



О моделировании пассивного массопереноса в русловых потоках

Надолин Константин Аркадьевич

Южный федеральный университет,
Ростов-на-Дону

**«Всего на территории России -
порядка 2,5 миллионов рек»**

Википедия

«Нельзя объять необъятное!»

К.Прутков















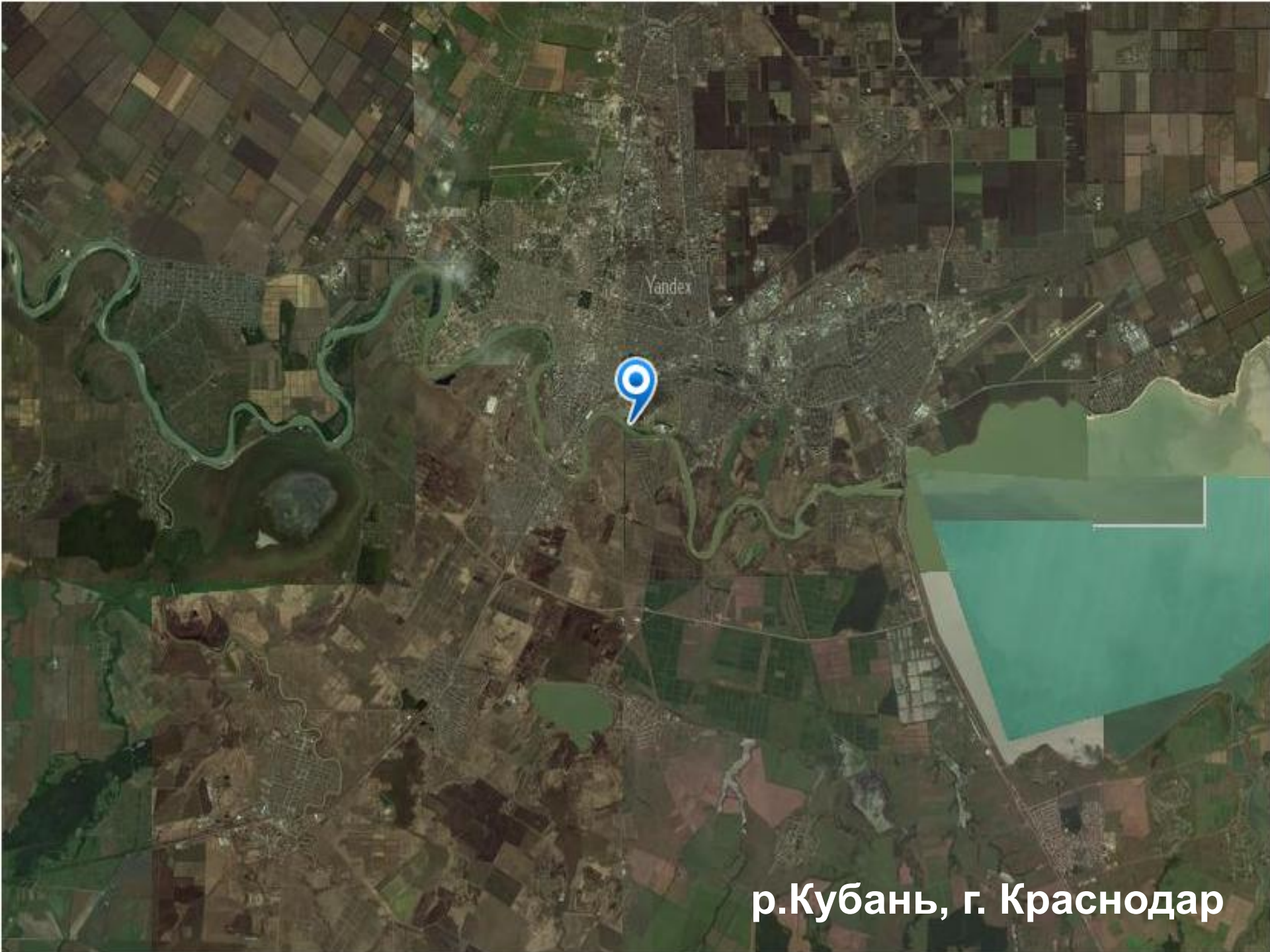


В чем сложность моделирования?

- Разнообразиие потоков (бывают медленные и плавные, а бывают бурные и извилистые)
- Разнообразиие геометрии (могут быть относительно прямолинейными, а могут быть очень искривленными с островами и рукавами)
- Мелководность и протяженность (отношение между глубиной и шириной русла равнинных рек колеблется в пределах от 0.1 до 0.005)
- Естественные водотоки турбулентные

Какая должна быть размерность модели?

- 1D?
- 3D??
- 2D???
 - 2D – плановая?
 - 2D – профильная??
 - 2D – на сечении???



Yandex



р.Кубань, г. Краснодар



Яндекс

р.Кубань, г. Краснодар



р.Кубань, г. Краснодар

Некоторые выводы из наблюдений

- Нет шансов предложить **единую и одновременно эффективную** математическую модель для всех типов русловых потоков => надо четко определять объект моделирования
- Точность гидрологических измерений для реальных потоков ограничена => велика погрешность в постановке начальных и граничных условий (сводит на нет усилия трехмерного моделирования)
- Естественные потоки не являются ни одномерными, ни трехмерными в полной мере => использование для спокойных потоков трехмерных моделей (в полном смысле) не оправдано => нужны упрощенные модели
- Необходимо учитывать турбулентность

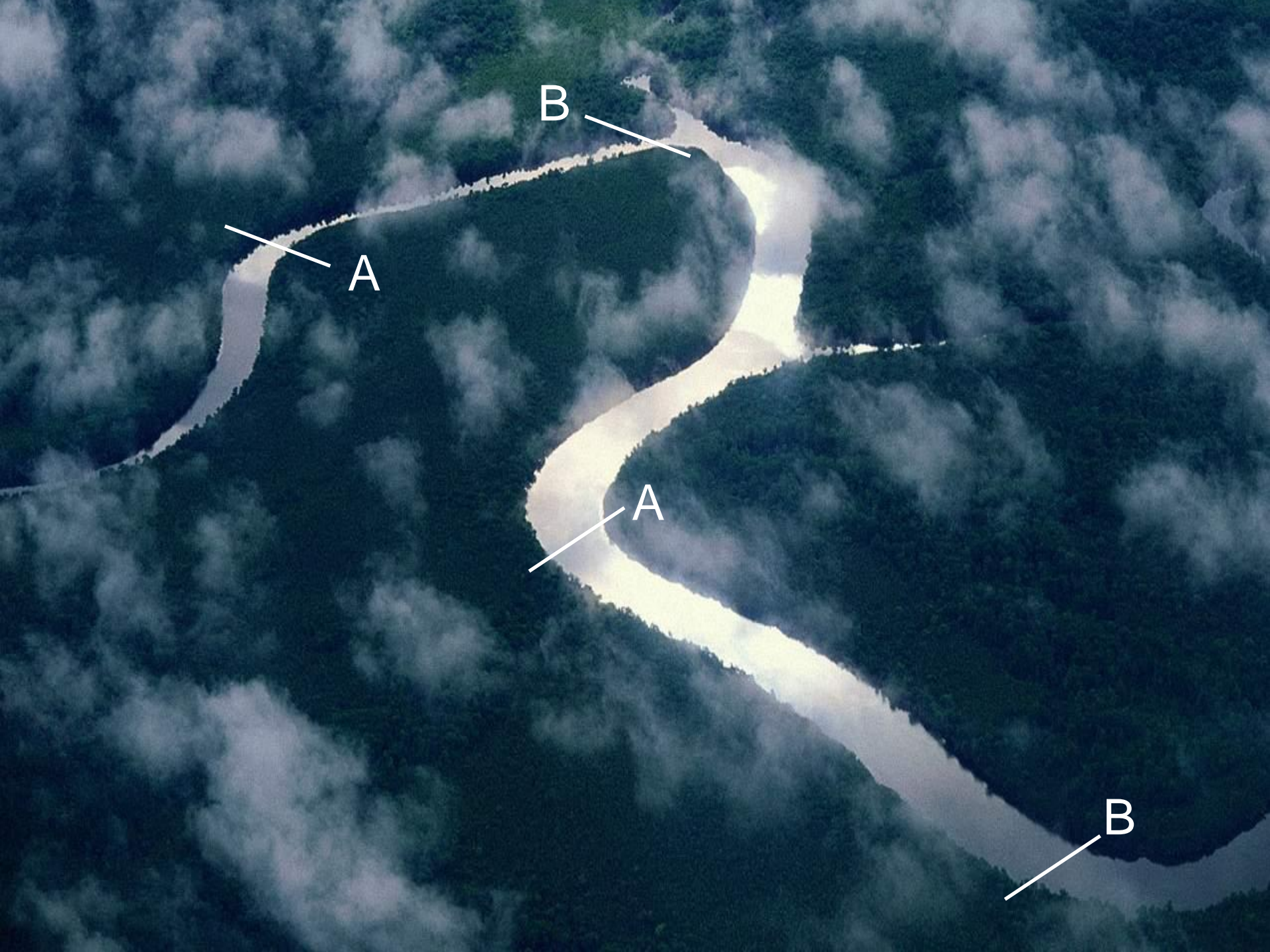
Постановка задачи

Объект моделирования

- Пассивный массоперенос открытым турбулентным потоком
 - Кривизна рассматриваемого потока считается малой, а течение - спокойным
 - Длина участка много больше его ширины
 - Ширина потока много больше его глубины

Цель

- Получить редуцированные модели гидродинамики и массопереноса для потоков разных типов, которые
 - более просты для численного и аналитического решения по сравнению с полными уравнениями
 - обеспечивают приемлемую точность результатов моделирования
 - согласуются с известными результатами
 - могут быть откалиброваны на основе имеющихся экспериментальных данных



B

A

A

B



A

B

р. Дон, г. Ростов-на-Дону



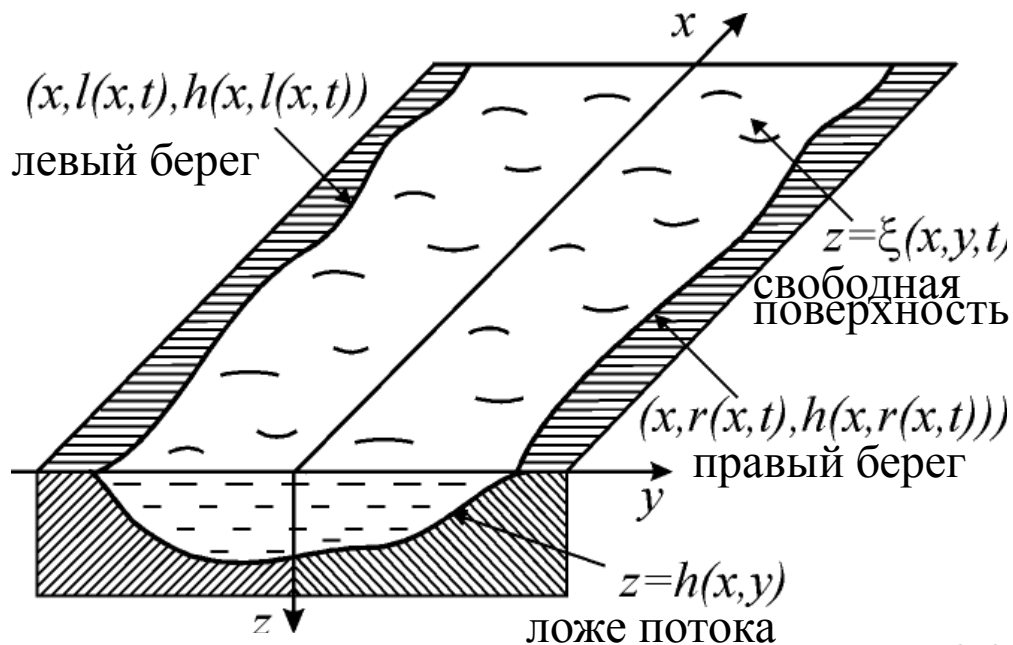
р. Рейн, г. Лейден²⁰



р. Схи, г. Дельфт 21

1. Постановка задачи. Основные уравнения

Геометрия потока и система координат



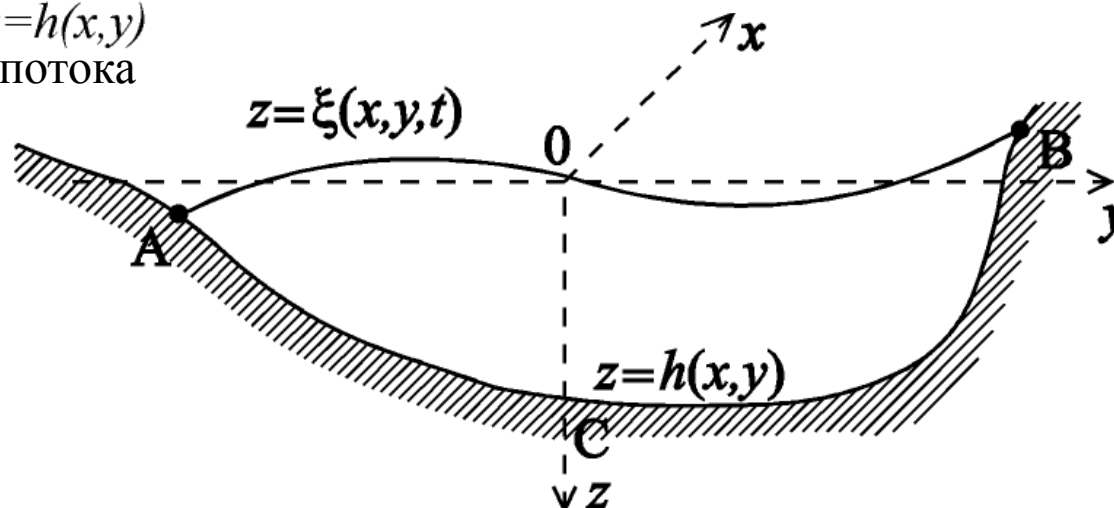
$$h(x, y) - \xi(x, y, t) = 0$$

\Downarrow

$$y = l(x, t), \quad y = r(x, t)$$

$$h(x, y) > 0$$

$$l(x, t) < y < r(x, t)$$



Уравнения гидродинамики

■ Уравнения Рейнольдса + гипотеза Буссинеска

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \operatorname{div} \left((\eta + \eta_T) (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) \right) + \rho \mathbf{g}$$

\mathbf{v} – скорость;

η – молекулярная вязкость;

p – давление;

\mathbf{g} – гравитационная постоянная

ρ – плотность;

η_T – турбулентная вязкость;

■ Условие несжимаемости

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

Начальные и граничные условия

- Начальные условия

$$\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}^0$$

- Граничные условия на поверхности

Кинематические

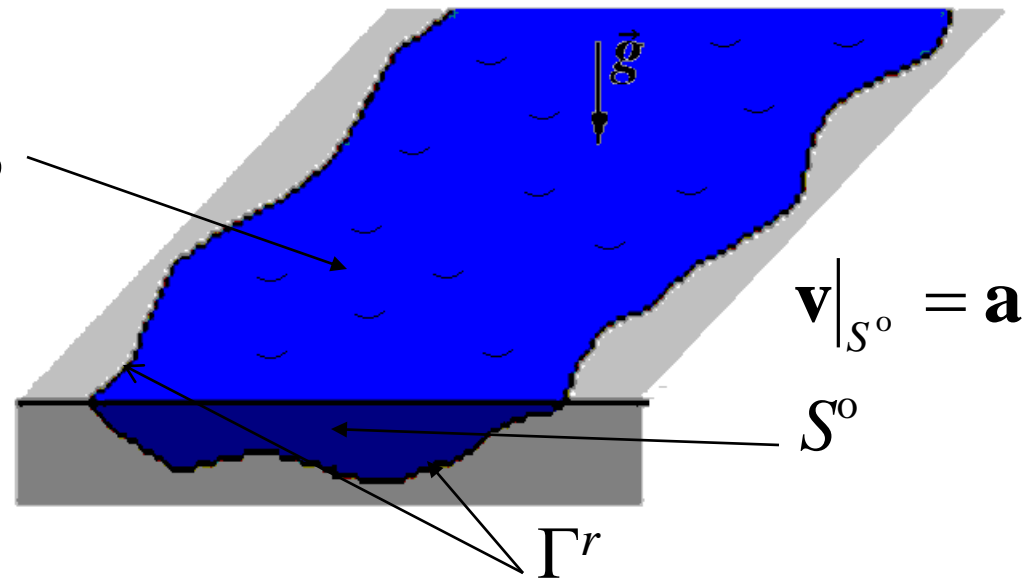
$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + (\mathbf{v}|_{\zeta}, \nabla \zeta) = 0$$

Динамические

$$\left(p\mathbf{I} - \eta(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) \right) \mathbf{n}|_{\zeta} = \mathbf{f}$$

- Граничные условия на входе и выходе

$$S^e \quad \mathbf{v}|_{S^e} = \mathbf{b}$$



$$\mathbf{v}|_{S^o} = \mathbf{a}$$

$$S^o$$

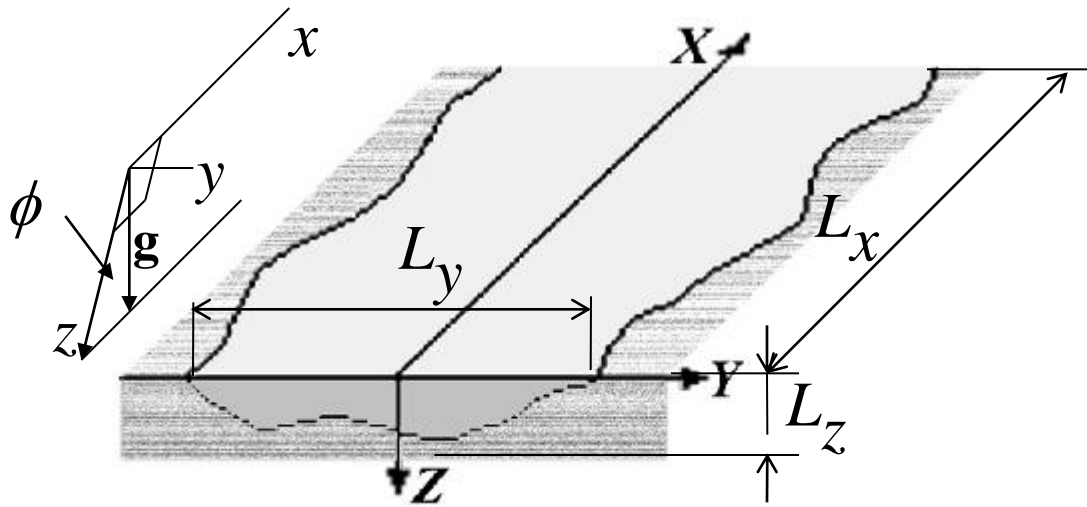
$$\Gamma^r$$

- Граничные условия на дне

$$\mathbf{v}|_{\Gamma^r} = 0$$

2. Переход к безразмерным переменным

Масштабы и параметры



Линейные масштабы:

L_x – по направлению x

L_y – по направлению y

L_z – по направлению z

Масштабы скорости:

$$U_x = Q / (\rho L_y L_z)$$

$$U_y = \delta U_x$$

$$U_z = \varepsilon U_y = \varepsilon \delta U_x$$

Число Рейнольдса

$$Re = \frac{U_x L_z}{\eta + \eta_T} \Big|_{z=\xi}$$

Малые параметры

$$\varepsilon = L_z / L_y$$

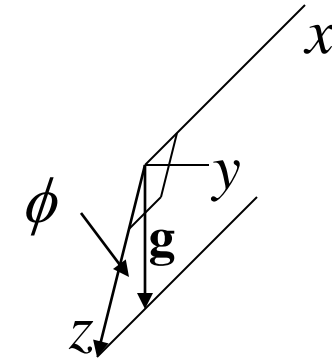
$$\delta = L_y / L_x$$

Масштаб времени:
(плавное течение)

$$L_x / U_x;$$

Масштаб давления: $\rho U_x^2 / L_x$

x - координата



$$\begin{aligned} \varepsilon \delta \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \\ = -\varepsilon \delta \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \right. \\ \left. + \varepsilon^2 \delta^2 \left[2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \right) + Fr^{-1} \sin \phi \end{aligned}$$

$$\mu = \frac{\eta + \eta_T}{\eta + \eta_T|_{z=\xi}} \quad \text{- параметр турбулентности;}$$

$$Fr = (U_x^2 / gL_z) \quad \text{- число Фруда}$$

y- и z- координаты

$$\begin{aligned} \varepsilon \delta^2 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -\varepsilon \frac{\partial p}{\partial y} + \delta \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \right. \\ &+ \varepsilon^2 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \varepsilon^2 \delta^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Bigg) \\ \varepsilon^2 \delta^2 \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= \\ &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \varepsilon \delta \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \right. \\ &+ 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \varepsilon^2 \delta^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) \Bigg) + Fr^{-1} \cos \phi \end{aligned}$$

- Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

- Граничные условия на твердом дне $z = h(x, y)$

$$u = v = w = 0$$

- Граничные условия на свободной поверхности

$$z = \xi(x, y, t)$$

Кинематическое

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} - w = 0$$

Динамические

$$\varepsilon \delta \operatorname{Re} p \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} - \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \varepsilon^2 \delta^2 \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = f_x$$

$$\varepsilon \operatorname{Re} p \frac{\partial \xi}{\partial y} + \delta \frac{\partial v}{\partial z} - \varepsilon^2 \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial x} + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \varepsilon^2 \delta^3 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \delta f_y$$

$$\operatorname{Re} p + \varepsilon \delta \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial y} - 2 \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \varepsilon^3 \delta \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \varepsilon^3 \delta^3 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \varepsilon \delta f_z$$

Классификация потоков

	Тип потока	ε	δ	
1	Мелкий протяженный	$o(1)$	$O(\varepsilon)$	$\varepsilon = \delta$
2	Сверхмелкий протяженный	$o(\delta)$	$o(1)$	$\varepsilon = \delta^2$
3	Мелкий сверхпротяженный	$o(1)$	$o(\varepsilon)$	$\delta = \varepsilon^2$
4	Мелкий широкий поток	$o(1)$	$O(1)$	$\delta = 1$
5	Глубокий протяженный	$O(1)$	$o(\varepsilon)$	$\varepsilon = 1$
6	Существенно трехмерный	$O(1)$	$O(1)$	$\varepsilon = \delta = 1$

3. Модели потоков

Мелкий протяженный поток

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\varepsilon^2 \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^4 \left[2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \right) + Fr^{-1} \sin \phi \\ \varepsilon^2 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^2 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \varepsilon^4 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) \\ \varepsilon^4 \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \varepsilon^4 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + Fr^{-1} \cos \phi \end{aligned}$$

Условия на свободной границе

(внешнее воздействие отсутствует : $f_x = f_y = f_z = 0$)

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon^2 \operatorname{Re} p \frac{\partial \xi}{\partial x} - \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \varepsilon^4 \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \operatorname{Re} p \frac{\partial \xi}{\partial y} - \varepsilon^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial x} + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \varepsilon^4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$$

$$\operatorname{Re} p + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial y} - 2 \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \varepsilon^4 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \varepsilon^6 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$$

Разложение по малому параметру

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots$$

$$v = v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots$$

$$w = w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \dots$$

$$p = p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots$$

$$\xi = \xi_0 + \varepsilon \xi_1 + \varepsilon^2 \xi_2 + \dots$$

Редуцированная математическая модель

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) = -GI ; \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v_0}{\partial z} \right) = \text{Re} \frac{\partial p_0}{\partial y}$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial z} = - \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \quad \frac{\partial p_0}{\partial z} = G \text{Re}^{-1}$$

Гравитационный
параметр

$$G = (gL_z / U_x^2) \cos \phi$$

Уклон $I = \text{tg} \phi$

■ **Граничные условия:**

при $z = h(x, y) \quad u_0 = v_0 = w_0 = 0$

при $z = \xi_0(x, y, t) \quad p_0 = 0 \quad \frac{\partial u_0}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial v_0}{\partial z} = 0$

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \xi_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \xi_0}{\partial y} - w_0 = 0$$

Решение выражается через $\xi(x, y, t)$

- Нулевой индекс опущен

$$p = G \operatorname{Re}^{-1}(z - \xi) \quad u = GI(J_2 - \xi J_1) \quad v = G \frac{\partial \xi}{\partial y} (J_2 - \xi J_1)$$

$$w = G \left(I \frac{\partial}{\partial x} (J_4 - \xi J_3) + \frac{\partial}{\partial y} \left((J_4 - \xi J_3) \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \right)$$

$$J_1 = \int_z^h \frac{d\tau}{\mu}$$

$$J_3 = \int_z^h J_1(x, y, \tau) d\tau$$

- Обозначено

$$J_2 = \int_z^h \frac{\tau d\tau}{\mu}$$

$$J_4 = \int_z^h J_2(x, y, \tau) d\tau$$

Уравнение свободной границы

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = G \left[I \left(\frac{\partial}{\partial x} (J_4 - \xi J_3) - (J_2 - \xi J_1) \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. + (J_4 - \xi J_3) \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (J_4 - \xi J_3) - (J_2 - \xi J_1) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right]$$

Здесь $J_i, i = 1, 2, 3, 4$ вычислены при $z = \xi(x, y, t)$

- Стационарная граница $\xi = \xi(x, y)$

$$I \left(\frac{\partial}{\partial x} (J_4 - \xi J_3) - (J_2 - \xi J_1) \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \\ + (J_4 - \xi J_3) \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (J_4 - \xi J_3) - (J_2 - \xi J_1) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 = 0$$

Какой может быть свободная граница?

- Свободная граница плоская и стационарная, т.е. $\xi \equiv 0$

$$p = G \operatorname{Re}^{-1} z \quad u = GI \int_z^h \frac{\tau d\tau}{\mu} \quad v = 0 \quad w = GI \frac{\partial}{\partial x} \int_z^h \int_\tau^h \frac{s ds}{\mu} d\tau$$

Должно быть выполнено условие $w|_{z=0} = 0 \Rightarrow h = h(y)$

- Свободная граница плоская, но нестационарная: $\xi = \xi(t)$

$$p = G \operatorname{Re}^{-1} (z - \xi) \quad u = GI (J_2 - \xi J_1) \quad v = 0$$

$$w = GI \left(\frac{\partial J_4}{\partial x} - \xi \frac{\partial J_3}{\partial x} \right) \quad \frac{d\xi}{dt} = w|_{z=\xi}$$

$$\left. \frac{\partial^2 J_4}{\partial x^2} - \xi \frac{\partial^2 J_3}{\partial x^2} \right|_{z=\xi} = \left. \frac{\partial^2 J_4}{\partial x \partial y} - \xi \frac{\partial^2 J_3}{\partial x \partial y} \right|_{z=\xi} = 0 \quad \text{Задаёт ограничение на форму русла}$$

Сверхмелкий протяженный поток

$$\begin{aligned}
 \delta^3 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\delta^3 \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \delta^4 \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \delta^6 \left[2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \right) + Fr^{-1} \sin \phi \\
 \delta^3 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -\delta \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \delta^3 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \delta^5 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) \\
 \delta^6 \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \delta^3 \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \delta^4 \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \delta^6 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + Fr^{-1} \cos \phi
 \end{aligned}$$

Условия на свободной границе

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \delta^3 \operatorname{Re} p \frac{\partial \xi}{\partial x} - \delta^4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \delta^6 \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \delta \operatorname{Re} p \frac{\partial \xi}{\partial y} - \delta^4 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial x} + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \delta^6 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$$

$$\operatorname{Re} p + \delta^3 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial y} - 2 \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \delta^7 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \delta^9 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$$

Редуцированная математическая модель

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) = -GI \qquad \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v_0}{\partial z} \right) = 0$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial z} = - \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \qquad \frac{\partial p_0}{\partial z} = G \operatorname{Re}^{-1}$$

■ Граничные условия: при $z = h(x, y)$ $u_0 = v_0 = w_0 = 0$

$$\text{при } z = \xi_0(x, y, t) \quad p_0 = 0 \quad \frac{\partial u_0}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial v_0}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \xi_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \xi_0}{\partial y} - w_0 = 0$$

Решение модельной системы

$$p = G \operatorname{Re}^{-1}(z - \xi) \quad (\text{нулевой индекс опущен})$$

$$u = GI(J_2 - \xi J_1) \quad v = 0 \quad w = GI \frac{\partial}{\partial x} (J_4 - \xi J_3)$$

- Уравнение свободной границы

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = GI \left(\frac{\partial}{\partial x} (J_4 - \xi J_3) - (J_2 - \xi J_1) \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)$$

$J_i, i = 1, 2, 3, 4$ вычислены при $z = \xi(x, y, t)$

Переменная y входит как параметр

Мелкий широкий поток

$$\begin{aligned}
 \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\varepsilon \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \varepsilon^2 \left[2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \right) + Fr^{-1} \sin \phi \\
 \varepsilon \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -\varepsilon \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \varepsilon^2 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \right) \\
 \varepsilon^2 \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \varepsilon \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \right] + Fr^{-1} \cos \phi
 \end{aligned}$$

Условия на свободной границе

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon \operatorname{Re} p \frac{\partial \xi}{\partial x} - \varepsilon^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \varepsilon \operatorname{Re} p \frac{\partial \xi}{\partial y} - \varepsilon^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0$$

$$\operatorname{Re} p + \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial y} - 2 \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \varepsilon^3 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) = 0$$

Редуцированная математическая модель

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) = -GI \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v_0}{\partial z} \right) = 0 \quad \frac{\partial w_0}{\partial z} = - \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right)$$

■ Граничные условия:

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} = G \operatorname{Re}^{-1}$$

при $z = h(x, y)$ $u_0 = v_0 = w_0 = 0$

при $z = \xi_0(x, y, t)$ $p_0 = 0$ $\frac{\partial u_0}{\partial z} = 0$ $\frac{\partial v_0}{\partial z} = 0$

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \xi_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \xi_0}{\partial y} - w_0 = 0$$

Т.е. совпадает с моделью сверхмелкого протяженного потока

Глубокий протяженный поток

$$\begin{aligned}
 \delta \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\delta \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \delta^2 \left[2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \right) + Fr^{-1} \sin \phi \\
 \delta^2 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \delta \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \delta^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) \\
 \delta^2 \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \delta \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \delta^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) + Fr^{-1} \cos \phi
 \end{aligned}$$

Условия на свободной границе

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \delta \operatorname{Re} p \frac{\partial \xi}{\partial x} - \delta^2 \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0$$

$$\operatorname{Re} p \frac{\partial \xi}{\partial y} + \delta \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial x} - 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \delta^3 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$$

$$\operatorname{Re} p + \delta \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial y} - 2 \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + \delta^3 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$$

Можно предполагать, что свободная граница стационарная и плоская

Редуцированная математическая модель (плоская стационарная свободная граница)

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) = -GI \quad \frac{\partial u_0}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad u_0 \Big|_{z=h} = 0$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left[\mu \left(\frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \right] + 2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{\partial w_0}{\partial z} \right) \right] = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \right] \quad \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = - \frac{\partial u_0}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad w_0 \Big|_{z=0} = 0 \quad v_0 = w_0 \Big|_{z=h} = 0$$

$$p_0 = G \operatorname{Re}^{-1} z$$

Редуцированная математическая модель

- Базовая концентрационная подсистема

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} + w \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(d_{33} \frac{\partial c}{\partial z} \right) - \lambda c$$

- Начальные и краевые условия

$$c|_{t=0} = c^0 \qquad c|_{x=0} = \pi^0$$

$$\left. \frac{\partial c}{\partial z} \right|_{z=\xi} = 0 \qquad \left. \frac{\partial c}{\partial z} \right|_{z=h} = 0$$

Задача для концентрации в квадрате

- Замена переменной $z = h(x, y) - H_0(y)(1 - \eta)$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u(y, \eta) \frac{\partial c}{\partial x} = d(y) \frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2} - \lambda c$$

$$c|_{t=0} = c^0 \quad c|_{x=0} = \pi^0 \quad \left. \frac{\partial c}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = \left. \frac{\partial c}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = 0$$

$$u = \alpha(y)(1 - \eta^2) \quad H_0(y) = h(0, y) - \xi(0, y)$$

$$\alpha(y) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} G I H_0^2(y) \quad d(y) = d_{33} H_0^{-2}(y)$$

- y - параметр

Метод Галеркина в сочетании с методом характеристик

$$c(t, x, y_*, \eta) = \sum_{n=0}^N s_n(t, x) \phi_n(\eta)$$

$$\phi_0 = 1 \quad \phi_n = \sqrt{2} \cos \pi n \eta \quad n = 1, 2, \dots, N$$

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x} = \mathbf{B} \mathbf{s}$$

$$\mathbf{s}|_{t=0} = \mathbf{s}^0 \quad \mathbf{s}|_{x=0} = \mathbf{p}^0$$

4. Соответствие известным результатам: стационарный поток постоянной вязкости ($\mu \equiv 1$ - ламинарное течение)

Мелкие потоки

Имеем $J_1 = h(x, y) - z$; $J_3 = \frac{1}{2}(h(x, y) - z)^2$;
 $J_2 = \frac{1}{2}(h^2(x, y) - z^2)$; $J_4 = \frac{1}{6}(h(x, y) - z)^2(2h(x, y) + z)$;
 $\operatorname{Re} GI (h - \xi)^2 \frac{\partial}{\partial x} (h - \xi) = 0$ $H(x, y) = h - \xi = H_0(y)$

■ Параболическое течение Пуазейля

$$u = \frac{1}{2} \operatorname{Re} GI \left((h - \xi)^2 - (z - \xi)^2 \right) \quad v = 0$$
$$w = \operatorname{Re} GI (h - z) \left((h - \xi) \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{2} (h - z) \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)$$

■ Частный случай $z = h(y)$ допускает $\xi \equiv 0$ и

$$u = \frac{1}{2} GI (h^2 - z^2) \quad v = 0 \quad w = 0$$

Глубокий протяженный поток.

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = -GI \quad \left. \frac{\partial u_0}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad u_0|_{z=h} = 0$$

$$\frac{\partial^3 v_0}{\partial y^2 \partial z} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial z^3} - \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial z^2} - \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} = 0 \quad \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = -\frac{\partial u_0}{\partial x}$$

$$\left. \frac{\partial v_0}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad w_0|_{z=0} = 0 \quad v_0 = w_0|_{z=h} = 0$$

$$p_0 = G \operatorname{Re}^{-1} z$$

5. Учет турбулентности

Выбор «модели турбулентности»

1. Пусть, например, $\mu = 1 - az$, тогда $J_1 = \frac{1}{a} \ln \frac{1 - az}{1 - ah}$;

$$J_2 = \frac{1}{a^2} \left[\ln \frac{1 - az}{1 - ah} - a(h - z) \right];$$

$$J_3 = \frac{1}{a^2} \left[(1 - az) \ln \frac{1 - az}{1 - ah} - a(h - z) \right];$$

$$J_4 = -\frac{1}{2a^3} \left[a^2 (h - z)^2 + 2(1 - az) \ln((1 - ah)(1 - az)) \right];$$

2. Пусть, например, $\mu = \frac{1}{1 + az}$, тогда $J_1 = z \left(1 + \frac{a}{2} z \right)$;

$$J_2 = \frac{1}{6} z^2 (3 + 2az); \quad J_3 = \frac{1}{6} z^2 (3 + az); \quad J_4 = \frac{1}{12} z^3 (2 + az);$$

Продольная скорость для турбулентного и ламинарного течения с равным расходом

Продольная скорость

$$u = GI(J_2 - \xi J_1)$$

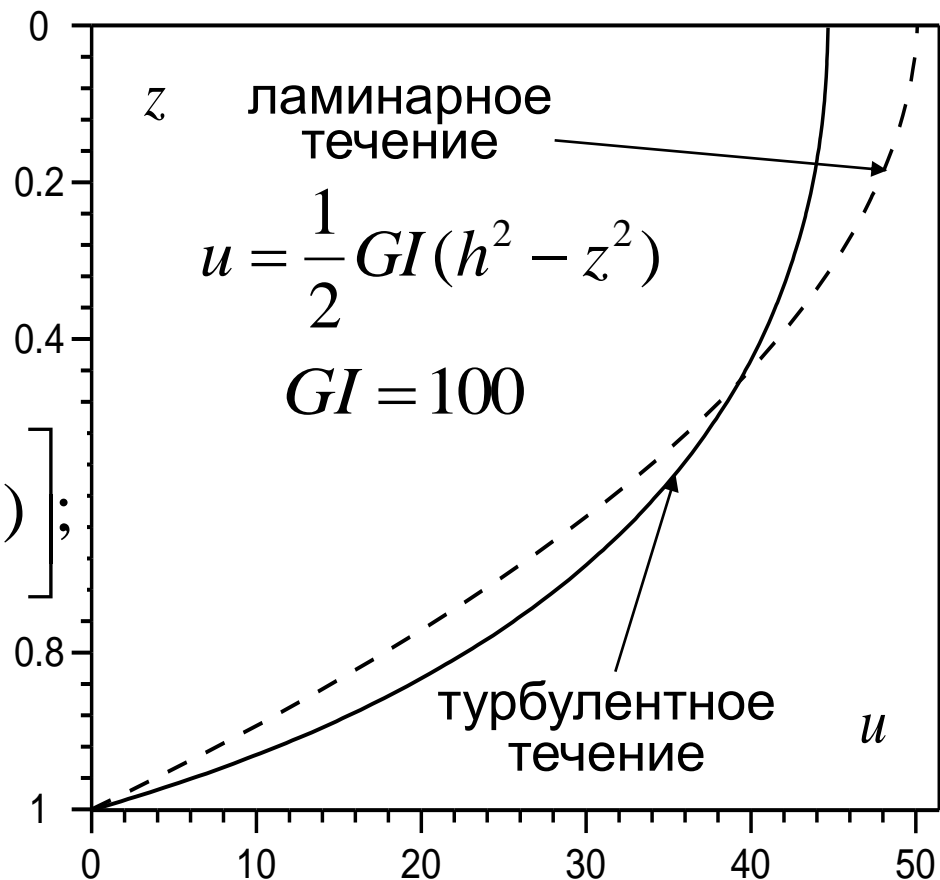
В частном случае

$$z = h(y) \quad \xi \equiv 0$$

$$1. \quad u = \frac{GI}{a^2} \left[\ln \frac{1-az}{1-ah} - a(h-z) \right];$$

$$GI = 50 \quad a = 0.64$$

$$2. \quad u = \frac{GI}{6} \left[3(h^2 - z^2) + 2a(h^3 - z^3) \right]; \quad GI = 50 \quad a = 1.34$$



Вычислительный эксперимент

Параметры расчета соответствуют:

- средней глубине фарватера потока 1 м,
- области течения 1/10/100
- средней скорости 1 м/сек
- уклону 1°

Форма русла:
$$h(x, y) = (1 - a \sin \omega x) \left(1 - \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right)$$

Параметры: $G = 9800 \quad I = 0.008 \quad b = 0.5 \quad a = 0.01 \quad \omega = 10$

Начальные и граничные условия:

$$\xi(0, y, t) = 0 \quad \xi(x, \pm b, t) - h(x, \pm b) = 0$$

Численное моделирование в COMSOL

$k - \varepsilon$ модель турбулентности

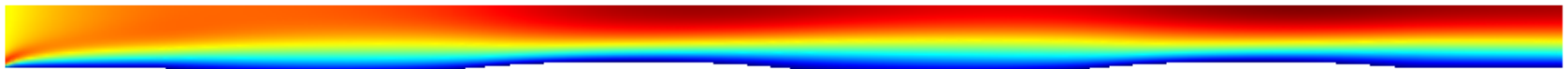
$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho u \cdot \nabla k = \nabla \cdot \left[\left(\eta + \frac{\eta_T}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + \eta_T P(u) - \rho \varepsilon \quad P(u) = \frac{\nabla u}{\left(\nabla u + (\nabla u)^T \right)}$$

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho u \cdot \nabla \varepsilon = \nabla \cdot \left[\left(\eta + \frac{\eta_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] + \frac{C_{\varepsilon 1} \varepsilon \eta_T P(u)}{k} - \frac{C_{\varepsilon 2} \rho \varepsilon^2}{k} \quad h_T = \frac{r C_m k^2}{e}$$

- Разбиение более 30 тысяч конечных элементов

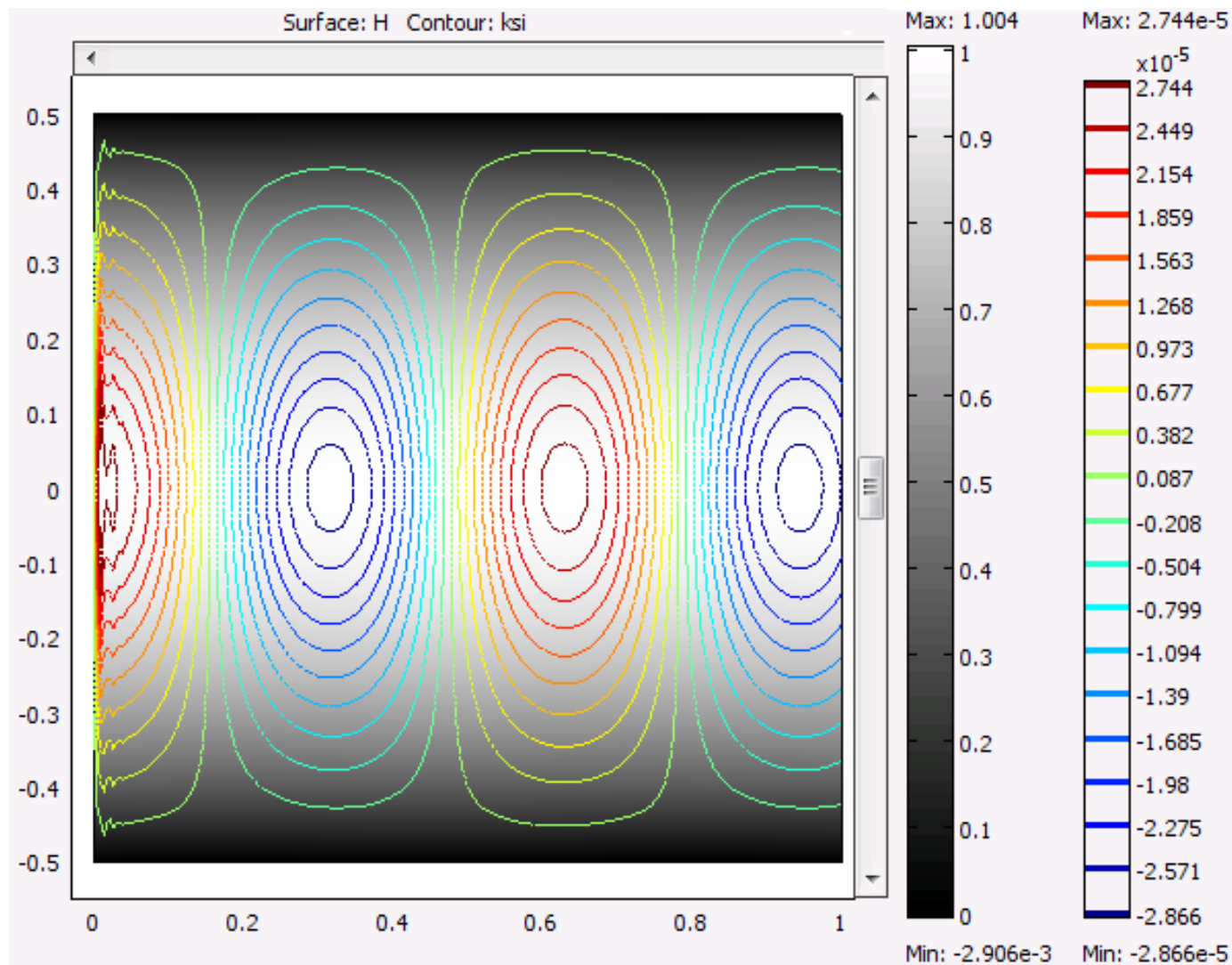


- Распределение скорости в потоке



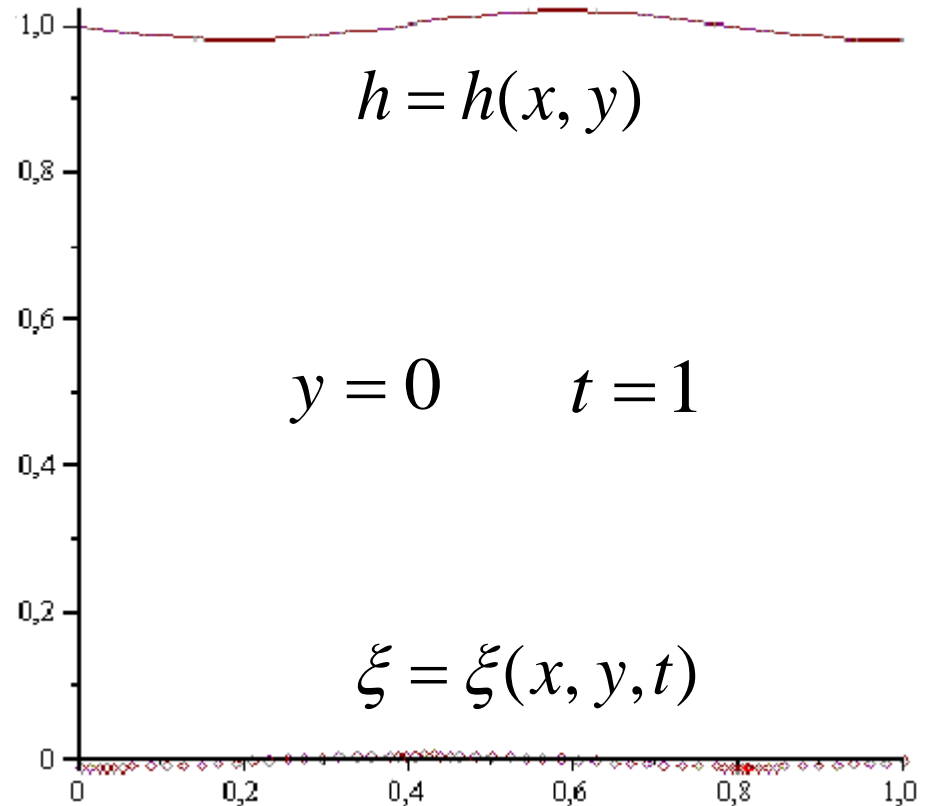
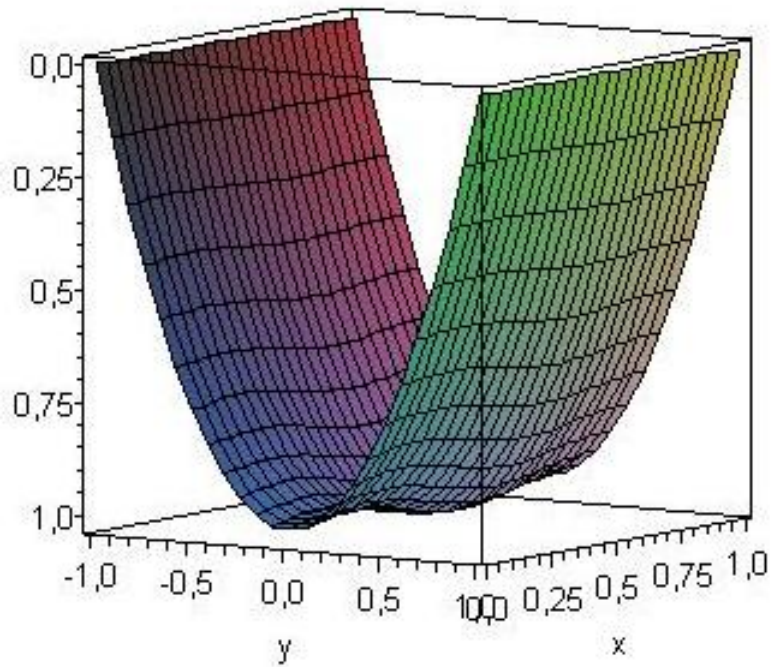
0 м/с  1.1 м/с

Возвышение свободной поверхности



Константин Аркадьевич Надолин
Южный федеральный университет
Ростов-на-Дону

Возвышение свободной поверхности





Сравнение с расчетами в COMSOL

Продольная скорость,
рассчитанная по
модели и
в COMSOL

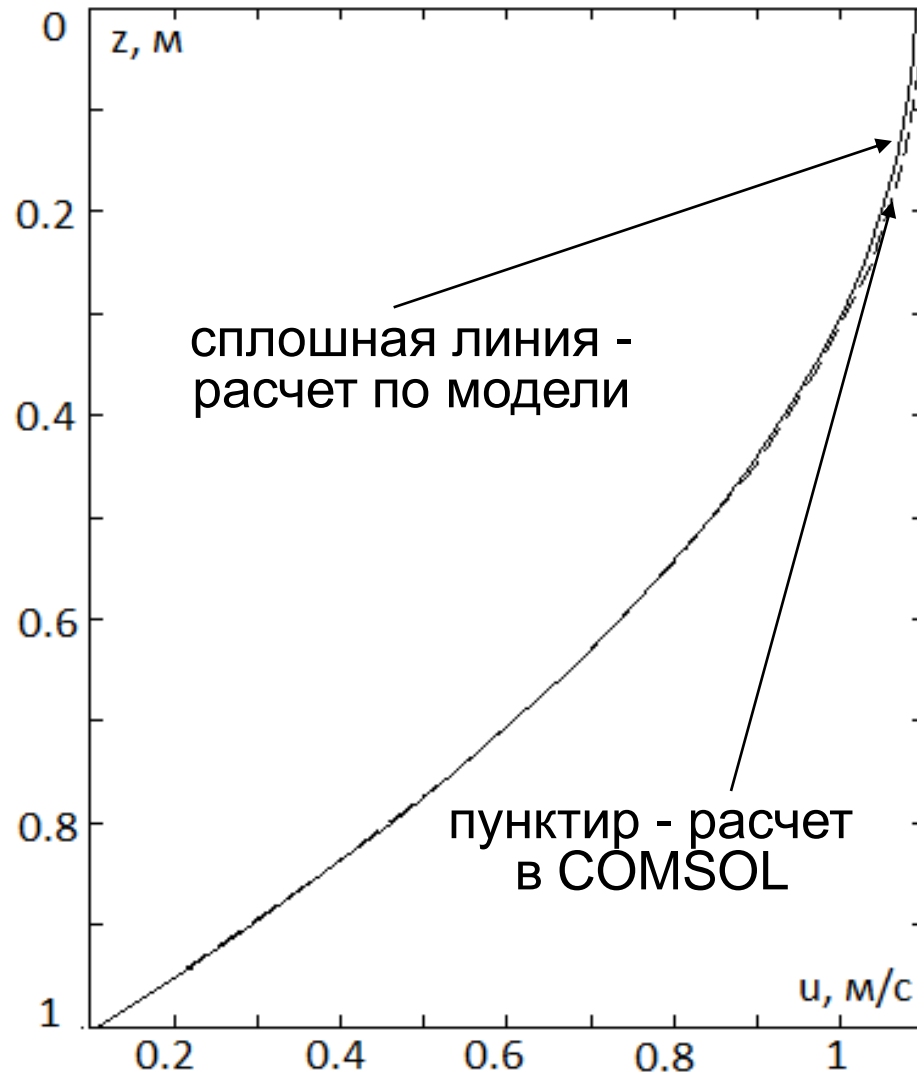
Ламинарный
поток

$$Re = 125$$

$$\mu \equiv 1$$

$$y = 0$$

$$t = 1$$



Сравнение с расчетами в COMSOL

Продольная скорость,
рассчитанная по
модели и
в COMSOL

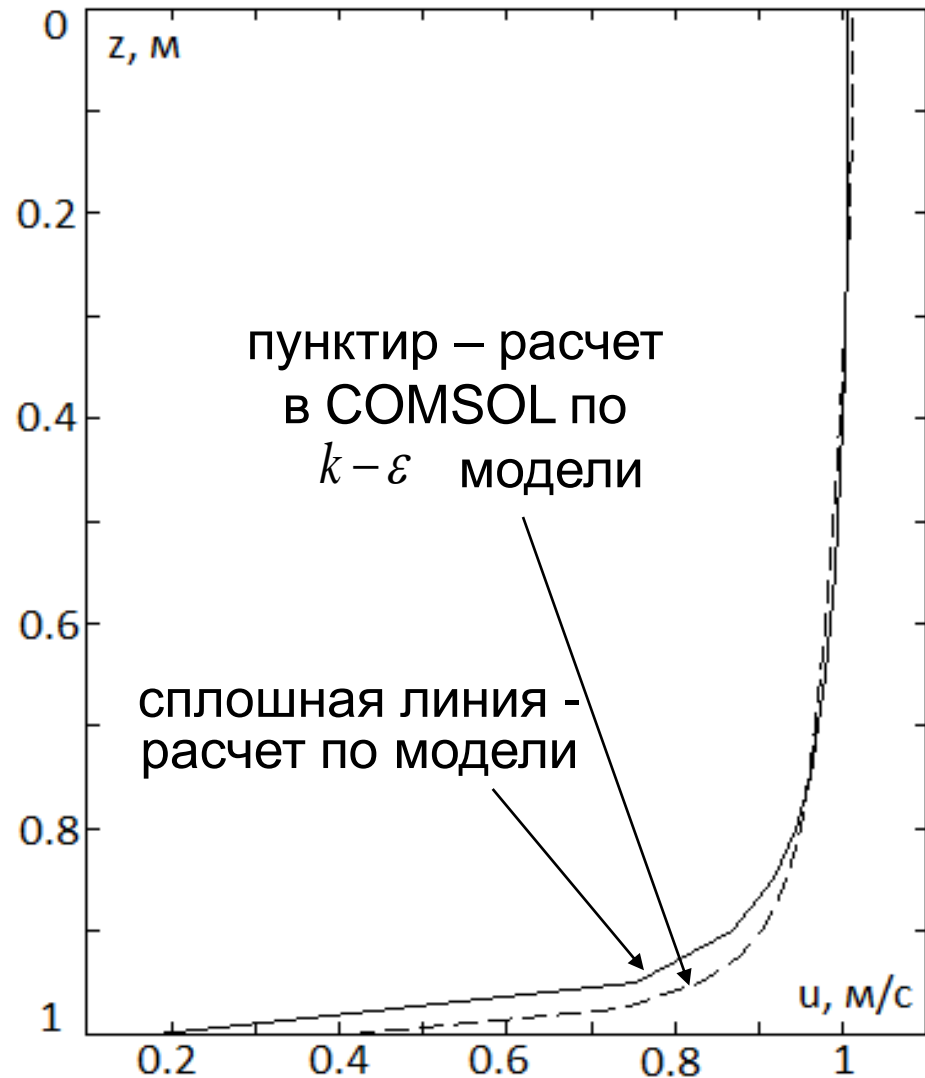
Турбулентный
поток

$$Re = 6 \cdot 10^5$$

$$\mu \equiv 1.45 - 0.001z + 0.83z^2$$

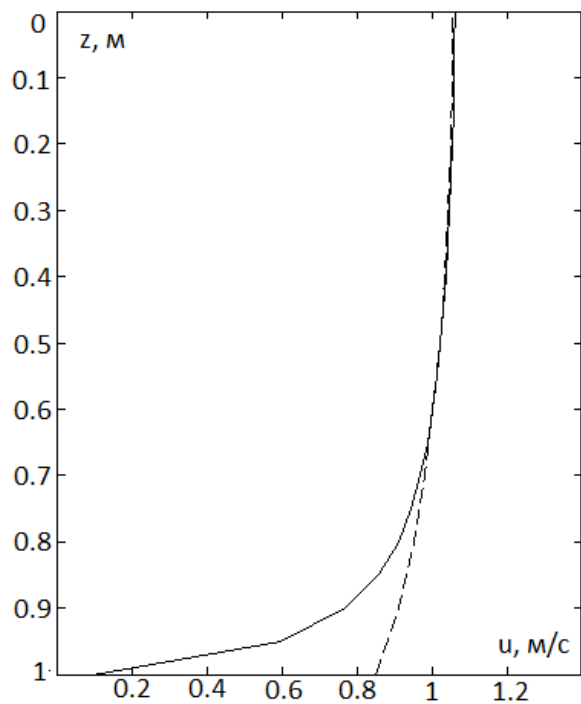
$$y = 0$$

$$t = 1$$

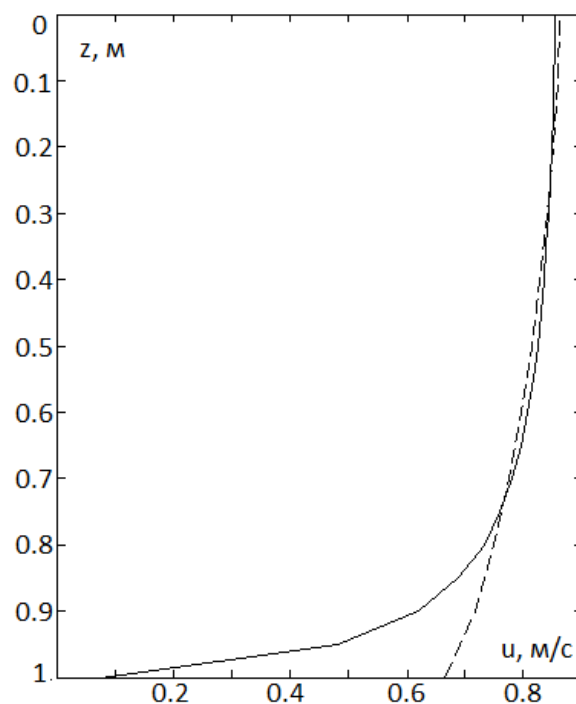


Сравнение с расчетами в COMSOL

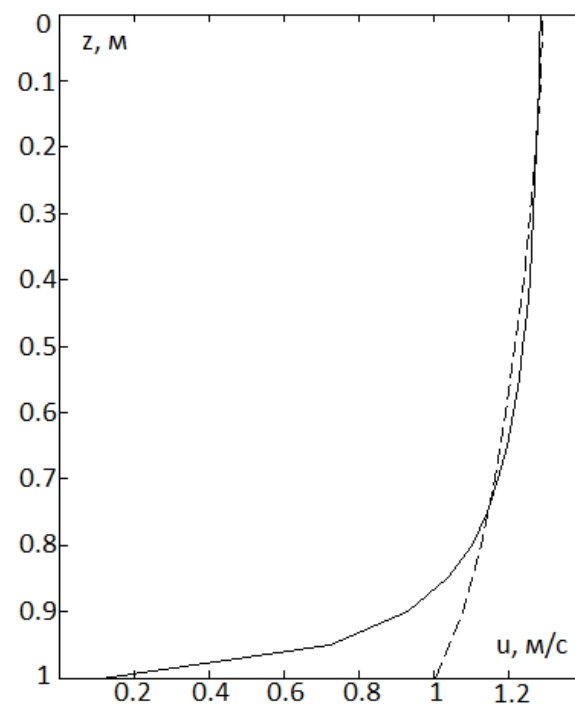
Изменение продольной скорости по глубине потока:



эталонный поток



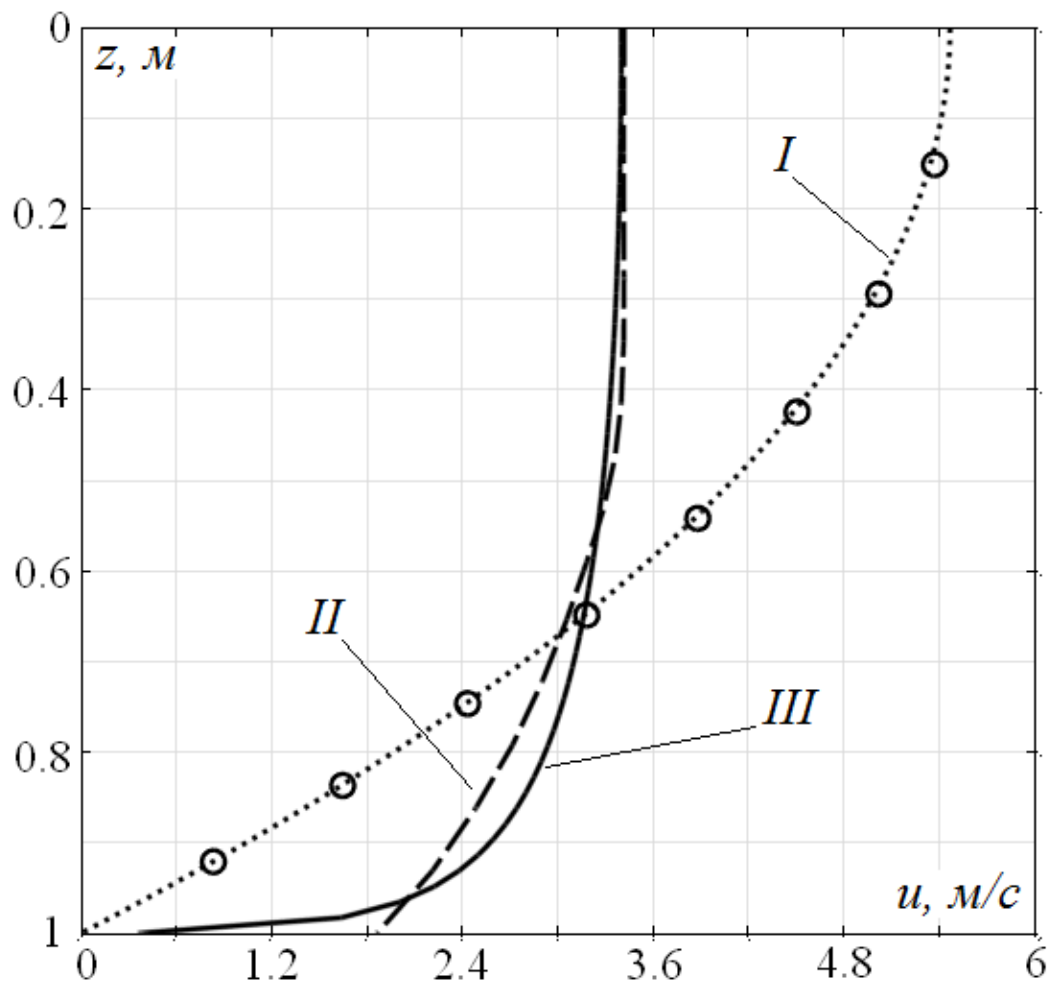
медленное течение (-20%)



быстрое течение (+20%)

Сравнение с расчетами в COMSOL

Изменение продольной скорости по глубине потока:



полуэллиптический
лоток 1:10:100

I - ламинарный поток

• - модель

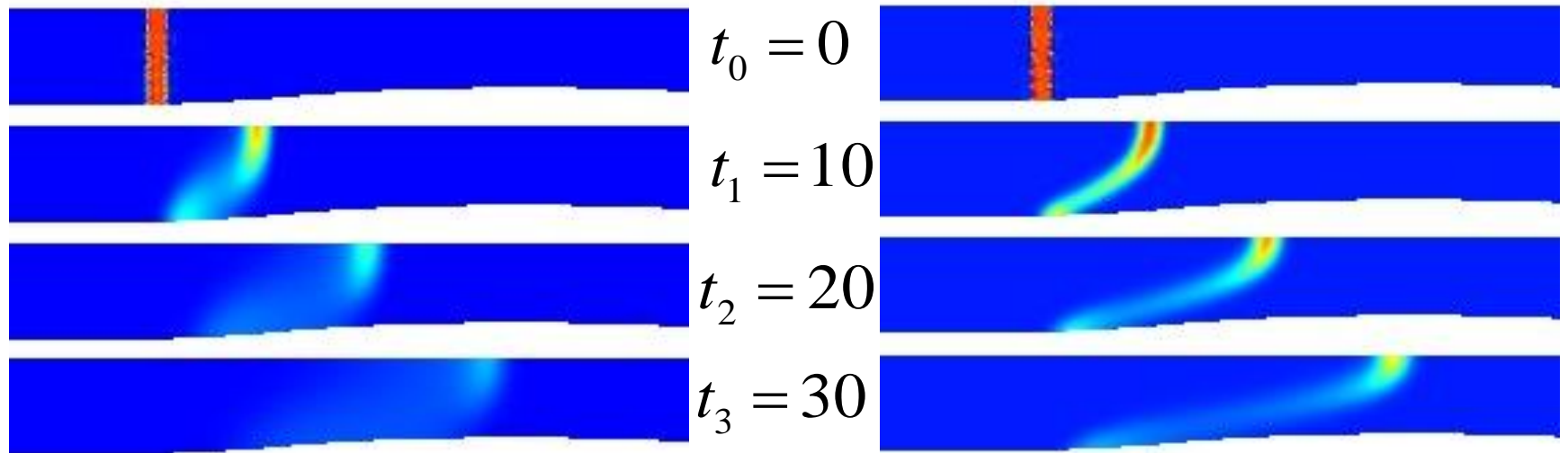
o - COMSOL

II – турбулентный поток
COMSOL, $k-e$ модель

III – турбулентный поток
редуцированная,
линейная «модель»

Численное моделирование в COMSOL

Распределение примеси в последовательные моменты времени

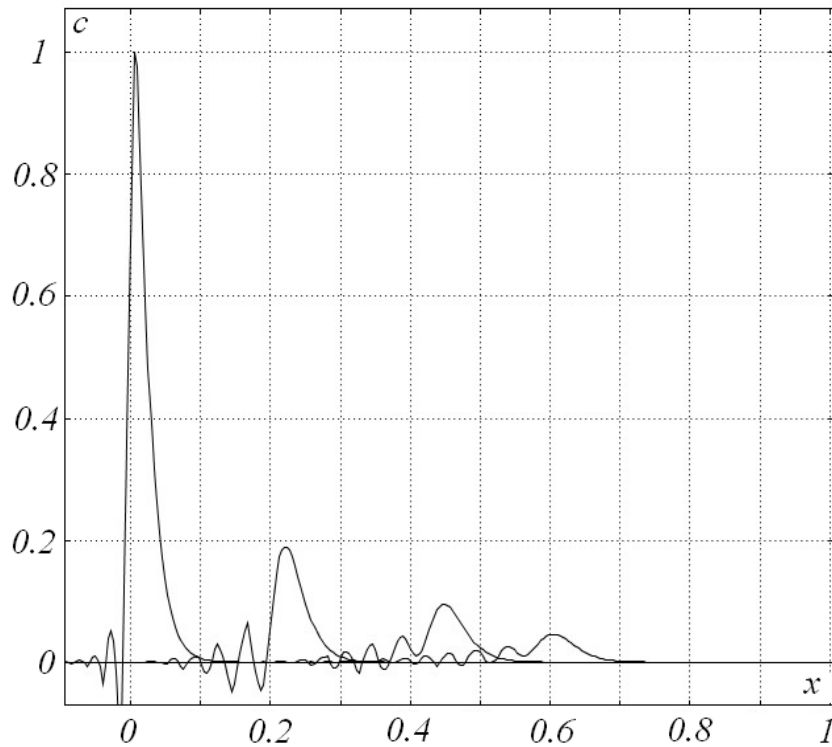


коэффициент
диффузии
0.01 м/с

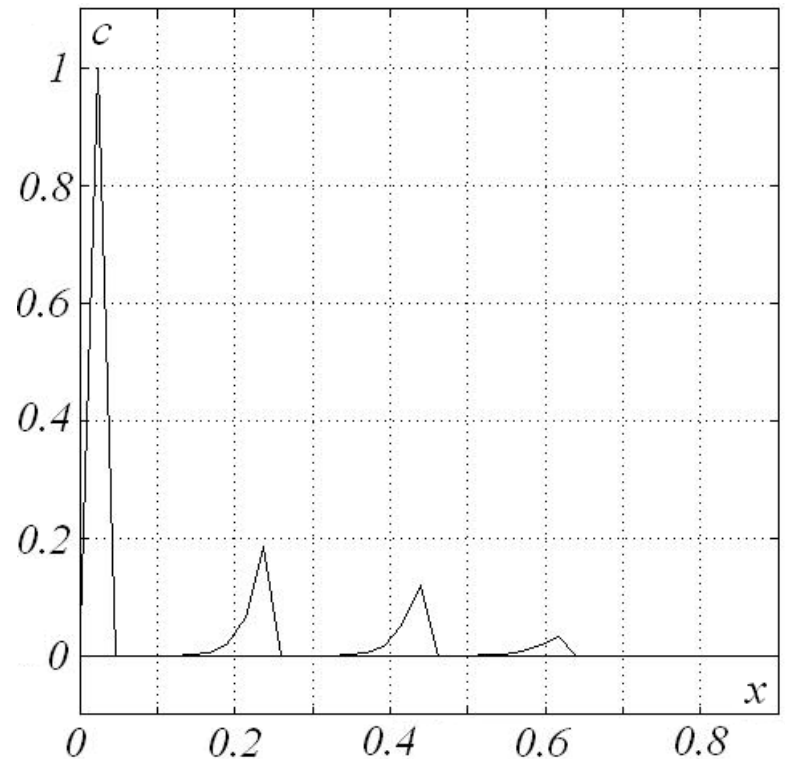
коэффициент
диффузии
0.001 м/с

Сравнение с расчетами в COMSOL

Концентрация на поверхности потока
в различные моменты времени



Расчет в COMSOL



Расчет по редуцированной
модели

ВЫВОДЫ

- Моделирование протяженных потоков может основываться на редуцированных уравнениях. Для получения упрощенных моделей могут использоваться методы малого параметра.
- Предлагаемый подход приводит к последовательности начально-краевых задач для коэффициентов разложения в ряды по малому параметру.
- Учет турбулентности можно проводить исходя из корреляции скорости модельного и эталонного потока
- Рассмотренные модели получены при определенных предположениях и имеют ряд ограничений.

Спасибо за внимание!