XV Всероссийская конференция-школа молодых исследователей
"Современные проблемы Математического Моделирования", 16-21 сентября 2013 г.

Многосеточный метод: этапы развития и современное состояние

Муратова Г.В.

Крукиер Л.А.

Андреева Е.М.

Южно-российский региональный центр информатизации Южного федерального университета

Ростов-на-Дону

muratova@sfedu.ru

Содержание

- Введение
- Многосеточный метод (MGM)
  - MGM: начало и основы
  - Геометрический и алгебраический multigrid
- MGM для задач вычислительной гидро-газодинамики (CFD)
  - MGM для уравнения Навье - Стокса
  - MGM для задач конвекции - диффузии
  - Специальные сглаживатели MGM для сильно несимметричных СЛАУ
- Выводы

Многосеточные методы:

прошлое, настоящее и будущее

О некоторых итогах развития современной вычислительной математики

Проф. Юрий Лаевский

Новосибирск, “Вычислительные технологии”, том 7 №2, 2002, стр. 74-83

Большие задачи математической физики

- Необходимость принципиально новых подходов для таких задач – появление алгоритмов нового поколения.
- Для больших задач важны вопросы усвоения исходных данных и обработки результатов, организации информационных потоков в процессе вычислений, способы хранения информации и т.д.- вычислительные технологии
- При их решении главное – архитектура ЭВМ, но существуют и общие технологические принципы
- Одним из основных требований к алгоритмам нового поколения является возможность их эффективного распараллеливания.

Многосеточные методы: история и основные этапы развития

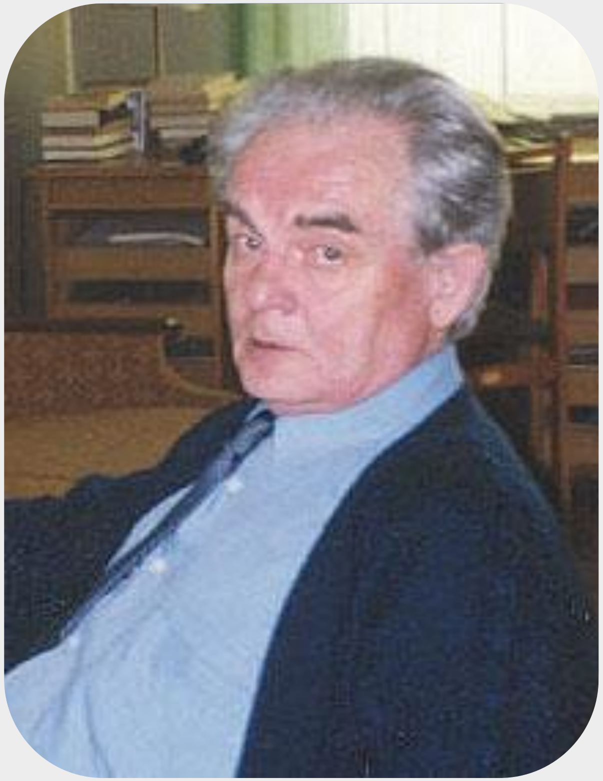
- В начале развития численных решений дифференциальных уравнений использовались методы типа Якоби и Гаусса – Зейделя
- Важный шаг развития – метод последовательной верхней релаксации (Young's SOR -method (1950)), более быстрый, чем метод Гаусса-Зейделя
- Недостаток (как и у прямых методов исключения) - сумма вычислительной работы не пропорциональна числу неизвестных; время вычислений, необходимое для решения задачи, растет быстрее, чем размерность задачи.
- Многосеточный метод – первый метод, преодолевший этот барьер сложности. Начальная точка – «золотое правило»:
- **Сумма вычислительной работы должна быть пропорциональна сумме реальных физических изменений в вычислительной системе.**

Многосеточные методы: история и основные этапы развития

- Основные идеи MGM были предложены проф. Р.П. Федоренко

Федоренко Р.П.
Релаксационный метод для решения эллиптических дифференциальных уравнений, Журнал вычислительной математики и математической физики». 1 (1961) стр.1092 - 1096.

- Профессор Федоренко Р.П. – выпускник Ростовского государственного университета



11.03.1930 -13.09.2009

Многосеточные методы: история и основные этапы развития

- Н.С. Бахвалов (1966) рассмотрел теоретически более сложный случай с переменными коэффициентами

Н.С. Бахвалов « О сходимости релаксационного метода

с естественной структурой
для эллиптического оператора»
(Журнал вычислительной математики и математической физики (1966),т.6 №5,
стр. 101-135.

29.05.1934 — 29.08.2005

Многосеточные методы: история и основные этапы развития

- Хотя основная идея комбинирования дискретизаций на различных сетках для итерационной схемы была вполне естественной, потенциал этой идеи не получил развития до середины 1970 -ых.
- Доклад Хакбуша (1976) и статья Брандта (1977) были прорывными моментами.
- Первая большая конференция по MGM в 1981 в Кельне была кульминационной точкой развития; материалы конференции под редакцией Хакбуша и Троттенберга (1982) до сих пор остаются актуальными.
- Монография Хакбуша 1985 г. завершила первый этап развития теории MGM.
- ***W. Hackbusch 'Ein iteratives Verfahren zur schnellen Auflosung elliptischer Randwertprobleme', Report 76-12, (1976), Mathematisches Institut der Universitat zu Koln.***
- ***A. Brandt (1977), 'Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems', Math. Comput. 31, 333-390.***
- ***W. Hackbusch and U. Trottenberg, eds (1982), Multigrid Methods, Proceedings, Koln 1981, Lecture Notes in Mathematics 960, Springer (Berlin, Heidelberg, NY).***
- ***W. Hackbusch (1985), Multigrid Methods and Applications, Springer (Berlin, Heidelberg, New York).***

Исследователи многосеточного метода

Государственная премия РФ в области науки и техники 2003 г.

за «Цикл основополагающих работ по созданию и последующее внедрение высокоэффективного многосеточного метода численного решения широкого класса задач математической физики»

д.ф.-м.н. Г.П.Астраханцев,
академик РАН Н.С.Бахвалов,
д.ф.-м.н. Р.П. Федоренко,
член-корр. РАН В.В. Шайдуров

Значительный вклад в развитие ММ внесли:

A. Brandt, P.Wesseling, U. Trottenberg, CW. Oosterlee, A Schüller, W. Briggs, W. Hackbusch, P. Vasilevsky, Z. Cao, Ю. Кузнецов, В. Тишкин, В. Жуков, М. Ольшанский и другие

Многосеточный метод

Основы многосеточного метода:

- последовательность иерархически вложенных сеток
- процедура сглаживания
- операторы перехода с мелкой сетки на грубую и обратно (restriction, prolongation)
- Грубосеточная коррекция

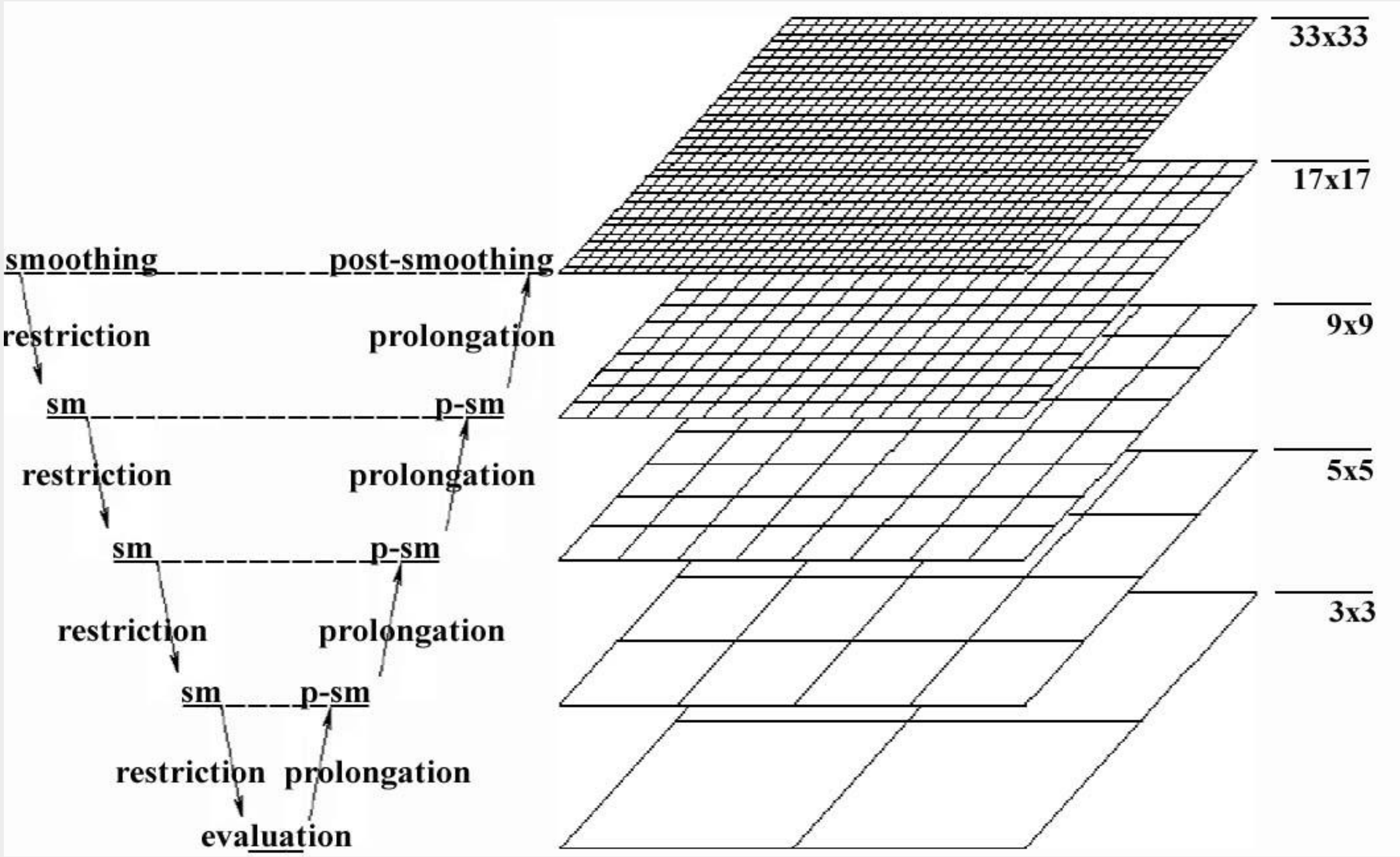
Двухсеточный метод

- Сглаживание (smoothing) $L_h u_h^n = f_h$
- Грубосеточная коррекция $\xrightarrow{\nu_1} \bar{u}_h^n$
  - Вычисление невязки (дефекта) $d_h = f_h - L_h \bar{u}_h^n$
  - Ограничение дефекта (перенос с мелкой сетки на грубую) $d_{2h} = R_h^{2h} d_h$
  - Решение на грубой сетке $L_{2h} v_{2h} = d_{2h}$
  - Перенос ошибки с грубой сетки на мелкую с помощью интерполяции $v_h = P_{2h}^h v_{2h}$
  - Вычисление новой аппроксимации $u_h^n = \bar{u}_h^n + v_h$
- Postsmoothing $L_h u_h^n = f_h \xrightarrow{\nu_2} \boldsymbol{u}_h^{n+1}$

Многосеточный метод

- Каскадный алгоритм
- V – цикл
- W – цикл
- Полный MGM

Структура многосеточного метода (V – цикл)



Геометрический multigrid (GMG) и алгебраический многоуровневый multigrid (AMG)

- Основная разница между GMG и AMG: для AMG не требуется информации о геометрии области.
- Применение AMG method – для задач, в которых затруднено или невозможно использование геометрического многосеточного метода - неструктурированные сетки, анизотропные задачи, декомпозиция области и др.

- **A. Brandt, Algebraic multigrid theory: the symmetric case, Appl. Math. Comput. 19 (1986) 23–56.**
- ***V.E. Henson, P.S. Vassilevski, Element-free AMGe: general algorithms for computing interpolation weights in AMG, SIAM J. Sci. Comput. 23 (2001) 629–650***
- **R.D. Falgout, An introduction to algebraic multigrid, Comput. Sci. Eng. 8 (2006) 24–33.**
- **Y. Xiao, S. Shu, P. Zhang, M. Tan, An algebraic multigrid method for isotropic linear elasticity problems on anisotropic meshes, Int. J. Numer. Biomed.Eng. 26 (2010) 534–553.**

Фурье-анализ – инструмент оценки MGM

- Сходимость многосеточного алгоритма зависит от сглаживателя, который должен обладать сглаживающим свойством
- Удобным инструментом для исследования свойств сглаживания и эффективности многосеточной технологии является Фурье-анализ (MPA and LFA)
- Эффективность сглаживателя зависит от рассматриваемой задачи

- **U. Trottenberg, C.W. Oosterlee, A. Schuller, Multigrid, Academic Press, New York, 2001.**
- ***V.E. Henson, P.S. Vassilevski, Element-free AMG: general algorithms for computing interpolation weights in AMG, SIAM J. Sci. Comput. 23 (2001) 629–650***
- ***R.D. Falgout, An introduction to algebraic multigrid, Comput. Sci. Eng. 8 (2006) 24–33.***

Уравнения Навье-Стокса - основа явлений и технических задач (computational fluid dynamics problems –CFD)

- **также представляют большой интерес для математиков, т.к.**
- пока ещё не доказано, что в трехмерном случае решение всегда существуют, или, если оно существуют, то не содержит сингулярностей
- **существование и гладкость решений уравнений Навье — Стокса** — одна из семи математических задач тысячелетия, сформулированная в 2000 году институтом Клэя, за решение которой предложен приз в 1 000 000 $

MGM для решения уравнений Навье-Стокса для несжимаемой нестационарной жидкости

- Было доказано, что классический multigrid method очень эффективен для решения уравнения Пуассона для давления, и реализуем с минимальными вычислительными затратами.
- **A.Brandt, Multigrid techniques:1984 guide with applications to fluid dynamics, Weizmann Institute of Science, 1995.**
- **A.Brandt, I.Yavneh, On multigrid solution of high Reynolds incompressible entering flows, J.Comp.Phys.101 (1992) pp. 151–164.**

Гибридный многосеточный метод решения уравнений Навье-Стокса для несжимаемой нестационарной жидкости

ЮгИнфо

Южный федеральный университет

- Данный алгоритм представлен для несжимаемых потоков с большими числами Рейнольдса, основанный на комбинировании многосеточного метода и метода последовательной регуляризации.
- The velocity–pressure increment and sequential regular equations получены из уравнений Навье-Стокса. Ускорение сходимости происходит за счет использования метода pressure increment method and the optimum relaxation sweep methods.
- **Zhang Shesheng , Department of Applied Mathematics, The Weizmann Institute of Science, Israel,**
  A hybrid multigrid method for the unsteady incompressible Navier–Stokes equations. Applied Mathematics and Computation 138 (2003). Pp. 341–353

Алгебраический MGM для эффективного решения нестационарных гидродинамических задач на основе GPGPU

- Данная модификация проста в реализации и позволяет сократить количество постановок задачи на сетке, что экономит до 50% вычислительного времени по сравнению с немодифицированным алгоритмом

D.E. Demidov, D.V. Shevchenko Russian Academy of Sciences, Kazan Branch of Joint Supercomputer Center Russia. Modification of algebraic multigrid for effective GPGPU-based solution of nonstationary hydrodynamics problems, Journal of Computational Science 3 (2012) 460–462

Уравнение Навье-Стокса

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{1}{R_\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=f_1, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{1}{R_\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)=f_2, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad (3)$$

$$\Omega=[0,1]\times[0,1],$$

$$u(x,y,t)\big|_{\partial\Omega}=g_1(x,y,t), \qquad u(x,y,t)=g_1(x,y,0),$$

$$v(x,y,t)\big|_{\partial\Omega}=g_2(x,y,t), \qquad v(x,y,t)=g_2(x,y,0),$$

$$p(x,y,t)=g_3(x,y,0).$$

Один из алгоритмов решения уравнений Навье-Стокса

- Для аппроксимации временной производной и инерциальной первой производной используется метод траекторий
- Пространственная дискретизация выполняется с помощью МКЭ. Используется смешанная формулировка – комбинация простых конечных элементов (билинейных для скоростей и постоянных для давления)
- Такая комбинация обеспечивает устойчивость вычисления давления с дополнительным приложением численной фильтрации.
- Для решения полученной СЛАУ используется MGM
- ***Pironneau, O. On the Transport-Diffusion Algorithm and Its Applications to the Navier-Stokes Equations. Numerische Mathematics 38 (1982): p.p. 309-332.***

Модификация уравнения

$$\frac{1}{2u}\frac{Du^2}{Dt}+\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{1}{R_\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=f_1',$$

$$\frac{1}{2v}\frac{Dv^2}{Dt}+\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{1}{R_\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)=f_2',$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$\frac{1}{2u}\frac{Du^2}{Dt}=\frac{1}{2u}\left(\frac{\partial u^2}{\partial t}+\frac{\partial(u*u^2)}{\partial x}+\frac{\partial(v*u^2)}{\partial y}\right),$$

$$\frac{1}{2v}\frac{Dv^2}{Dt}=\frac{1}{2v}\left(\frac{\partial v^2}{\partial t}+\frac{\partial(u*v^2)}{\partial x}+\frac{\partial(v*v^2)}{\partial y}\right).$$

Дискретизация области

$$\frac{u}{2\tau}+\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{1}{R_\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=F_1,$$

$$\frac{v}{2\tau}+\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{1}{R_\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)=F_2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$\Omega_h=\left\{(x_i,y_i),x_i=ih,y_i=jh,i,j=0,1,\ldots,n\right\}$$

$$\omega_{i,j}=(x_i,x_{i+1})\times(y_j,y_{j+1})$$

MGM для полученной системы

Restriction Prolongation

$$R_h^{2h} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}_h^{2h} \qquad P_{2h}^{h} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2h}^{h}$$

Для компонент давления используется другой шаблон:

$$R_h^{2h} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_h^{2h} \qquad P_{2h}^{h} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{2h}^{h}$$

Smoother- Jacobi Method

$$u^{n+1} = u^n - \tau A^T (Au^n - f)$$

τ- iteration parameter

Project in progress

Модельная задача уравнения конвекции-диффузии

$$-\frac{1}{Pe}\Delta u+\frac{1}{2}(v_1u_x+(v_1u)_x+v_2u_y+(v_2u)_y)=f$$

$$u|_{\partial\Omega}=0,\qquad \Omega=[0,1]\times[0,1]\qquad divV=\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}=0$$

$$V=(v_1(\boldsymbol{x}),v_2(\boldsymbol{x}))$$

W. Hackbusch, T. Probst, Downwind Gauss–Seidel smoothing for convection dominated problems, Numer.Linear Algebra Appl. 4 (1997)85–102.

G. Kanschat, Robust smoothers for high-order discontinuous Galerkin discretisations of advection–diffusion problems, J. Comput. Appl. Math. 218 (2008) 53–60.

L.A. Krukier, L.G. Chikina, T.V. Belokon, Triangular skew-symmetric iterative solvers for strongly nonsymmetric positive real systems of equations, Appl. Numer. Math. 41 (2002) 89 -105.

G.V. Muratova, E.M. Andreeva, Multigrid method for solving convection–diffusion problems with dominant convection, J.Comput.Appl.Math. 226(2009) 77–83.

MGM с TIM в качестве сглаживателя

$$Au = f$$

$$A = A_0 + A_1 \qquad A_0 = \frac{1}{2}(A + A^*) \geq 0 \qquad A_1 = \frac{1}{2}(A - A^*)$$

$$A_1 = K_l + K_u \qquad K_l = -K_u^* \qquad R = K_l - K_u$$

$$\|A_0\| << \|A_1\|$$

$$B\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = f,$$

Сглаживатели MGM

- **TIM** $$B=E+2\tau K_l \text{ or } B=E+2\tau K_u$$
- **TIM1**

$$B=\alpha E+2K_l \text{ or } B=\alpha E+2K_u \quad \alpha=\|M\|$$

- **TIM2**

$$B=\alpha_i E+2K_l \text{ or } B=\alpha_i E+2K_u$$

$$\alpha_i=\sum_{j=1}^{n}\left|m_{ij}\right|, i=0,n \quad M=\left\{m_{ij}\right\} \quad M=A_0+K_u-K_l$$

Численные эксперименты

$$-\frac{1}{Pe}\Delta u+\frac{1}{2}(v_1u_x+(v_1u)_x+v_2u_y+(v_2u)_y)=f$$

$$u|_{\partial\Omega}=0, \qquad \Omega=[0,1]\times[0,1]$$

$$u(x,y)=sin(\pi x)sin(\pi y)e^{xy}$$

Pe = 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000

$$A_h u_h = f_h$$

$$A=A_0+A_1, \qquad A_0=0.5(A+A^*)\geq 0, \qquad A_1=0.5(A-A^*), \qquad A_1=K_U+K_L$$

32×32, 64 × 64, 128 × 128, 256 × 256, 512x512

Коэффициенты скорости

Problem	***V1(x, y)***	***V2 (x,y)***
1	1	-1
2	1-2x	2y-1
3	X+Y	X-Y
4	Sin (2Pi x)	-2Pi cos (2Pi x)

Число итераций MGM Problem1: v1= 1, v2=-1

Pe	MGM (Seidel)	MGM TIM	MGM TIM1	MGM TIM2	K=Pe*h/2
10	13	35	30	30	0,1562
100	63	7	5	5	1,5625
1000	A	13	9	9	15,625
10000	A	75	58	58	156,25
100000	A	535	460	430	1562,5

Число итераций MGM и процессорное время
Problem2 : V1= 1-2x   V2= 2y-1

Pe	MGM (Seidel)	MGM TIM	MGM TIM1	MGM TIM2	K=Pe*h/2
10	22	72	53	50	0,1562
100	18	24	19	14	1,5625
1000	A	16	12	6	15,625
10000	A	59	51	32	156,25
100000	A	384	522	165	1562,5

Число итераций MGM и процессорное время
Problem 3: v1= x+y, v2 = x-y

Pe	MGM (Seidel)	MGM TIM	MGM TIM1	MGM TIM2	K=Pe*h/2
10	16	43	35	35	0,1562
100	23	10	7	5	1,5625
1000	N	16	12	8	15,625
10000	N	74	55	36	156,25
100000	N	570	441	258	1562,5

Число итераций MGM и процессорное время Problem4: v1 = sin (2Pi x), v2 =-2Pi ycos(2Pix)

Pe	MGM (Seidel)	MGM TIM	MGM TIM1	MGM TIM2	K=Pe*h/2
10	17	42	32	27	0,1562
100	N	16	12	7	1,5625
1000	N	30	22	10	15,625
10000	N	193	159	65	156,25
100000	N	A	A	A	1562,5

Доказательство сходимости модификации MGM

- G.V. Muratova, E.M. Andreeva, Multigrid method for solving convection–diffusion problems with dominant convection, J.Comput.Appl.Math. 226(2009) 77–83.
- G.Muratova Multigrid method for convection-diffusion problems with a small parameter. Math. Modelling, 2001, V.13, N3, P. 69-76
- L.Krukier, G.Muratova The solution of convection – diffusion stationary problem with dominant convection by Multigrid method with special smoothers – Math. Modelling, 2006,V.18, N5, P 63-72.

Были использованы результаты:

- R.P.Fedorenko. A relaxation method for solving elliptic difference equations Russian J. Comput. Math. and Math. Phys., 1961, V.1, N5, P.1092-1096
- W. Hackbusch. Multigrid method and application - Springer - Verlag, Berlin, 1985, p.293 - 299.
- Cao, Z. Convergence of Multigrid Methods for nonsymmetricindefinite problems. Appl.Math.Comp. N28 P.269-288, 1988
- Mandel, J. Multigrid Convergence for nonsymmetric indefinite variational problems and one smoothing step. -Appl. Math. Comput., N19, P.201-216, 1986

Выводы

- Продолжаются интенсивные исследования МКЭ с целью поиска конечномерных пространств, наиболее адекватно отвечающих исходной дифференциальной задаче. Упор делается на описание векторных полей и использование неструктурированных сеток.
- Для решения СЛАУ имеется достаточно богатый набор алгоритмов. Основная задача – разработка качественных программ с учетом распараллеливания, эффективных критериев останова и организации широкомасштабного тестирования на больших реальных задачах.
- Разработка новых эффективных возможностей решения СЛАУ, полученных в результате аппроксимации больших задач, связана, главным образом, с построением новых оптимальных по затратам переобусловливателей, учитывающих все влияющие на обусловленность исходной системы параметры. При этом основная роль отводится методам:
- декомпозиции области
- фиктивного пространства
- многоуровневой декомпозиции
- полуаналитическим (с явным выделением особенностей, погранслоев, внутренних фронтов и т.д.)

Выводы

- Предложенный изначально как способ численного решения эллиптических задач, многосеточный метод и его модификации широко используются в различных задачах из многих предметных областей.
- Существуют два подхода, определяемых способами работы с информацией о построении сеток (уровней) : геометрический multigrid (GMG) and алгебраический multigrid (AMG).
- MGM активно используется в задачах CFD (computational fluid dynamics). Существует много модификаций и гибридных многосеточных методов (с использованием переобусловливателей, методов декомпозиции области, распараллеливания и др.)
- Для уравнения Навье-Стокса приведен один из алгоритмов, смешанного MGM, включающий метод характеристик и МКЭ
- Для сильно несимметричных СЛАУ предложена модификация MGM со сглаживателями специального вида (ТКМ)
- Фурье-анализ-мощный инструмент для оценки эффективности многосеточного метода. Сглаживающий Фурье-анализ обеспечивает исследования сглаживателя.

Спасибо за внимание

Желаем плодотворной работы
и хорошей погоды!

muratova@sfedu.ru