АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОНКУРЕНЦИИ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

В. Г. Ильичев, ИАЗ ЮНЦ РАН

Веревка милости и благодарности
истерта и порвется при первом ударе.
Веревка взаимного эгоизма сплетена
из множества волокон, ее не просто разорвать.
(Роберт Грин. Законы власти)

FIG. 1. СХВАТКА КОНКУРЕНТОВ.

1. УРАВНЕНИЯ ОДНОЙ ПОПУЛЯЦИИ

$\dot{x} = xf(x)$. ОСНОВНОЕ: $f(x)$ УБЫВАЕТ.

ПРИМЕРЫ:

$\dot{x} = x(K - x)$ ИЛИ $\dot{x} = x(-1 + 2\frac{K}{K + x})$.

ВОЛЬТЕРРА КОНТУА.

РАВНОВЕСИЯ: 0 –НЕУСТОЙ. И K - УСТОЙ..

2. КОНКУРЕНЦИЯ В СТАЦИОНАРНОЙ СРЕДЕ

$$\dot{x}_1 = x_1 f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \dot{x}_n = x_n f_n(x_1, \ldots, x_n).$$

ОСНОВНОЕ: $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \le 0$ ДЛЯ ВСЕХ I И J.

ПРИМЕР ВОЛЬТЕРРА : $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = -b_{ij}$,

$$\dot{x}_1 = x_1(K_1 - b_{11}x_1 - b_{12}x_2),$$

$$\dot{x}_2 = x_2(K_2 - b_{21}x_1 - b_{22}x_2).$$

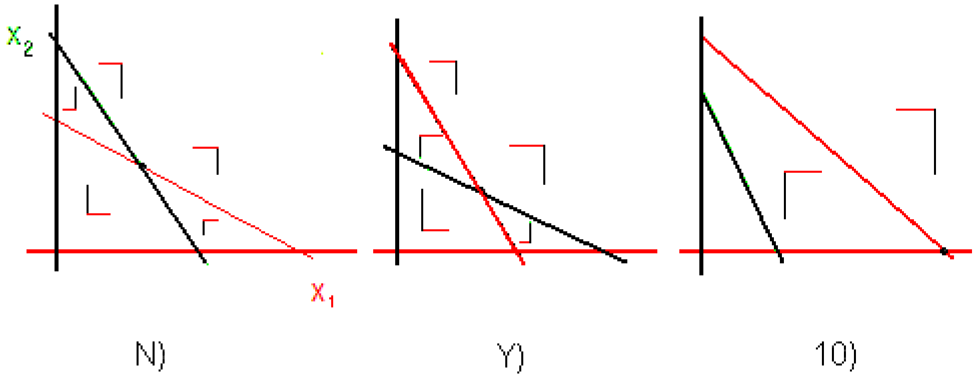

РИС. 1. ИЗОКЛИНЫ И ДИНАМИКА КОНКУРЕНТОВ.

“ВСЕ ПРОТИВ ВСЕХ” (РИС. 2А):

$$\dot{x}_1 = x_1(A - x_1 - \ldots - x_n),$$

$$\dot{x}_2 = x_2(B - x_1 - \ldots - x_n), \ldots, \dot{x}_n = x_n(B - x_1 - \ldots - x_n).$$

ПРИ $A > B$ *1-ПОПУЛЯЦИЯ ВЫТЕСНЯЕТ ОСТАЛЬНЫХ.*

“ВСЕ ПРОТИВ ОДНОГО” (РИС. 2В):

$$\dot{x}_1 = x_1(A - x_1 - \ldots - x_n),$$

$$\dot{x}_2 = x_2(B - x_1 - x_2), \ldots, \dot{x}_n = x_n(B - x_1 - x_n).$$

ПРИ $A > B(n-1)$

1- ПОПУЛЯЦИЯ ВЫТЕСНЯЕТ ОСТАЛЬНЫХ.

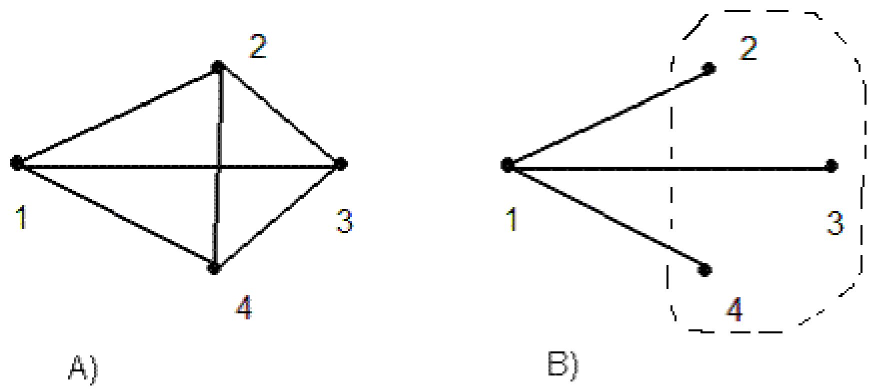

РИС. 2. ВСЕ ПРОТИВ ВСЕХ (А); ВСЕ ПРОТИВ ОДНОГО (В).

3. КОНКУРЕНЦИЯ БЛИЗКИХ МУТАНТОВ

УПРОЩЕНИЕ 1. ОДИНАКОВОЕ КОНК. ДАВЛЕНИЕ:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1} = \ldots = \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \Rightarrow f_i = f_i(x_1 + \ldots + x_n).$$

ОБЛАКО “МУТАНТОВ”:

$$\dot{x}_1 = x_1 f_1(x_1 + \ldots + x_n), \ldots,$$

$$\dot{x}_n = x_n f_n(x_1 + \ldots + x_n).$$

ПУСТЬ $f_i(K_i) = 0$ И $K_1 > K_i$ ДЛЯ ВСЕХ $i > 1$,

ТОГДА 1-МУТАНТ ВЫТЕСНЯЕТ ОСТАЛЬНЫХ.

КРИТЕРИЙ ОТБОРА:

МУТАНТ С НАИБОЛЬШЕЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЧИСЛЕННОСТЬЮ ИМЕЕТ ПРЕИМУЩЕСТВО.

4. КОНКУРЕНЦИЯ И НЕОДНОРОДНОСТЬ ВО ВРЕМЕНИ

ОБЩИЙ СЛУЧАЙ:

$$\dot{x}_1 = x_1 f_1(x_1 + \ldots + x_n, t), \ \ldots,$$

$$\dot{x}_n = x_n f_n(x_1 + \ldots + x_n, t).$$

ЗДЕСЬ $f_i(X,t) = f_i(X, t+T)$ ДЛЯ ВСЕХ X, t, i .

ПРОБЛЕМЫ:

1. $A \succ B, \quad B \succ C, \quad C \succ A$?
2. КРИТЕРИЙ ОТБОРА.

УПРОЩЕНИЕ 2. РАССМОТРЕТЬ СПЕЦ. МОД.

$$\dot{x}_1 = x_1[-1 + \beta_1(t)\frac{1}{1 + x_1 + x_2}], \quad \dot{x}_2 = x_2[-1 + \beta_2(t)\frac{1}{1 + x_1 + x_2}].$$

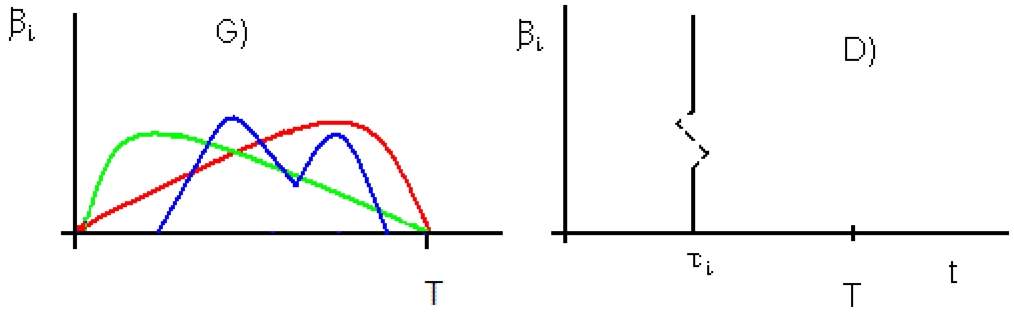

РИС. 3. СТАНДАРТНЫЕ (G); ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ (D).

УПРОЩЕНИЕ 3. δ – ФУНКЦИИ=СКОРОСТЬ РОСТА.

МОНО:

$$\dot{x} = x[-1+\lambda\delta(t-\tau)\frac{1}{1+x}] \quad \Rightarrow \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = \lambda / T - 1 .$$

D_2 - СИСТЕМА КОНТУА:

$$\dot{x}_i = x_i[-1+\lambda_i\delta(t-\tau_i)\frac{1}{1+x_1+x_2}], \quad \text{ДЛЯ } i = 1, 2 .$$

ГДЕ $0 < \tau_1 < \tau_2 < T$; $1 < \lambda_i / T$ ДЛЯ $i = 1, 2$

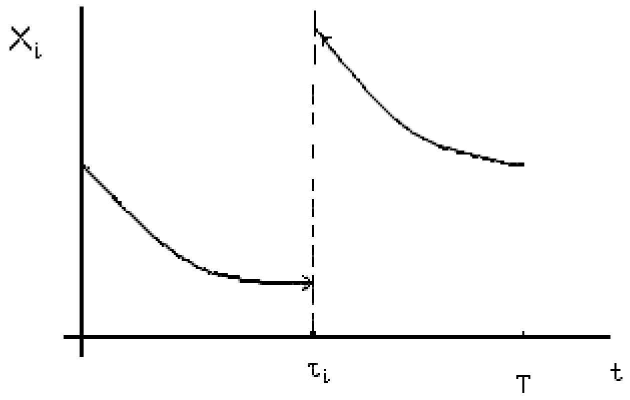

РИС. 4. ВИД РЕШЕНИЙ В D -СИСТЕМЕ.

ОТОБРАЖЕНИЕ ПУАНКАРЕ: $y_i^m = x_i(mT + \tau_i + 0)$,

$$\varphi_1(y_1^{m+1}) = \varphi_1(y_1^m) + \lambda_1 / T - 1 - y_1^m / r - b_{12} y_2^m ,$$

$$\varphi_2(y_2^{m+1}) = \varphi_2(y_2^m) + \lambda_2 / T - 1 - b_{21} y_1^{m+1} - y_2^m / r .$$

ЗДЕСЬ φ_i - НЕЛИН. ФУНКЦИИ; $1/r = [1 - \exp(-T)]/T$;

$b_{12} = \exp(\tau_2 - \tau_1 - T)$ И $b_{21} = \exp(\tau_1 - \tau_2)$;

ТЕОРИЯ D – СИСТЕМ $\Leftrightarrow$ ДИНАМИКА КОНКУРЕНТОВ ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПОЛОЖЕНИЯ ТОЧЕК РОСТА.

ПРИЗНАК ОТБОРА (РОЖДЕНИЕ ***КЗ*****):**

1- ПОПУЛЯЦИЙ ВЫТЕСНЯЕТ 2- ПОПУЛЯЦИЮ, ЕСЛИ

$$(\lambda_1 / T - 1) > (\lambda_2 / T - 1) \cdot \left[\exp\left(T\right) - 1\right] / T$$

КОНСТАНТА ЗАПАСА $KZ = [\exp(T) - 1] / T$.

D_n - СИСТЕМА КОНТУА

ПРИЗНАК ОТБОРА: *ПРИ УСЛОВИИ*

$$(\lambda_1 / T - 1) > (\lambda_i / T - 1) \cdot KZ \quad \text{\textit{ДЛЯ}} \quad i > 1$$

1-ПОПУЛЯЦИЯ ВЫТЕСНЯЕТ ОСТАЛЬНЫЕ.

ПРИТЯЖЕНИЕ ИЗОКЛИН:

$$I_i = \{(y_1^m, \dots, y_n^m) \mid \; y_i^m = y_i^{m+1}\}.$$

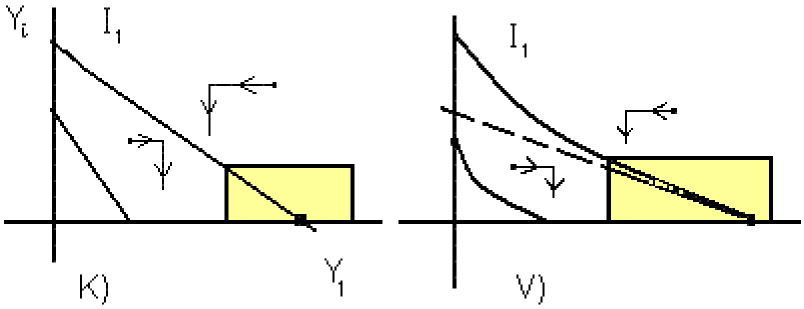

РИС. 5. ФАЗОВАЯ ТОЧКА=”ШАХМАТНАЯ ЛАДЬЯ”.

D - СИСТЕМА ВОЛЬТЕРРА

МОНО:

$$\dot{x} = x[1 - \lambda\delta(t-\tau)x]. \Rightarrow \quad \int_0^T x(t)dt = \frac{1}{\lambda}[\exp(T) - 1].$$

ОБЛАКО МУТАНТОВ:

$$\dot{x}_1 = x_1\left[1-\lambda_1\delta\left(t-\tau_1\right)\left(x_1+\ldots+x_n\right)\right],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\dot{x}_n = x_n\left[1-\lambda_n\delta\left(t-\tau_n\right)\left(x_1+\ldots+x_n\right)\right],$$

ГДЕ $\lambda_i > 0$ ДЛЯ ВСЕХ i; $0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n < T$.

ПРИЗНАК ОТБОРА. *ЕСЛИ ВЫПОЛНЯЕТСЯ*

$$\frac{1}{\lambda_1} > \frac{1}{\lambda_i}KZ \qquad \text{ДЛЯ ВСЕХ } i,$$

ТО 1-ПОПУЛЯЦИЯ ВЫТЕСНЯЕТ ОСТАЛЬНЫХ.

В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ:

$$\dot{x}_1 = x_1[-1+\beta_1(t)\frac{1}{V(x_1 \ldots + x_n)}],\ \ldots,$$

$$\dot{x}_n = x_n[-1+\beta_n(t)\frac{1}{V(x_1+\ldots+x_n)}],$$

ГДЕ $\beta_i(t)$ = T - ПЕРИОД. ФУНКЦИЯ;

$w = V(z) \uparrow$ И $V(0) = 1$; $z = v(w)$ - ОБРАТНАЯ К V ;

$$\lambda_i = \int_0^T \beta_i(t)dt.$$

ПРИЗНАК ОТБОРА: *ПРИ УСЛОВИИ*

$v(\lambda_1 / T) > v(\lambda_i / T)\exp(T)$ ДЛЯ ВСЕХ $i > 1$,

1-ПОПУЛЯЦИЯ ВЫТЕСНЯЕТ ОСТАЛЬНЫЕ.

ОБОСНОВАНИЕ ПРИНЦИП НАСЛЕДОВАНИЯ:

$\dot{X} = F(X,t)$ С T - ПЕРИОДОМ.

ОТ. ПУА.: P: $X^0 \to X^T$, ГДЕ $P = (P_1,...,P_n)$.

$$DP(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x_1},...,\frac{\partial P_1}{\partial x_n} \\ .... \\ \frac{\partial P_n}{\partial x_1},...,\frac{\partial P_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}?$$

$$L(X^t, t, h) = X^t + hF(X^t, t) \Rightarrow DL(X, t, h).$$

ПРИМЕРЫ НАСЛЕДУЕМОСТИ.

ЗНАК - СТРУКТУРА 2- КОНКУРЕНЦИИ $\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix} \Rightarrow$

$x_1^T = P_1(x_1^0, x_2^0)$ РОСТ ПО x_1^0 И УБЫЛЬ x_2^0.

FIG. 2. ХВАТКА КООПЕРАТОРОВ.

ЗНАК- СТРУКТУРА КООПЕРАЦИИ $\begin{pmatrix} + & + & + \\ + & + & + \\ + & + & + \end{pmatrix}$.

“ПЛОХАЯ” МАТЕМАТИКА КОНКУРЕНЦИИ ($n \geq 3$):

ЗНАК-СТРУКТУРА КОНКУРЕНЦИИ $\begin{pmatrix} + & - & - \\ - & + & - \\ - & - & + \end{pmatrix}$

НЕ НАСЛЕДУЕТСЯ! $\Rightarrow$ $x_1^T = P_1(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$?

“ХОРОШАЯ ” МАТЕМАТИКА КООПЕРАЦИИ:

СТРУКТУРА $\begin{pmatrix} +1 & + & + \\ + & +1 & + \\ + & + & +1 \end{pmatrix}$ НАСЛЕДУЕМА.

. ИЗОКЛИНА J_1: $P_1(x_1, x_2, x_3) - x_1 = 0$.

$\frac{\partial P_1}{\partial x_1} - 1 > 0$ $\Rightarrow x_1 = J_1(x_2, x_3)$ ПО $x_2 \downarrow$ и $x_3 \downarrow$.

ТРЮК С ОБРАЩЕНИЕМ ВРЕМЕНИ:

КОНКУРЕНЦИЯ $\Rightarrow$ *КООПЕРАЦИЯ.*

ЗНАК – НАСЛЕДУЕМАЯ СТРУКТУРА $DP \Rightarrow$

ПОЛУПОРЯДОК: *ЕСЛИ* $X \prec Y$, *ТО* $P(X) \prec P(Y)$.

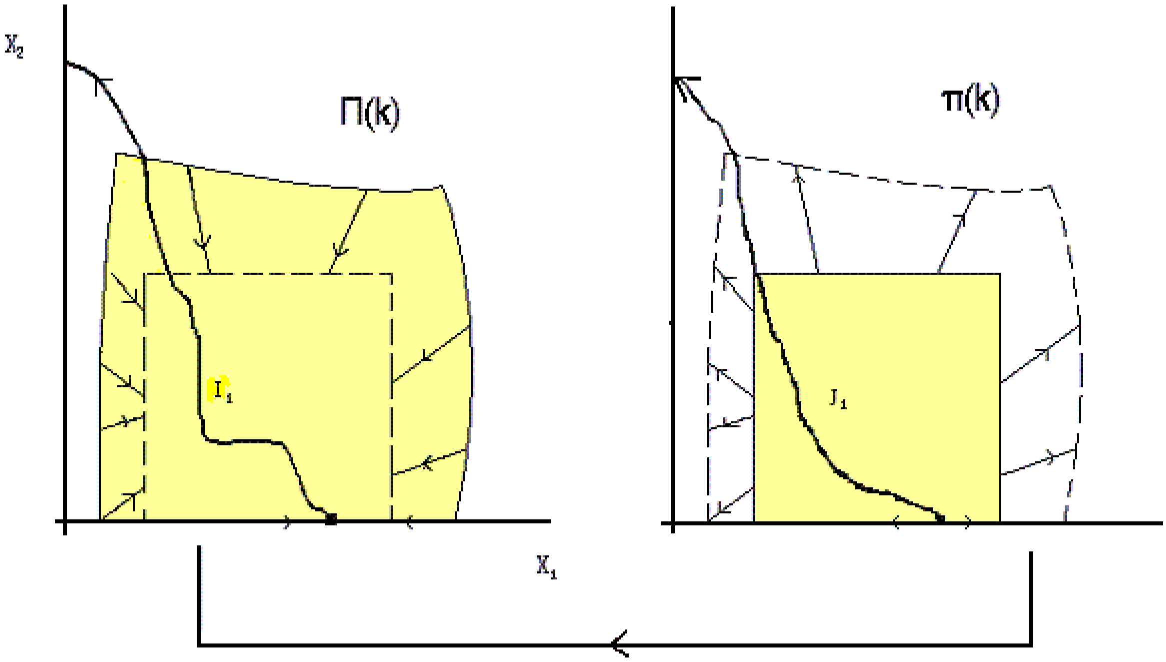

РИС. 6. КОНКУРЕНЦИЯ И КООПЕРАЦИЯ
(СЛЕВА) (СПРАВА).

5. КОНКУРЕНЦИЯ И ПРОСТРАНСТВЕННАЯ НЕОДНОРОДНОСТЬ

МОНО:

$x^{t+1} = f(x^t) = x^t \varphi(x^t)$, ГДЕ f - ВОЗРАСТ. И ВОГНУТА.

ВОСПРОИЗВОДСТВО (n РАЙОНОВ):

$$X^{t+1} = F(X^t),$$

ГДЕ $X = (x_1, \dots, x_n)$ И $F = (f_1, \dots, f_n)$.

МИГРАЦИЯ: $X \to MX$.

ПРИМЕР:

$$\tilde{x}_1 = m_{11} x_1 + m_{12} x_2,$$
$$\tilde{x}_2 = m_{21} x_1 + m_{22} x_2.$$

СОХРАНА.: $\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = x_1 + x_2 \Rightarrow m_{11} + m_{21} = 1$, $m_{12} + m_{22} = 1$.

МАРКОВ. МАТРИЦА 2×2: $M=\begin{pmatrix}1-a & b\\ a & 1-b\end{pmatrix}$, $0<a,b<1$.

ОБЩАЯ МОДЕЛЬ МОНО - ПОПУЛЯЦИИ:

$$X^{t+1}=M\circ F(X^{t}).$$

ЕСЛИ ИМЕЕТСЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ,

ТО ОНО ГЛОБАЛЬНО УСТОЙЧИВО В R_{+}^{n}.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР:

$$M\circ F\circ\ldots.\circ M\circ F\circ\ldots.$$

УПРОЩЕНИЕ 4. ПОМЕНЬШЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦ.:

$$M^{2}\circ F\circ\ldots.\circ M^{2}\circ F\circ\ldots.$$

“СИЛЬНЕЕ НЕКУДА”:

$$M^{\infty}\circ F\circ\ldots.\circ M^{\infty}\circ F\circ\ldots.$$

ПРИМЕР. *ПЕРРОНОВСКАЯ* МАТРИЦА $M^{\infty} = \begin{pmatrix} 1-a & 1-a \\ a & a \end{pmatrix}$.

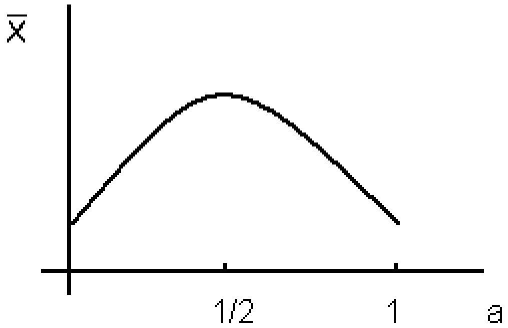

РИС. 7. ГРАФИК $\overline{X}(a)$ ПРИ $K_1 = K_2$.

ДИНАМИКА КОНКУРЕНТОВ:

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_i \varphi_i (x_i + y_i) \\ y_i \varphi_i (x_i + y_i) \end{pmatrix}, \qquad \text{ГДЕ } i = 1, \ldots, n.$$

ПУСТЬ $X = (x_1, \ldots, x_n)$ И $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ С РАЗНОЙ МИГРА.:

$$X \to M_1 X \qquad \text{И} \qquad Y \to M_2 Y.$$

ЧТО ЗДЕСЬ ЕСТЬ *KZ:*

$$\text{ЕСЛИ}\quad \overline{X} > \overline{Y}_1 \cdot KZ,\ \ldots,\ \overline{X} > \overline{Y}_m \cdot KZ,$$

$$\text{ТО } X \text{ ВЫТЕСНЯЕТ ВСЕХ } \quad Y_1,\ldots,Y_m.$$

ХРУСТ. МЕЧТА - 1:

KZ НЕ ЗАВИСИТ НИ ОТ ЧИСЛА (m) КОНКУРЕНТОВ,

НИ КОЛИЧЕСТВА (n) РАЙОНОВ.

ОПРОВЕРЖЕНИЕ -1. ПУСТЬ KZ СУЩЕСТВ. И $KZ < n$ ДЛЯ НЕКОТОРОГО $n > 1$.

ВОЗЬМЕМ ВОДОЕМ ИЗ n РАЙОНОВ С НАБОРОМ:

X - ИСХОДНАЯ + $(Y_1,\ldots,Y_n)$ - КОНКУРЕНТЫ.

МИГРАЦИЯ X – РАВНОМЕР. ПЕРЕМЕШИВАНИЕ.

МИГРАЦИЯ Y_k – ДВИЖЕНИЕ В k - РАЙОН.

ЭКС. 1. ПУСТЬ УСЛОВИЯ ВОСПРОИЗВОДСТВА ВО ВСЕХ РАЙОНАХ ОДИНАКОВЫ:

1. В “ЛИЧНОЙ” ВСТРЕЧЕ X *ПОБЕЖДАЕТ* Y_k.

2. В ПОЛНОМ НАБОРЕ ВЫТЕСНЕНИЯ БОЛЬШЕ НЕТ -

ВСЕ ПОПУЛЯЦИИ СОСУЩЕСТВУЮТ

(ИХ БИОМАССЫ РАВНЫ).

ЭКС. 2. ПУСТЬ СКОРОСТЬ РОСТА X ЧУТЬ МЕНЬШЕ СКОРОСТИ РОСТА Y_k:

1. В “ДУЭЛЕ” X И Y_k *СОСУЩЕСТВУЮТ*.

2. А В ПОЛНОМ НАБОРЕ

КОНКУРЕНТЫ ВЫТЕСНЯЮТ

ИСХОДНУЮ ПОПУЛЯЦИЮ.

ПУСТЬ $\bar{X}$ - РАВНОВЕС МОНО-ПОПУЛЯЦИИ X. АНАЛОГ, $\bar{Y}$ - ДЛЯ ПОПУЛЯЦИИ Y.

КОНСТАНТА ЗАПАСА (KZ): ПУСТЬ ЕСТЬ ДВЕ ПОПУЛЯЦИИ. ЕСЛИ $\bar{X} > \bar{Y} \cdot KZ$,ТО X ВЫТЕСНЯЕТ Y.

ХРУСТ. МЕЧТА - 2:
KZ НЕ ЗАВИСИТ ОТ КОЛИЧЕСТВА (n) РАЙОНОВ.

ОПРОВЕРЖЕНИЕ - 2. ПУСТЬ СУЩЕСТВ. KZ И $KZ < n-1$ ДЛЯ НЕКОТОРОГО $n > 1$. ПОКАЖЕМ:

1. НАЙДУТСЯ M_1 и M_2 РАЗМЕРА $n \times n$;
2. ИМЕЕТ МЕСТО $\bar{X} > \bar{Y} \cdot KZ$;
3. X И Y СОСУЩЕСТВУЮТ.

ПОЛОЖИМ $\varphi_i(z) = 0.25 + 1/(1+z)$; ПЕРР. МАТРИЦЫ:

$$M_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \ldots \lambda_1 \\ \ldots \\ \lambda_n \ldots \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{И} \quad M_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 \ldots \mu_1 \\ \ldots \\ \mu_n \ldots \mu_n \end{pmatrix}.$$

ПУСТЬ $U = x_1 + \ldots + x_n$ И $V = y_1 + \ldots + y_n \Rightarrow$

$$U^{t+1} = \varsigma(U^t, V^t, \overline{\lambda}, \overline{\mu}) \quad \text{И} \quad V^{t+1} = \xi(U^t, V^t, \overline{\lambda}, \overline{\mu}),$$

ГДЕ $\overline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ И $\overline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ - ПАРАМЕТРЫ.

ИЗОКЛИНЫ:

$$I = \{(U^t, V^t): \ U^t = U^{t+1}\} \quad \text{И} \quad J = \{(U^t, V^t): \ V^t = V^{t+1}\}.$$

МАЛАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ:

$\lambda_1 = \frac{1}{n} - \varepsilon(n-1)$ И $\lambda_i = \frac{1}{n} + \varepsilon$ ДЛЯ $i > 1$

($\approx$ РАВНОМЕРНОЕ ПЕРЕМЕШИВАНИЕ);

$\mu_1 = 1 - \varepsilon(n-1)$ И $\mu_i = \varepsilon$ ДЛЯ $i > 1$

($\approx$ ВСЕ В ПЕРВЫЙ РАЙОН).

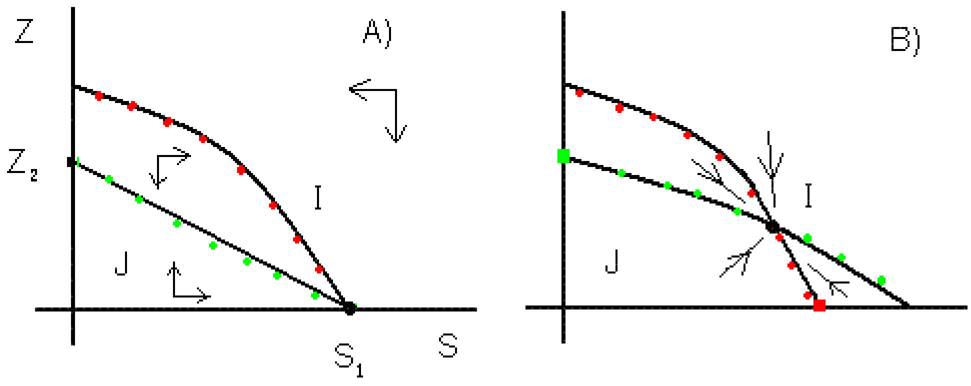

РИС. 8. ИЗОКЛИНЫ ПРИ НУЛЕВОМ ε (A);
ПРИ МАЛОМ ПОЛОЖИТЕЛЬНОМ ε (B).

В РИС. A ИМЕЕТ МЕСТО $\overline{X} = \overline{Y} \cdot n$.

ИЗ ε - НЕПРЕРЫВНОСТИ $\Rightarrow$ $\overline{X} > \overline{Y} \cdot (n-1)$.

НО В РИС. B ИМЕЕТ МЕСТО СОСУЩЕСТВОВАНИЕ.

ПРОТИВОРЕЧИЕ.

ВЫВОДЫ

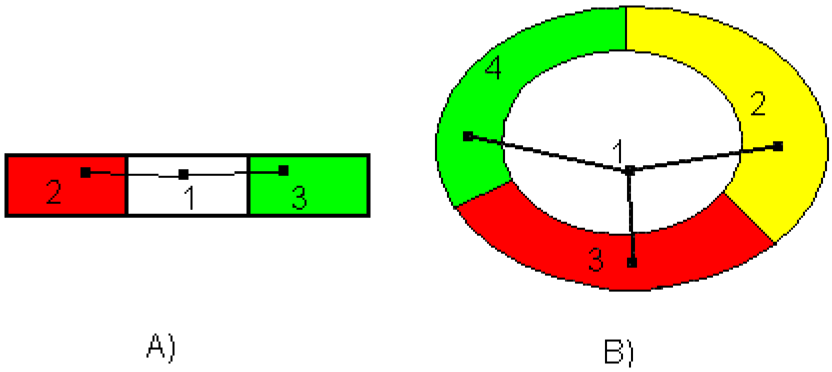

РИС. 9. КОНКУРЕНЦИЯ В “ТЕСНОМ” ВРЕМЕНИ (А)
И В “ПРОСТОРНОМ” ПРОСТРАНСТВЕ (В).

Ильичев В. Г. Универсальные константы запаса и критерии отбора в переменной среде// Математические заметки, 2001, вып. 70, N 5.

Ильичев В. Г. Локальные и глобальные свойства неавтономных динамических систем и их приложение в моделях конкуренции// Сибирский математический журнал. 2003. Т. 44, N 3.

Ильичев В. Г. Принцип наследования в динамических системах и его приложение в моделях экологии// Дифференциальные уравнения, 2011, Т. 47, N 9.

Ильичев В.Г. "Нелинейные скелеты" в пространственно - временных моделях экологии //Математическое моделирование , 2011, Т. 23, вып. 2.

Ильичев В.Г. Устойчивость, адаптация и управление в экологических системах// М.: Физматлит. 2009.

FIG. 3. БЕЗ-**ЗАПАС-**НЫЙ   ОСЛИК.