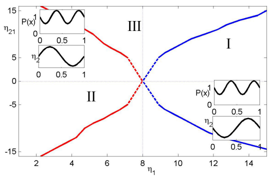
Анализ сосуществования популяций на пространственно-неоднородном ареале

Кругликов Михаил Геннадьевич

факультет математики, механики и компьютерных наук, ЮФУ
г.Ростов-на-Дону

Система нелинейных параболических уравнений моделирует распространение неантагонистических популяций на кольцевом ареале с учетом пространственной неоднородности «жизненных условий».



Современные проблемы мат.моделирования,

16—21 сентября 2013, Дюрсо.

Модель динамики неантагонистических популяций

Система нелинейных параболических уравнений на кольцевом ареале:

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} = -\frac{\partial q_i}{\partial x} + \eta_i w_i f, \quad f = 1 - \frac{1}{P^m(x)} \sum_{j=1}^{M} w_j^m(x,t), \tag{1}$$

$$q_i = -\sum_{j=1}^{M} k_{ij} \frac{\partial w_i}{\partial x}, \quad i = 1, \ldots, M \tag{2}$$

$$w_i\big|_{t=0} = w_{i0}(x), \qquad i = 1, \ldots, M, \tag{3}$$

$$w_i(0,t) = w_i(a,t), \quad k_i w_i'(0,t) = k_i w_i'(a,t), \quad i = 1, \ldots, M. \tag{4}$$

$w_i(x,t)$ — плотность распределения i-й популяции, $x \in [0,a]$, t — время.

$k_{ij}(x)$ — коэффициенты диффузии, расчеты при $k_{ij}(x) = k_{ii}$, $k_{ij} = 0, i \neq j$,

$\eta_i(x)$ — коэффициенты роста,

q_i — потоки плотностей,

$P(x)$ — профиль предельной плотности (обобщенный ресурс),

m — степень неоднородности. $m = 1$ — логистический закон.

Косимметрия для системы двух популяций

$$\dot{w}_1 = k_1 w_1'' + \eta_1(x) w_1 f \equiv \varphi, \quad (\ )^{\cdot} = \frac{\partial}{\partial t}(\ ), \qquad (\ )' = \frac{\partial}{\partial x}(\ ), \tag{5}$$

$$\dot{w}_2 = k_2 w_1'' + \eta_2(x) w_2 f \equiv \psi, \quad f = 1 - \frac{w_1 + w_2}{P(x)}. \tag{6}$$

Векторное поле $L = (k_2 w_2, -k_1 w_1)$ будет косимметрией (5)–(6), если

1) k_1, k_2, η_1, η_2 – константы,

2) $k_2 \eta_1 = k_1 \eta_2$.

Условие косимметрии:

$$\int\limits_0^a [\varphi k_2 w_2 - \psi k_1 w_1] dx = 0.$$

Косимметрия разрушается при $\eta_2 = \eta_{20} + \varepsilon \eta_{21} \sin(2\pi x/a)$. Селективная функция:

$$S(w_1, w_2) = \varepsilon \int\limits_0^a w_1 w_2 \left(1 - \frac{w_1 + w_2}{P}\right) (\eta_2^* + \eta_1^* \sin(2\pi x/a))\, dx,$$

где η_2^* и η_1^* — значения параметров, при которых система обладает линейной косимметрией $(k_2 \eta_1^* = k_1 \eta_2^*)$.

Метод прямых

Дискретный аналог уравнений ($x_j = hj, \quad h = a/n, \quad j = 0, \ldots, n$):

$$\dot{w}_{i,j} = k_i \frac{w_{i,j-1} - 2w_{i,j} + w_{i,j+1}}{h^2} + \eta_i w_{i,j} f_j, \tag{7}$$

$$f_j = 1 - \frac{1}{P(x_j)} \sum_{s=1}^{M} w_{s,j}, \quad i = 1, \ldots, M, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{8}$$

Условия периодичности $w_{i,n+1} = w_{i,1}, \quad w_{i,0} = w_{i,n}, \quad i = 1, \ldots, M.$

Система дифференциальных уравнений:

$$\dot{Y} = AY + F(Y) \equiv \Phi(Y), \quad F(Y) = (\eta_1 Y_1 f_1, \ldots, \eta_M Y_{Mn} f_n),$$

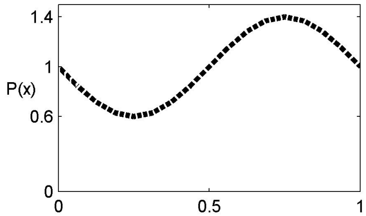
$$Y = (w_{1,1}, w_{1,2}, \ldots, w_{1,n}, w_{2,1}, \ldots, w_{M,n}),$$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} k_1 \hat{A} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & k_M \hat{A} \end{pmatrix}.$$

Матрица $\hat{\mathrm{A}}$ трехдиагональная.

Численное решение: метод Рунге-Кутта 4 порядка, MATLAB.

Вычислительные эксперименты



Обобщенный ресурс $P(x) = 1 - \mu \sin(2\pi x/a)$, $\mu = 0.4$

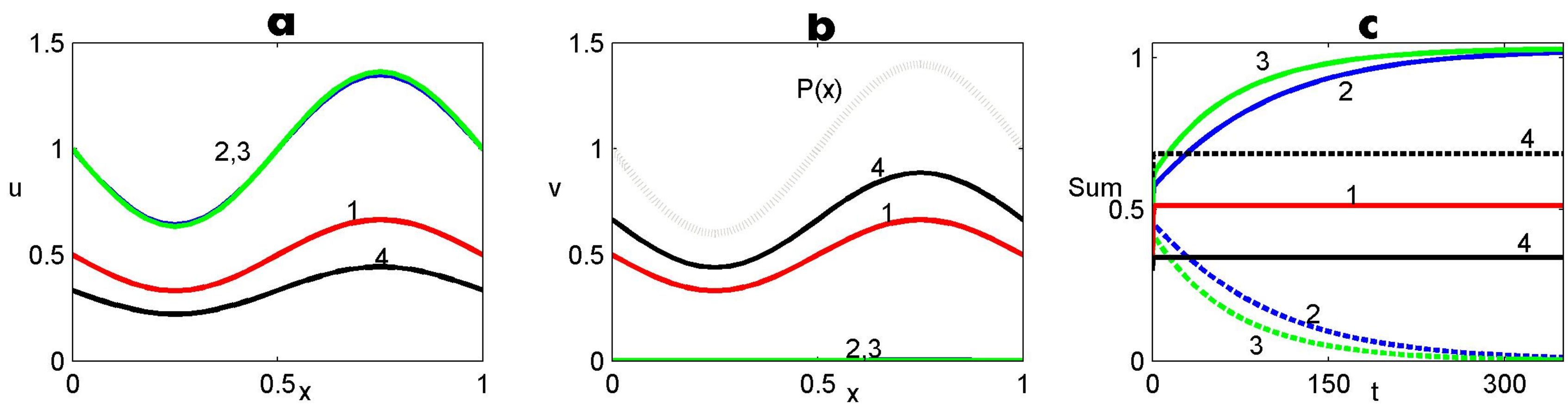
$M = 2, \quad w_1 = u, \quad w_2 = v, \quad a = 1, \quad k_1 = k_2 = 0.02, \quad \mu = 0.4$

.

Постоянные коэффициенты роста

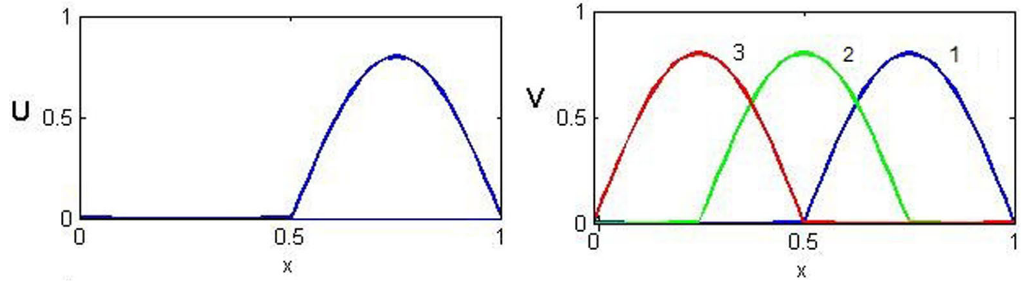
$\eta_2 = 4,$

1) $\boldsymbol{\eta_1 = 4}$ $(\boldsymbol{u_0 = v_0})$, 2) $\boldsymbol{\eta_1 = 6}$, 3) $\boldsymbol{\eta_1 = 8}$, 4) $\boldsymbol{\eta_1 = 4}$ $(\boldsymbol{u_0 \neq v_0})$,

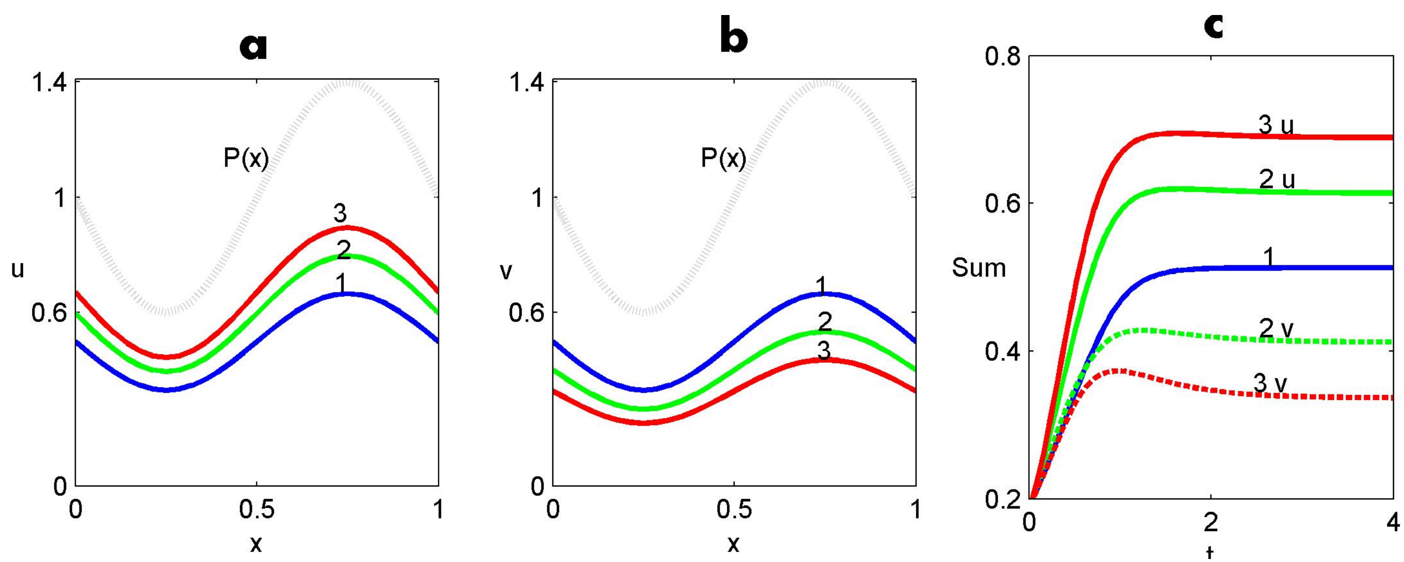


Sum — средняя плотность популяций. $Sum_u = \dfrac{1}{a}\sum\limits_{k=0}^{n} u_i, \quad Sum_v = \dfrac{1}{a}\sum\limits_{k=0}^{n} v_i.$

Влияние начальных данных



на финальные плотности популяций $(\eta_1 = \eta_2 = 4)$.

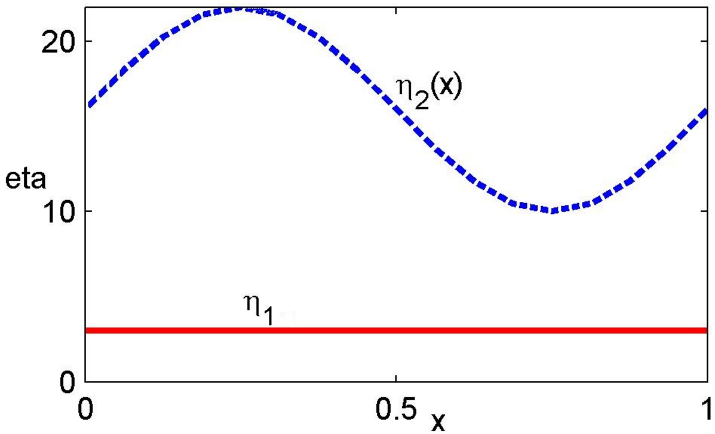


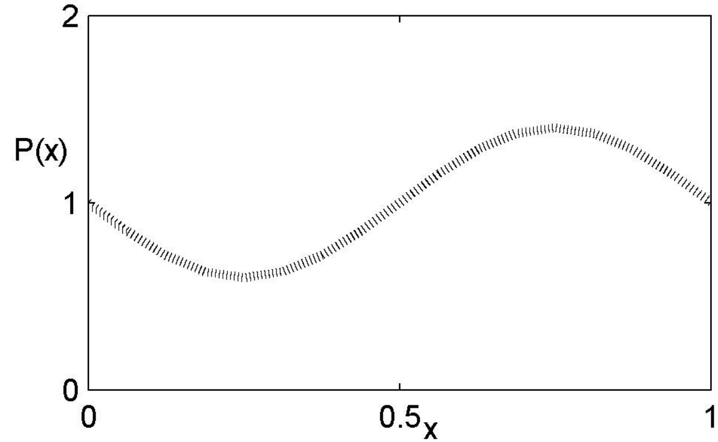
Sum — средняя плотность популяций.

Функция роста переменна по ареалу

$$\begin{cases} u = k_1 u'' + \eta_1 u f, \quad f = 1 - (u+v)/P(x), \\ v = k_2 v'' + \eta_2 v f, \\ \eta_2 = \eta_{20} + \eta_{21} \sin(2\pi x/a) \end{cases}$$

Условие косимметрии выполняется, если $\eta_{21} = 0$.

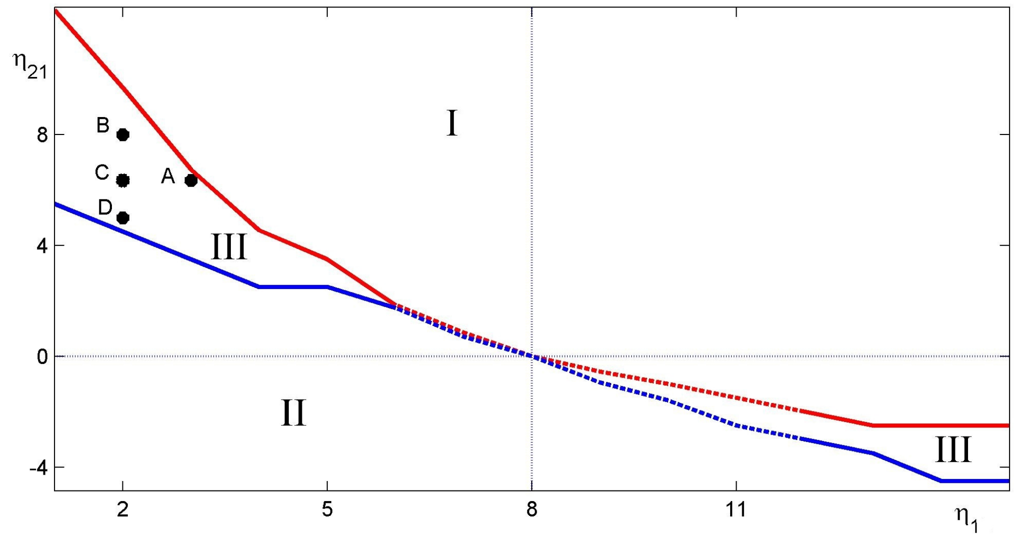




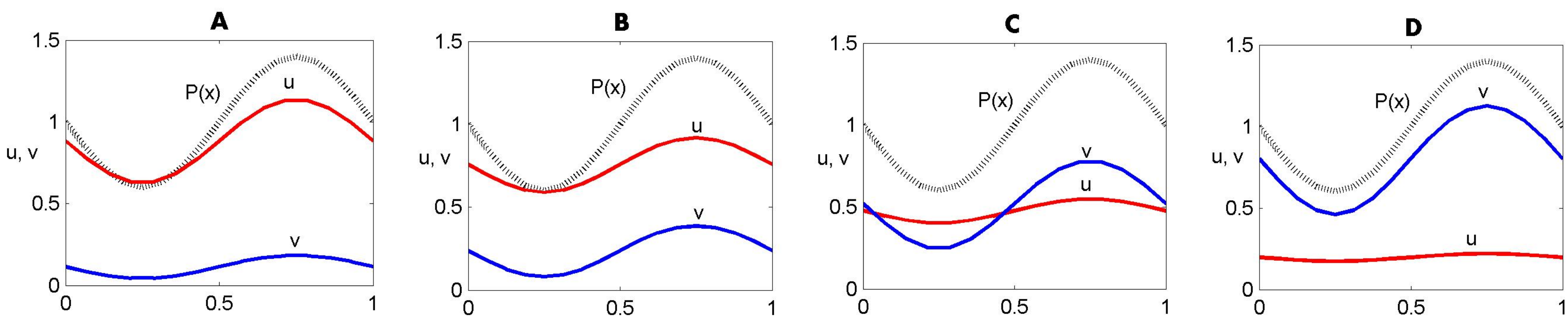
Профили функций роста η_1, η_2 и $P(x)$, $\eta_1 = 3$, $\eta_{20} = 16$, $\eta_{21} = 6$, $\mu = 0.4$, $a = 1$, $k_1 = 0.02$, $k_2 = 0.04$.

Неоднородный параметр роста

$\eta_{20} = 16$
I — выживание популяции u,
II — выживание популяции v,
III — сосуществование обеих популяций

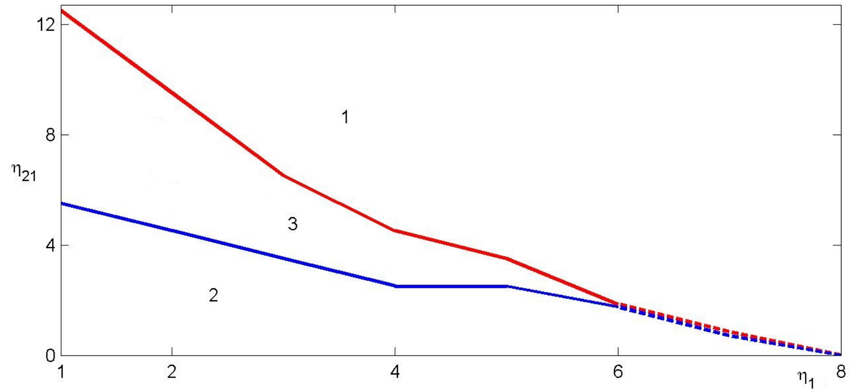


финальные распределения плотности популяций u, v

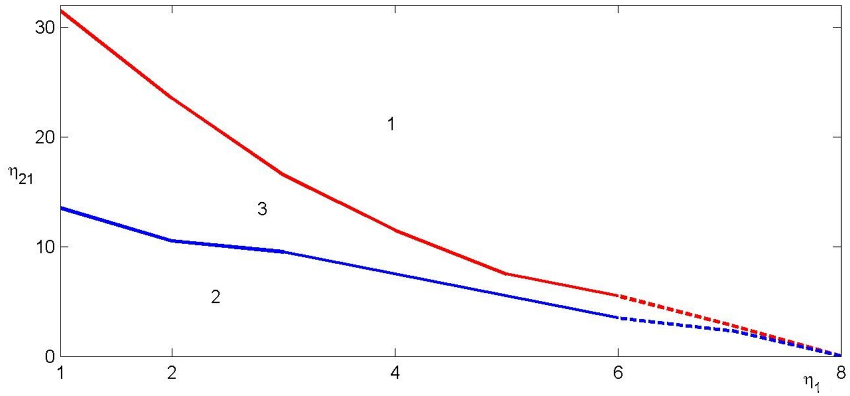


Карты режимов для переменного коэффициента роста η_2

1 — Выживание u
2 — Выживание v
3 — Сосуществование популяций
$k_2 = 0.04$, $k_1 = 0.02$

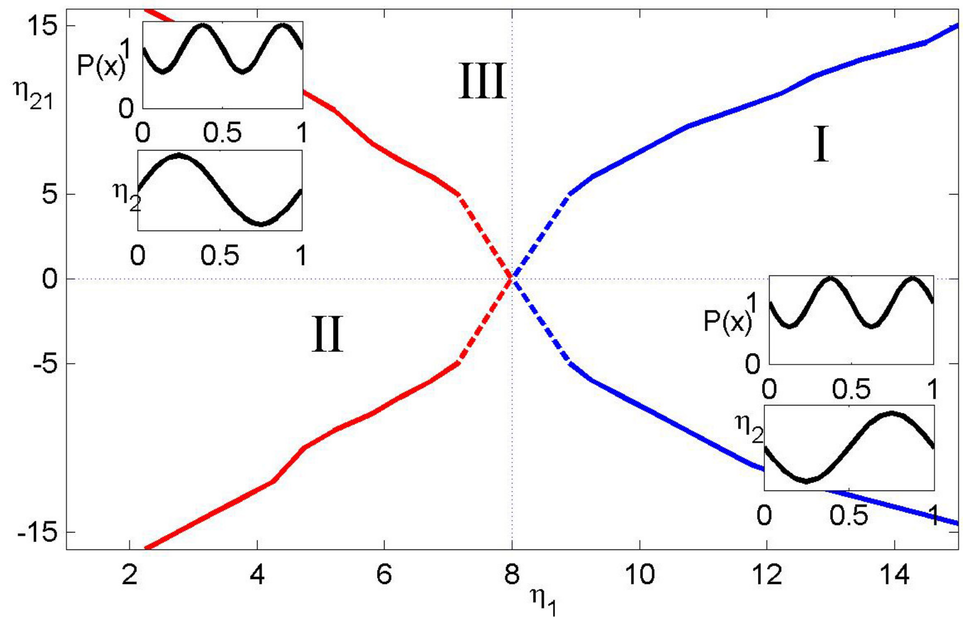


$k_2 = 0.1$, $k_1 = 0.02$

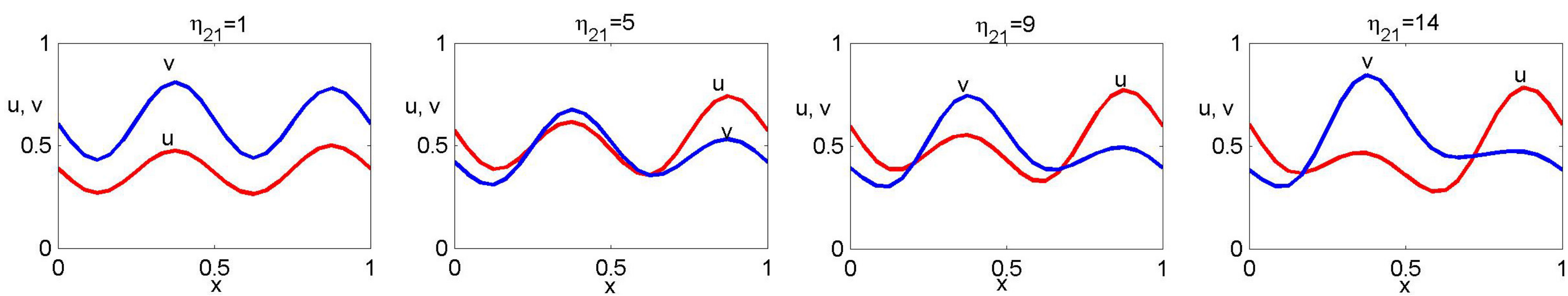


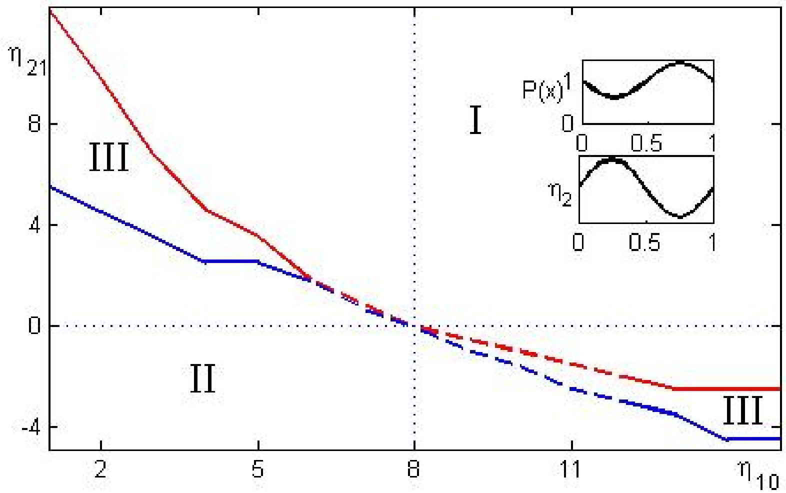
Карты режимов для функции ресурса с двумя модами

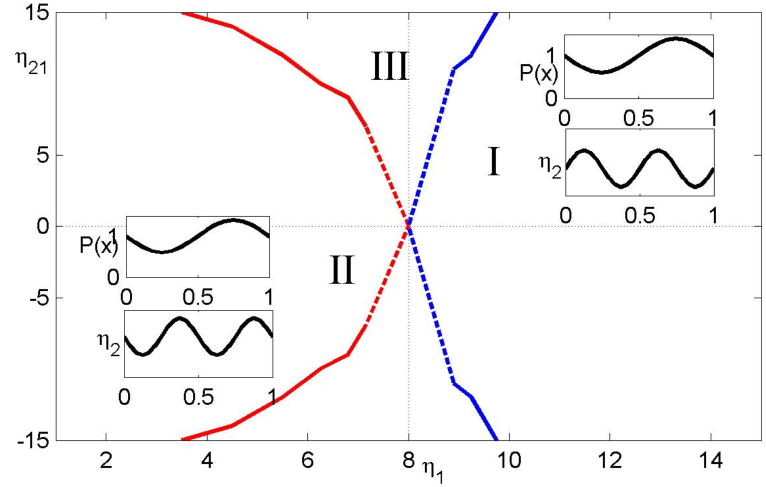
I — выживание популяции u,
II — выживание популяции v,
III — сосуществование обеих популяций

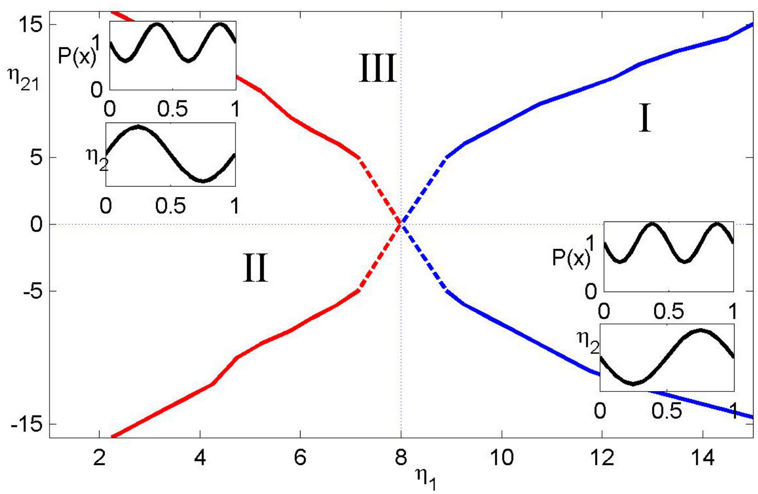


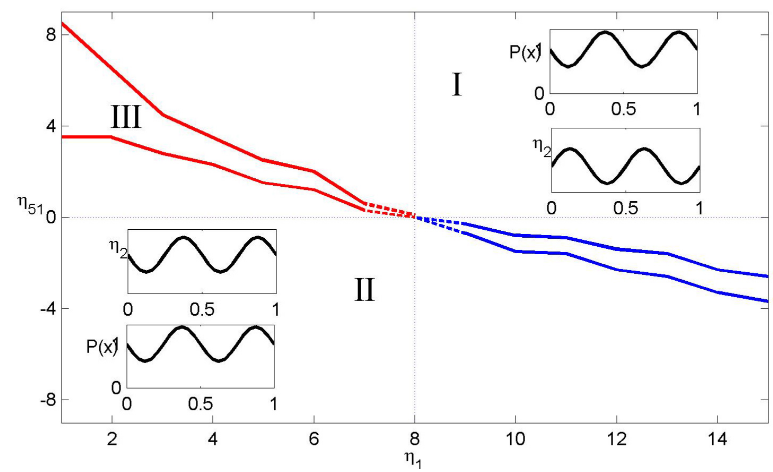
финальные распределения плотности популяций u, v при $\eta_1 = 8$











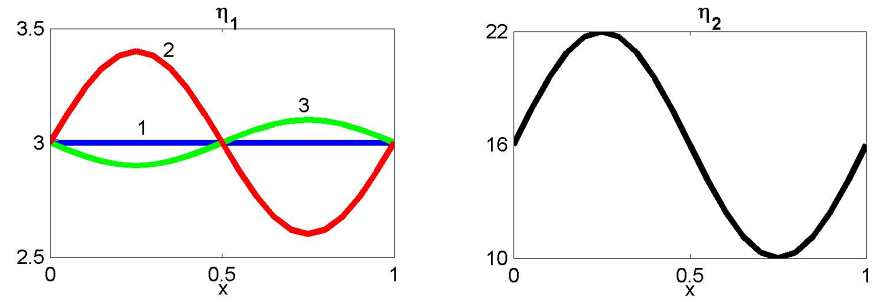
I — $(u, 0)$, II — $(0, v)$, III — (u,v).

Переменность коэффициентов роста $\eta_i = \eta_{i0} + \eta_{i1}\sin(2\pi x/a)$

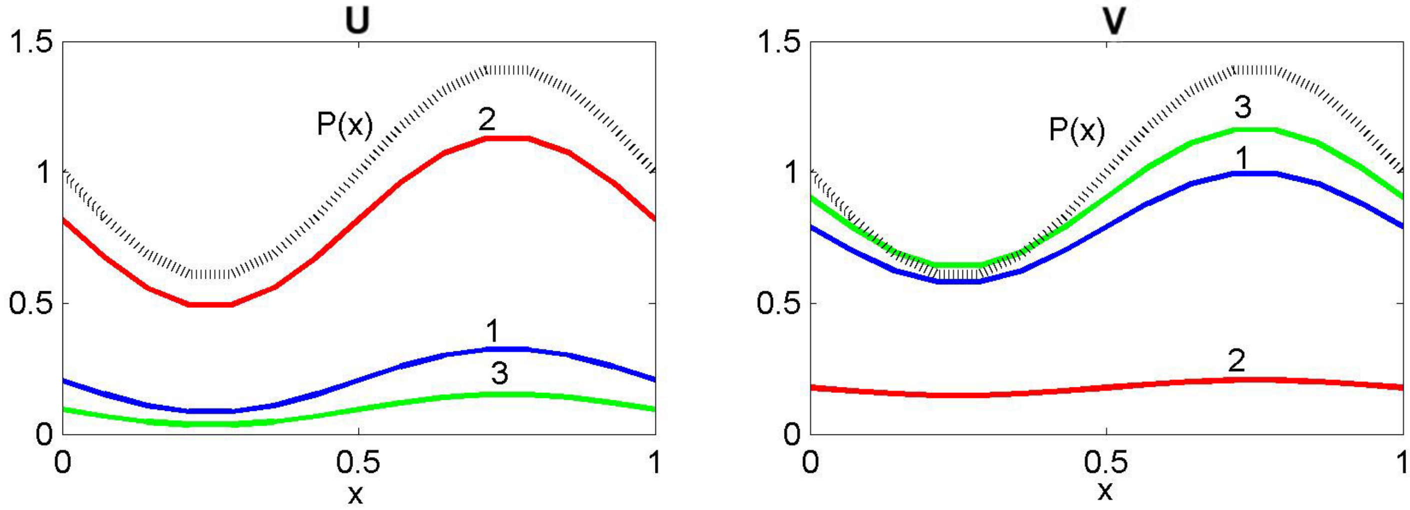
$$a = 1,\ k_1 = 0.02, \quad k_2 = 0.04,$$
$$\eta_1(x) = \eta_{10} + \eta_{11}\sin(2\pi x),$$
$$\eta_2(x) = \eta_{20} + \eta_{21}\sin(2\pi x).$$
$$\eta_{20} = 16, \eta_{21} = 6$$

1) $\eta_{11} = 0$, 2) $\eta_{11} = 0.4$, 3) $\eta_{11} = -0.1$

Профили функций роста η_1, η_2



Финальные распределения популяций u, v.



Заключение

1. Разработана численная схема для расчета динамики неантагонистических популяций в кольцевом ареале для изучения особенностей роста и эволюции популяций при пространственной неоднородности ”жизненных условий”.

2. В численном эксперименте проанализировано влияние неоднородной функции роста на формирование стационарных распределений плотности популяций.

3. Найдены случаи, при которых близкородственные популяции могут сосуществовать в одной области и случаи организации экологических ниш.