аппроксимации уравнения Шредингера.

	$k = 2$		$k = 4$	
	C	L^2	C	L^2
Комп. неявная 3 т.	0.5925	0.6923	1.3185	1.3893
Комп. неявная 5 т.	0.6772	0.6740	1.3520	1.3949
Комп. Неявная 2сл.	неустойчива	неустойчива	0.8121	0.8077
Кранка-Николсон	0.5728	0.7033	0.9886	0.9836

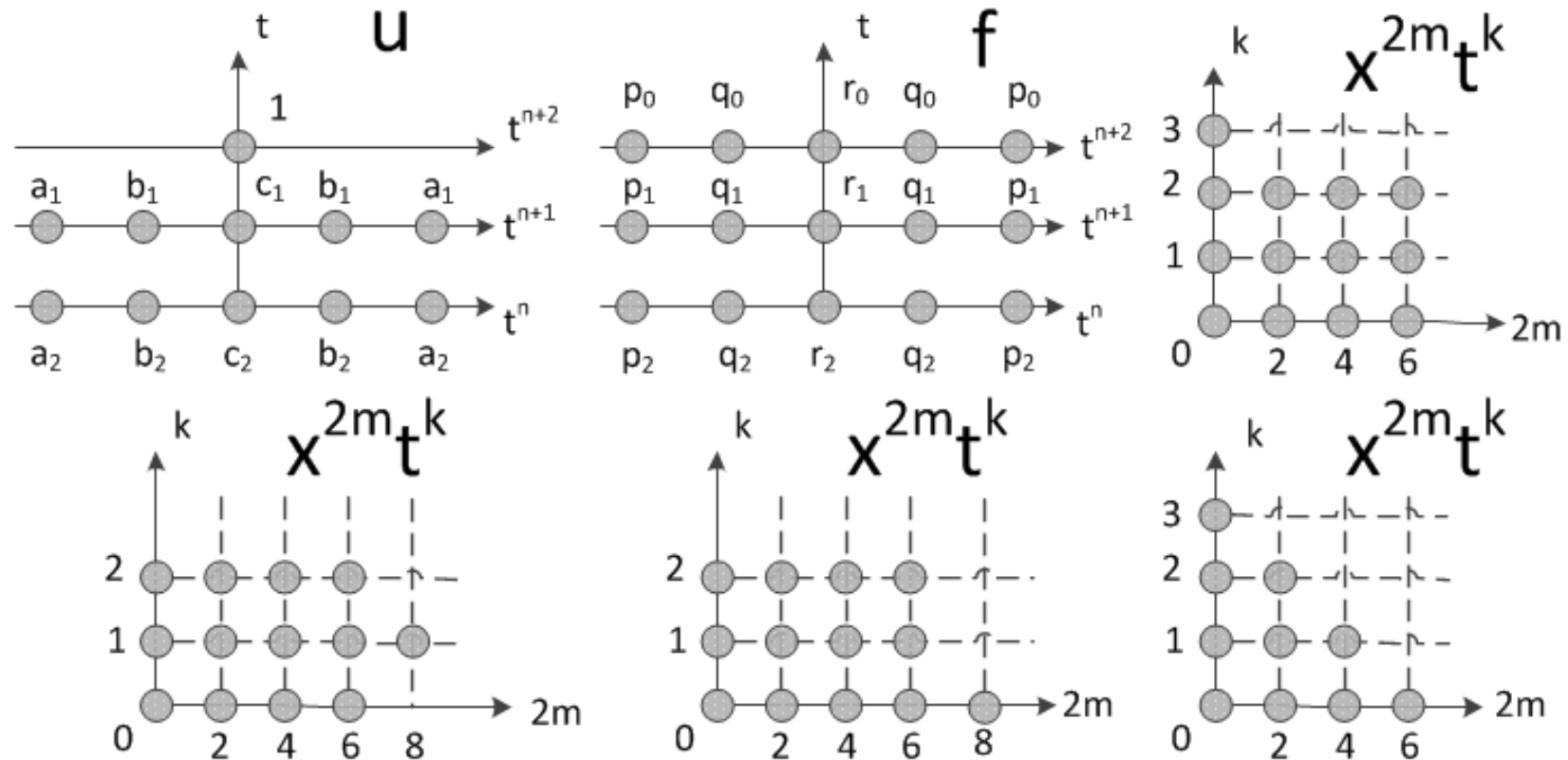
Выводы из рисунков. На гладких решениях и правых частях ($k=4$) лучше всех однослойная неявная компактная схема на 3-точечном шаблоне. При удвоении числа арифметических операций она уполовинивает погрешность (при фиксированном ν она имеет 4 порядок аппроксимации по h).

При разрывной правой части ($k=2$) ситуация принципиально иная: компактные схемы отстают. Впереди оказалась схема Кранка – Николсон с чудовищно большим ν .

Двухслойная явная схема условно устойчива

Мы можем увеличить шаблон компактной схемы по времени и расширить требования к набору тестовых решений; в общем виде такая схема имеет вид:

$$\begin{aligned}
 & a_2(u_{-2h,0} + u_{2h,0}) + b_2(u_{-h,0} + u_{h,0}) + c_2 u_{0,0} + a_1(u_{-2h,\tau} + u_{2h,\tau}) + b_1(u_{-h,\tau} + u_{h,\tau}) + c_1 u_{0,\tau} + u_{0,0} = \\
 & = p_2(f_{-2h,0} + f_{2h,0}) + q_2(f_{-h,0} + f_{h,0}) + r_2 f_{0,0} + p_1(f_{-2h,\tau} + f_{2h,\tau}) + q_1(f_{-h,\tau} + f_{h,\tau}) + r_1 f_{0,\tau} \\
 & \quad + p_0(f_{-2h,0} + f_{2h,0}) + q_0(f_{-h,0} + f_{h,0}) + r_0 f_{0,0}.
 \end{aligned}$$



В качестве свободных параметров выберем коэффициенты q_1, q_2, r_0, r_1, r_2 .

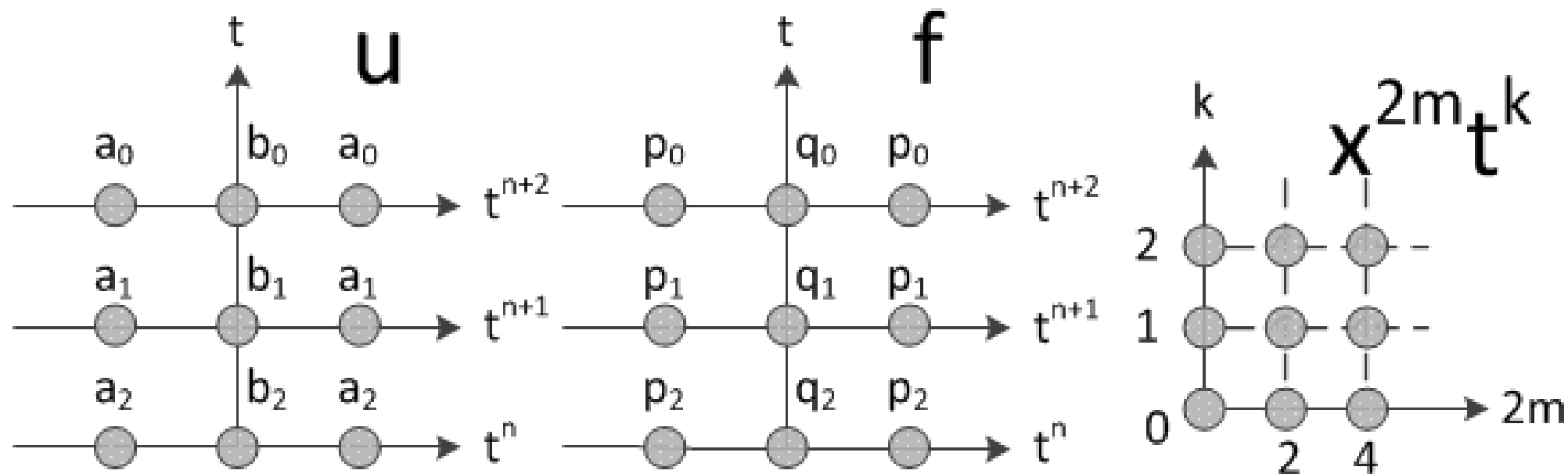
Выбор тестовых функций можно сделать по-разному; представлено три варианта диаграмм Ньютона.

Для того чтобы определить свободные параметры проводилась численная минимизация $E(T)$. Минимизация в пятимерном пространстве при заданном количестве узлов N по переменной x , т. е., фактически, в шестимерном пространстве. Результат по эффективности схем находится между компактной явной однослойной и неявной однослойной схемами.

Н.4. В однородных задачах трудоемкость компактных и классических схем для одинаковых шаблонов совпадают

Неявная двухслойная компактная схема

использует следующие шаблоны и диаграмму Ньютона.



Количество арифметических операций почти такое же, как в однослойной неявной. А точность можно увеличить.

$$\sum_{j=0}^3 (a_j (u_{-h,j\tau} + u_{h,j\tau}) + b_j u_{0,j\tau}) = \sum_{j=0}^3 (p_j (f_{-h,j\tau} + f_{h,j\tau}) + q_j f_{0,j\tau}).$$

Из условия аппроксимации коэффициенты определяются не однозначно. Остаются два свободных параметра $q_0 = z; q_1 = y;$

$$a_0 = \frac{1}{10} - \frac{36\nu z}{25\tau}; a_1 = \frac{5y + 10z - 30\nu y + 24\nu z}{25\tau} - \frac{2}{5}; a_2 = \frac{12\nu}{5} - \frac{10y + 20z + 60\nu y + 216\nu z + 288\nu^2 z}{50\tau} + \frac{3}{10};$$

$$b_0 = 1; b_1 = \frac{10y + 20z + 12\nu y + 48\nu z}{5\tau} - 4; b_2 = 3 - \frac{-288\nu^2 z - 60y\nu + 50y + 100z}{25\tau} - \frac{24\nu}{5};$$

$$p_0 = \frac{z}{10}; p_1 = \frac{y}{10}; p_2 = \frac{y}{10} - \frac{\tau}{5} + \frac{3z}{10} + \frac{12\nu z}{25}; q_2 = y - 2\tau + 3z + \frac{24\nu z}{5}.$$

Для оценки устойчивости двухслойной схемы

$$c_1 u_{j-1}^{n+2} + c_2 u_j^{n+2} + c_3 u_{j+1}^{n+2} = c_4 u_{j-1}^{n+1} + c_5 u_j^{n+1} + c_6 u_{j+1}^{n+1} + c_7 u_{j-1}^n + c_8 u_j^n + c_9 u_{j+1}^n$$

нужно определить собственные числа матрицы (преобразование Фурье + деление):

$$\begin{pmatrix} \frac{c_4 \exp(-i\xi h) + c_6 \exp(i\xi h) + c_5}{c_1 \exp(-i\xi h) + c_3 \exp(i\xi h) + c_2} & \frac{c_7 \exp(-i\xi h) + c_9 \exp(i\xi h) + c_8}{c_1 \exp(-i\xi h) + c_3 \exp(i\xi h) + c_2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и проверить неравенство:

$$\max_{\xi \in \mathbb{R}} \left| \max \lambda_{1,2}(\xi) \right| \leq 1.$$

Одно из собственных чисел тут «физическое», а другое – «паразитарное». При $\tau \rightarrow 0$ «физическое» стремится к 1. Для двухслойных разностных схем необходимо два начальных условия, а для исходного дифференциального уравнения и физической задачи есть только одно. Где взять недостающее? Амплитуда собственного вектора, отвечающего «паразитарному» числу, должна быть равна нулю. Это позволяет оценить второе начальное условие. Соответствующий проектор – псевдодифференциальный оператор.

Приближенный подход: первый шаг двухслойной схемы по времени сделать с помощью однослойной схемы высокой точности.

Если модуль паразитарного собственного числа несколько превосходит 1, а амплитуда соответствующего собственного вектора весьма мала, то возможна квазиустойчивость решения. При интегрировании на длительный срок время от времени нужно «обрубать голову гидре» - проектировать решение на «физический» собственный вектор.

Однослойная компактная неявная схема получается как частный случай данной схемы при $y = z = \frac{5\tau}{10 + 12\nu}$ или при $y = 0; z = \frac{5\tau}{5 + 12\nu}$. Эксперимент показал, что не только в этих двух случаях компактная схема абсолютно устойчива.

Среди всего двухпараметрического семейства схем имеется, например, следующая:

$$y = 0; z = \frac{5\tau}{10 + 12\nu}.$$

Схема с такими коэффициентами также абсолютно устойчива и для уравнения Шрёдингера, и для уравнения диффузии. В данном случае модуль паразитарного собственного числа равен 1. Схема абсолютно устойчива.

Выводы

Получены коэффициенты компактных схем для уравнений диффузии и Шредингера для разных шаблонов и диаграмм Ньютона, исследованы условия устойчивости, проведены численные эксперименты, в том числе для оценки порядка сходимости и порядка эффективности схем.

Шаблоны для неизвестной функции можно классифицировать:

1. По количеству временных слоев
2. По количеству ненулевых диагоналей в матрице, которую нужно обращать на каждом временном шаге (для явных схем это число равно 1)
3. По количеству ненулевых диагоналей, которые аппроксимируют функцию на остальных временных шагах.

Если коэффициенты схемы находятся по шаблонам и диаграмме Ньютона не

однозначно, а зависят от свободных параметров, то по ним проводилась оптимизация.

Количество арифметических операций на один узел пространственно-временной сетки у компактных схем несколько больше, чем у классических, в случае неоднородных уравнений. Оно совпадает для уравнений однородных.

Результаты оценки могут зависеть от гладкости точных решений или начальных условий, на которых тестируются схемы. На гладких решениях преимущество компактных схем велико даже в неоднородном случае.

Подобные алгоритмы построения компактных схем легко модифицируются на широкий класс линейных эволюционных уравнений и систем в частных производных, в том числе для нескольких пространственных переменных, с переменными коэффициентами и на неравномерных сетках.

В случае если дифференциальное уравнение решается в области, ограниченной нефизическими границами (т. е. физически обоснованные граничные условия отсутствуют), условия неотражения волн для компактных схем строятся по тем же алгоритмам, что и для схем классических.

Литература

В.А.Гордин. Математика, компьютер, прогноз погоды и другие сценарии математической физики. М., ФИЗМАТЛИТ, 2010, 2013.