

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ПАКЕТА TIMES

- ⇒ Л.В.Клочкова ; В.Ф. Тишкин
- ⇒ ИПМ РАН, Москва, Россия

Основные высоты и слои

- ⇒ Пограничный слой: слой атмосферы, где турбулентная диффузия наиболее интенсивна
- ⇒ Приземный слой: слой атмосферы, в котором с высотой вертикальный коэффициент турбулентной диффузии растет с максимальной скоростью
- ⇒ Анемометрическая высота: высота, как правило, равная 10 м, на которой измеряется ветер

Стратификация

⇒ Сухоадиабатический градиент: $\gamma_a = -\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_a \approx 0.01 \text{ K/m}$

⇒ 3 состояния атмосферы: неустойчивое (классы A-C, $|\gamma| > |\gamma_a|$), устойчивое (классы E-G, $|\gamma| < |\gamma_a|$) и безразличное (класс D, $\gamma = \gamma_a$)

Класс атмосферной стабильности	Вертикальный температурный градиент, K/m
A	-0.19 ÷ -0.019
B	-0.019 ÷ -0.017
C	-0.017 ÷ -0.015
D	-0.015 ÷ -0.005
E	-0.005 ÷ 0.015
F	0.015 ÷ 0.04
G	0.04 ÷ 0.4

Турбулентная диффузия

- ⇒ Вертикальный турбулентный поток P субстанции q : $P = -K_z \rho \frac{\partial q}{\partial z}$
 ρ - плотность, K_z - коэффициент турбулентной диффузии в вертикальном направлении

- ⇒ Коэффициент горизонтальной турбулентной диффузии задается эмпирической формулой:

$$K = \alpha \cdot \sigma^2 \cdot \max(0.5, w) \cdot H,$$

α – весовой коэффициент, σ – угол горизонтальной флуктуации направления ветра в радианах, w - скорость ветра в м/с, H - высота пограничного слоя в м.

- ⇒ Коэффициент вертикальной турбулентной диффузии задается эмпирической формулой:

$$K_z = \begin{cases} K_0 \frac{z}{h}, z < h \\ K_0, h \leq z \leq H \\ 1 + (K_0 - 1)e^{H-z} \text{ м}^2/\text{с}, z > H \end{cases}$$

h – высота приземного слоя, K_0 – значение K_z на высоте h .

σ , h , H , K_0 зависят от атмосферной стабильности.

Зависимость физических величин от стратификации и эмпирических коэффициентов

Класс атм. стаб.	Высота пограничного слоя, м	Высота приземного слоя, м	Диапазон скоростей ветра, м/с	σ , градусы	K_0 , м ² /с
A	2000	250	0.5 – 2	25	160
B	1500	250	0.5 – 2	20	100
C	1000	150	2 – 10	15	70
D	750	150	3 – 10	10	15
E	300	150	2 – 5	5	5
F	250	100	0.5 – 3	2.5	1.5
G	250	100	0.5 – 1	1.7	0.13

Метод построения поля ветра

над местностью со сложным рельефом

- ⇒ начальное приближение
- ⇒ вертикальный профиль
- ⇒ зануление дивергенции ветра
- ⇒ учет влияния холмов
- ⇒ итерационное сглаживание поля ветра
- ⇒ минимизация дивергенции ветра

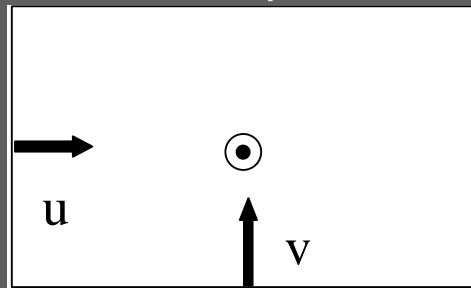
в условиях городской застройки

- ⇒ начальное приближение
- ⇒ вертикальный профиль
- ⇒ зануление дивергенции ветра
- ⇒ итерационное сглаживание поля ветра
- ⇒ минимизация дивергенции ветра

Начальное приближение

- ⇒ Задается на анемометрической высоте
- ⇒ Вертикальная компонента полагается равной 0
- ⇒ В ячейках разностной сетки, где расположены метеостанции, ветер задается

следующим образом:



- ⇒ В остальных ячейках определяется по ближайшей метеостанции, но равен 0 внутри возвышений, а также равны 0 нормальные к возвышениям компоненты

Задание вертикального профиля ветра с помощью степенной функции

$$u = u_a (z/h_a)^m,$$

$$v = v_a (z/h_a)^m,$$

h_a – анемометрическая высота, u_a , v_a – компоненты скорости ветра на анемометрической высоте, m – эмпирический показатель степени, зависящий от стратификации

Класс атм. стаб.	A	B	C	D	E	F	G
m	0.08	0.165	0.215	0.31	0.405	0.43	0.44

Послойная запись транспортно-диффузионного уравнения

$$\frac{\partial h_i c_i}{\partial t} + \operatorname{div} c_i h_i \vec{w}_i - \operatorname{div} (K_i h_i \operatorname{grad} c_i) - D_i + r_i c_i = Q_i,$$

⇒ где $i=0 \dots N_3-1$ – номер слоя, h_i – толщина i -го слоя,

$$D_i = \begin{cases} K_{z_i} \frac{c_{i+1} - c_i}{0.5(h_i + h_{i+1})}, & i=0, \\ K_{z_i} \frac{c_{i+1} - c_i}{0.5(h_i + h_{i+1})} - K_{z_{i-1}} \frac{c_i - c_{i-1}}{0.5(h_i + h_{i-1})}, & 0 < i < N_3 - 1 \\ -K_{z_{i-1}} \frac{c_i - c_{i-1}}{0.5(h_i + h_{i-1})}, & i = N_3 - 1, \end{cases}$$

Расщепление на процессы

- ⇒ Адвекция вдоль каждой координатной оси

$$h_i^{n+1} c_i^{(1)} - h_i^n c_i^{(0)} = - \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial h_i c_i u_i}{\partial x} dt$$

$$h_i^{n+1} c_i^{(2)} - h_i^n c_i^{(1)} = - \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial h_i c_i v_i}{\partial y} dt$$

- ⇒ Горизонтальная турбулентная диффузия и физ.-хим. процессы

$$h_i^{n+1} c_i^{(3)} - h_i^n c_i^{(2)} = \int_t^{t+\Delta t} (\text{div} (h_i K_i \text{grad} c_{1,i}) - h_i r_i c_{1,i} + h_i Q_i) dt$$

- ⇒ Вертикальная турбулентная диффузия

$$h_i^{n+1} c_i^{(4)} - h_i^n c_i^{(3)} = \int_t^{t+\Delta t} D_i dt$$

$$D_i = \begin{cases} K_{z_i} \frac{c_{i+1} - c_i}{0.5(h_i + h_{i+1})}, & i=0, \\ K_{z_i} \frac{c_{i+1} - c_i}{0.5(h_i + h_{i+1})} - K_{z_{i-1}} \frac{c_i - c_{i-1}}{0.5(h_i + h_{i-1})}, & 0 < i < N_3 - 1 \\ -K_{z_{i-1}} \frac{c_i - c_{i-1}}{0.5(h_i + h_{i-1})}, & i = N_3 - 1, \end{cases}$$

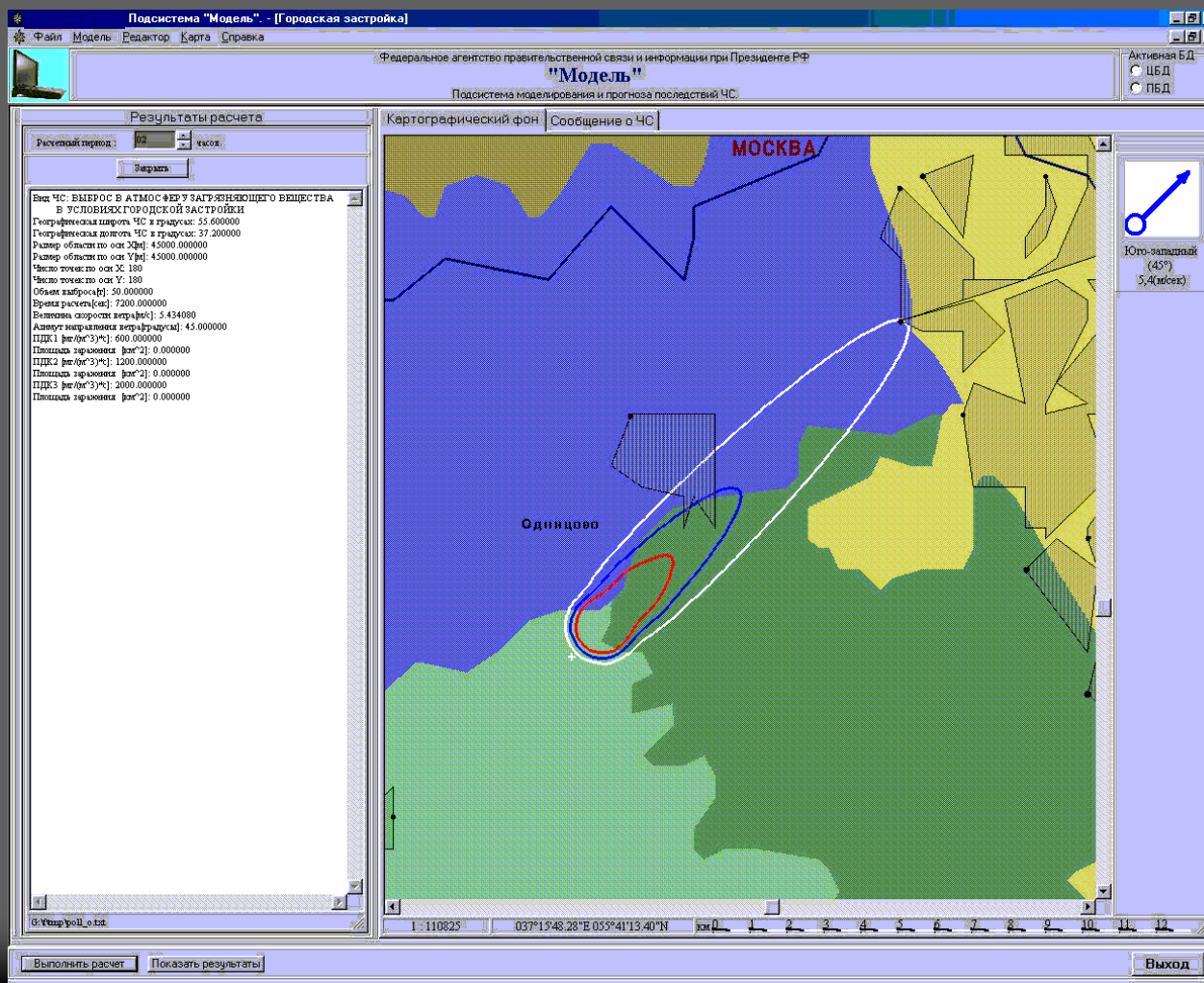
Численное решение уравнений, описывающих отдельные процессы

- ⇒ Уравнение горизонтальной турбулентной диффузии – с помощью метода сопряженных градиентов
- ⇒ Уравнение вертикальной турбулентной диффузии – с помощью метода прогонки
- ⇒ Уравнения адвекции – с помощью сеточно-характеристического метода либо специального метода частиц

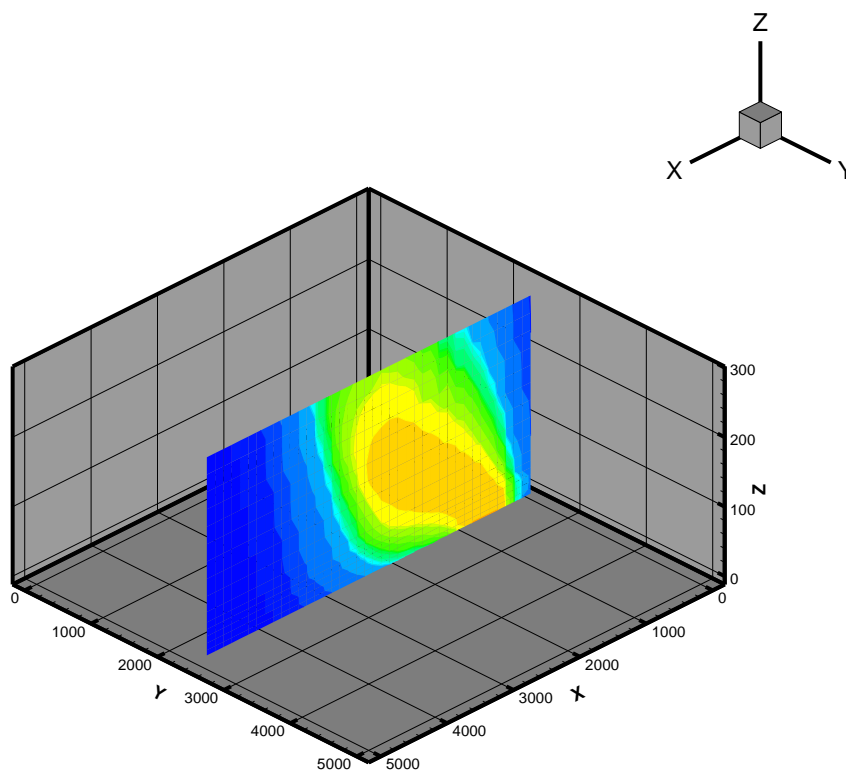
Визуализация результатов

- ⇒ Обеспечивается отображение результатов расчета: поля ветра, распределения концентрации загрязняющих веществ, метеопараметров - с возможностью наложения их на географические карты при использовании программного комплекса в ГИС

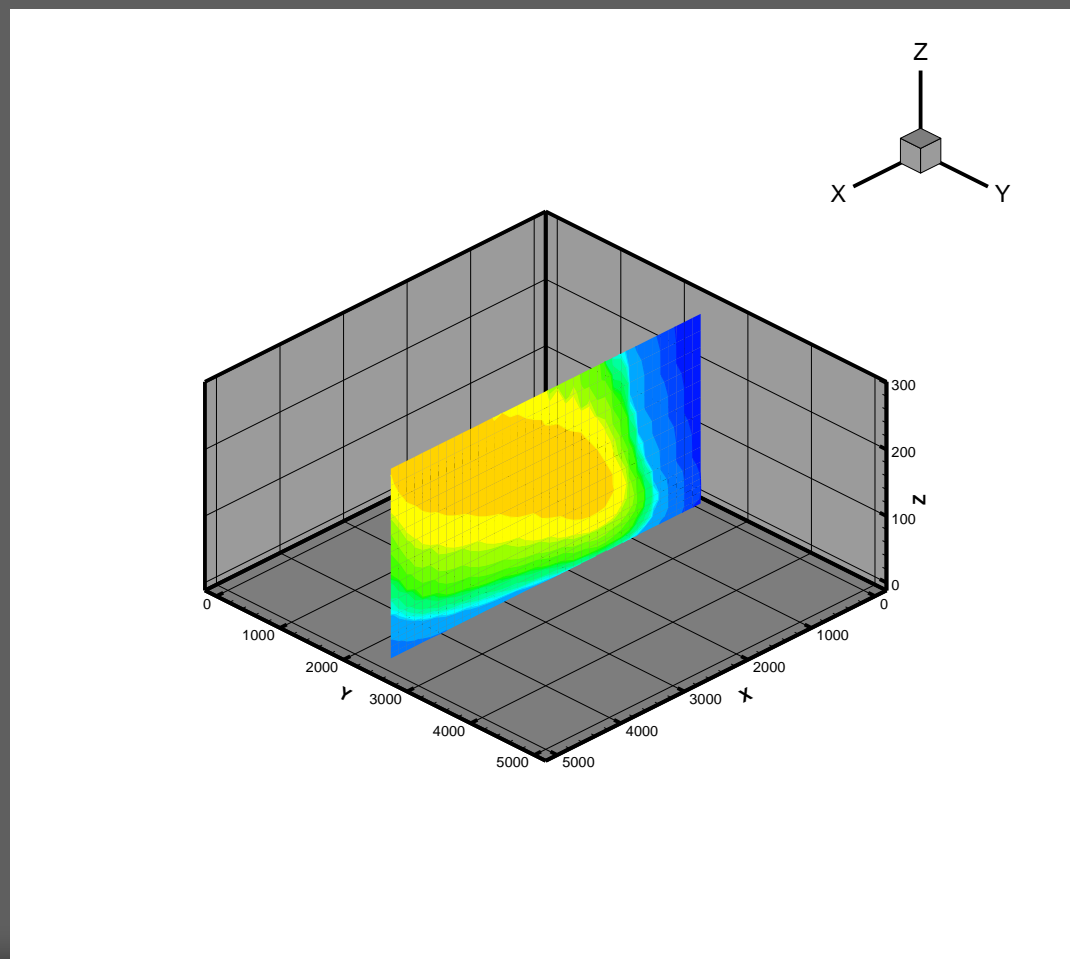
Интегральный след предельно допустимых концентраций в геоинформационной системе "Модель" для мгновенного точечного источника



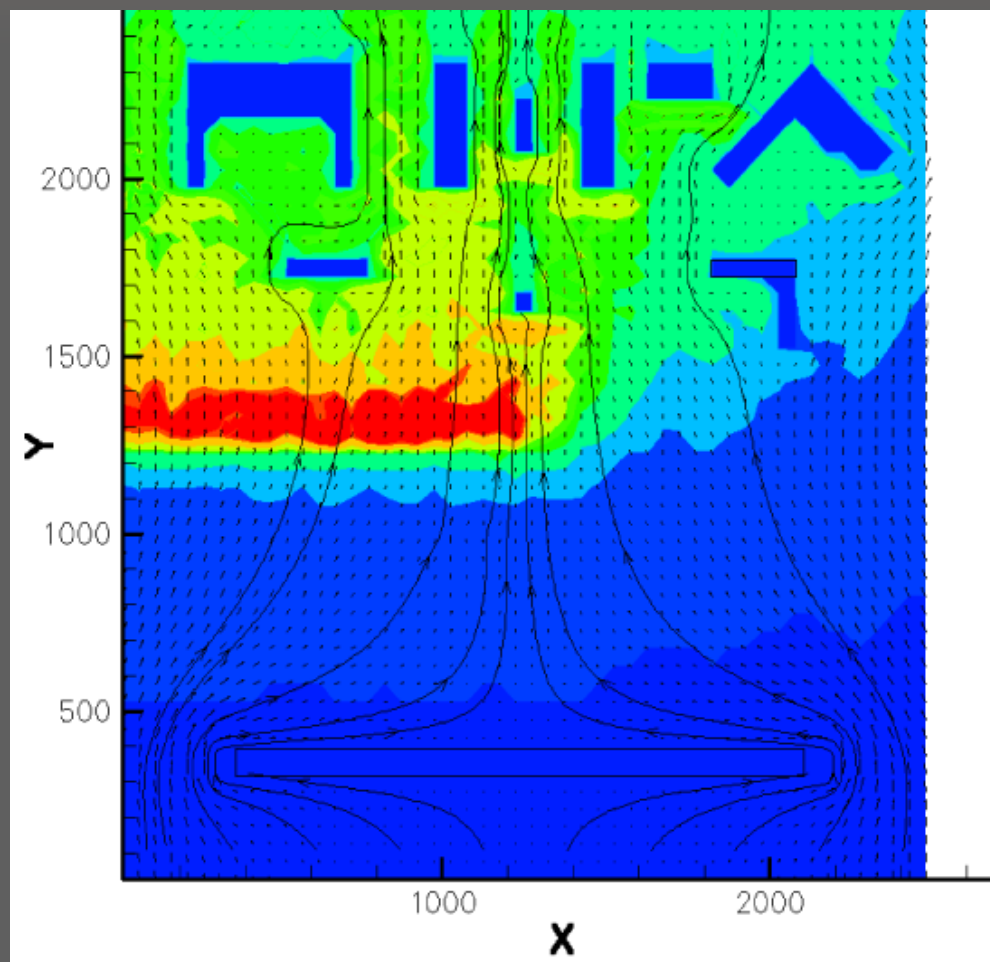
Вертикальный срез облака выхлопных газов от действующего ограниченное время источника на территории аэродрома ($t=144$ с)



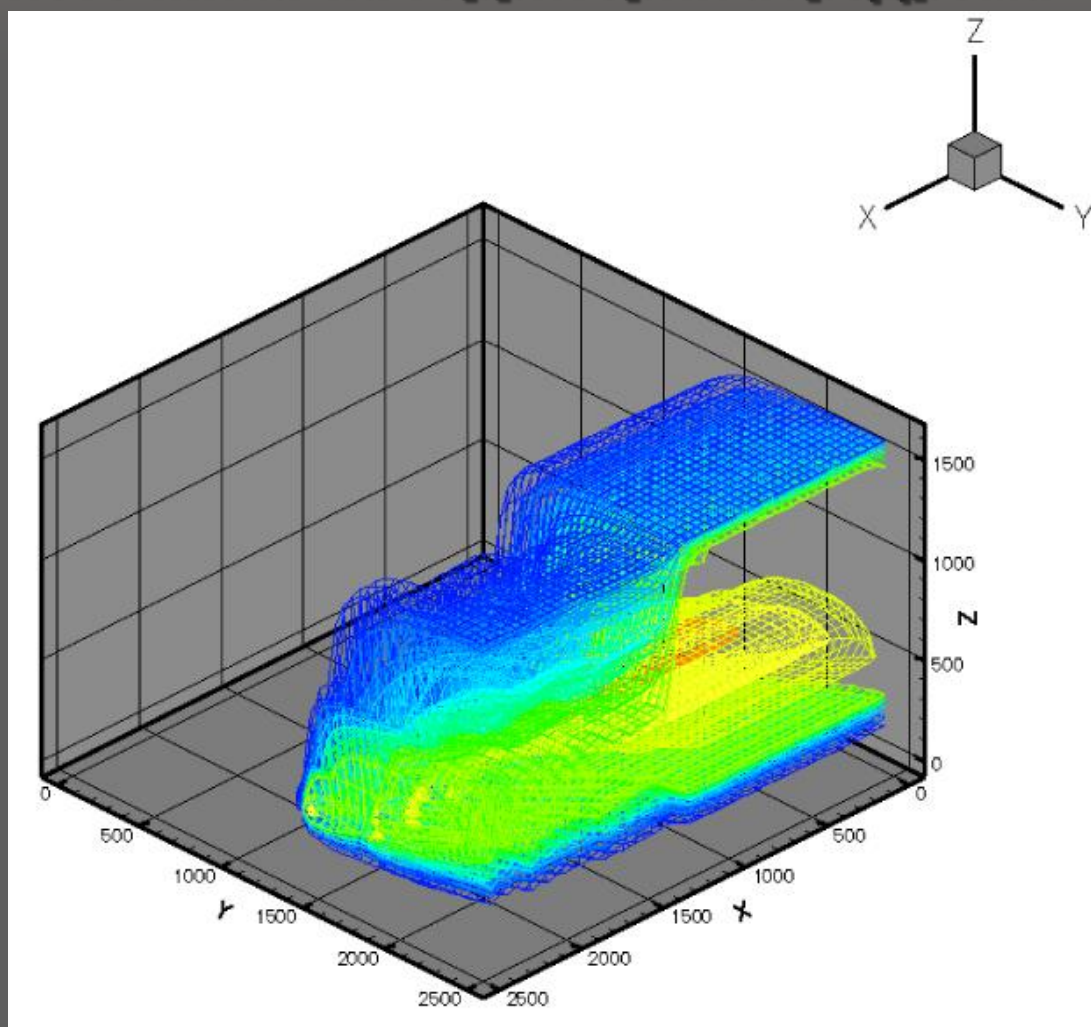
Вертикальный срез облака выхлопных газов от действующего ограниченное время источника на территории аэродрома ($t=288$ с)



Горизонтальный срез облака выхлопных газов от сложного источника на территории аэродрома



Объемное изображение облака выхлопных газов от сложного источника на территории аэродрома



ПОСТРОЕНИЕ ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЫ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ АТМОСФЕРЫ

⇒ Высота верхней границы слоя перемешивания H меняется в пространстве и времени. Она измеряется на метеостанциях для каждого метеоэпизода, затем строится функциональная зависимость $H=f(x,y,t)$. В данной работе предлагается аппроксимация высоты слоя перемешивания в виде суперпозиции колоколообразных функций, которая дает ограниченный профиль значений.

Свойства аппроксимирующей функции

- ⇒ Она должна быть дифференцируемой по пространственным и временной координатам. В дальнейшем величина N используется в транспортно-диффузионном уравнении, а ее значения на метеостанциях в моменты измерений должны совпадать со значениями в системе дифференциальных уравнений транспортно-диффузионной модели.

Основные определения

⇒ Пусть имеются M метеостанций, причем для каждой станции задан набор из N значений величины H ($i=1\dots M, n=1\dots N$) для N метеоэпизодов.

Длительность n -го эпизода обозначим за Δt_n .

$$\bar{H}^i = \frac{\sum_n H_n^i \Delta t_n}{\sum_n \Delta t_n}.$$

Величина H для i -ой метеостанции

$$H^i(t) = \bar{H}^i + \sum_n \frac{k_n^i}{1 + \varepsilon(t - \tau_n)^2},$$

где $i=1 \dots M$ рассматриваемая станция;
 ε - положительный параметр, τ - момент в пределах n -го метеоэпизода, в который снимаются измерения, k_n - коэффициенты, для i -й станции удовлетворяющие системе N линейных уравнений, выражающей совпадение значений функции $H_i(t)$ с измеренными значениями величины H для всех моментов измерений ($t=\tau_n$, $n=1 \dots N$) и решаемой методом Гаусса

зависимость от времени высоты верхней границы пограничного слоя на данной станции может быть аппроксимирована с помощью такого выражения

$$H(x, y, t) = \bar{H}(t) + \sum_{i=1}^M \frac{k^i(t)}{1 + \delta r^i(x, y)},$$

$$\bar{H}(t) = \frac{1}{L_x L_y} \iint_{\Omega} H_a(x, y, t) dx dy,$$

аппроксимация по пространству для любого момента времени t .

где $r^i(x, y)$ – расстояние от точки (x, y) до i -й станции, $H_a(x, y, t)$ - функция, значение которой в точке (x, y) в момент времени t равно значению H в тот же самый момент на ближайшей станции, L_x, L_y – размеры прямоугольной расчетной области Ω , δ - положительный параметр, $k^i(t)$ – коэффициенты, удовлетворяющие системе M линейных уравнений, выражающей совпадение значений функции $H(x, y, t)$ со значениями величины $H^i(t)$ в точках расположения метеостанций ($x=x^i, y=y^i, i=1\dots M$), решаемой методом Гаусса

Всплывание облака выхлопных газов под действием силы Архимеда

- ⇒ F -сила, вызывающая вертикальный подъём облака за счёт разности плотности воздуха и плотности выхлопного газа
- ⇒ Облако приобретает вертикальное ускорение. Величина этого ускорения при адиабатических условиях зависит от разности температур
- ⇒ Ускорение направлено вверх, если температура выхлопных газов выше температуры окружающего воздуха. ρ
- ⇒ градиент температуры газов равен 1 C/100м, это определяет -высоту подъёма.
- ⇒ Высота подъема называется уровнем положительной конвекции
- ⇒ При отрицательной конвекции облако прижимает к земле