ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ. М.В.КЕЛДЫША
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Лимитер повышенного порядка точности для разрывного метода Галеркина на треугольных сетках

Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф.

XV Всероссийская конференция-школа молодых исследователей
«Современные проблемы математического моделирования»
Абрау-Дюрсо
16–21 сентября 2013 г

План доклада

- Разрывный метод Галеркина для уравнений Эйлера.
- Лимитеры.
- Тестовая задача.

Метод Галеркина с разрывными базисными функциями (РМГ)

или Discontinuous Galerkin Method (DGM).

- Этот метод применим для различных типов уравнений
- Обладает рядом достоинств, присущих как конечно-элементным, так и конечно-разностным аппроксимациям.
- Обеспечивает заданный порядок точности.
- Может использоваться для сеток произвольной структуры.
- Позволяет достаточно просто реализовывать граничные условия различных типов.
- Теоретическая обоснованность метода.

Bernardo Cockburn An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection - Dominated Problems, Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations Lecture Notes in Mathematics, 1998, Volume 1697/1998, 151-268

Метод Галеркина с разрывными базисными функциями для уравнений Эйлера в двумерном случае

Рассматрим уравнения двумерной идеальной газовой динамики

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F(U)}{\partial x}+\frac{\partial G(U)}{\partial y}=0$$

$$U=\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ E\end{pmatrix}\quad F=\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ (E+p)u\end{pmatrix}\quad G=\begin{pmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2+p\\ (E+p)v\end{pmatrix} \qquad (1)$$

$\rho -$ плотность

$u,v -$ компоненты вектора скорости

$\varepsilon -$ удельная внутренняя энергия

$p -$ давление

$$E=\rho\left(\varepsilon+\frac{u^2+v^2}{2}\right)$$ -полная энергия на единицу объема

$$p=(\gamma-1)\rho\varepsilon \qquad (2)$$

$\gamma -$ показатель адиабаты

Эти уравнения должны быть дополнены начальными и граничными условиями, вид которых зависит от конкретной задачи, и будут конкретизированы далее.

Покроем область Ω , на которой ищется решение, треугольной сеткой T_h .

На каждом треугольнике T_j приближенное решение системы будем искать в виде полиномов P(x,y) степени p с зависящими от времени коэффициентами.

$$U_h(x,y,t) = \sum_{k=0}^{m} U_k(t)\phi_k(x,y)$$

Приближенное решение системы в разрывном методе Галеркина ищется как решение следующей системы

$$\frac{d}{dt}\int_{T_j} U_h(x,y,t)\cdot\phi_k(x,y)dxdy + \oint_{\partial T_j} h(U_h^+(x,y,t),U_h^-(x,y,t),n)\cdot\phi_k(x,y)dS$$

$$-\int_{T_j}\left[F(U_h(x,y,t))\cdot\frac{\partial\phi_k(x,y)}{\partial x} + G(U_h(x,y,t))\cdot\frac{\partial\phi_k(x,y)}{\partial y}\right]dxdy = 0,$$

$$\forall\phi_k(x,y), k = 0,m.$$

Выберем **системy базисных функций:**

$$\phi_0 = 1,$$

$$\phi_1 = \frac{x - x_c}{\Delta x},\ \phi_2 = \frac{y - y_c}{\Delta y},$$

$$\phi_3 = \left(\frac{x - x_c}{\Delta x}\right)^2,\ \phi_4 = \left(\frac{x - x_c}{\Delta x}\right)\left(\frac{y - y_c}{\Delta y}\right),\ \phi_5 = \left(\frac{y - y_c}{\Delta y}\right)^2$$

(x_c, y_c) – центр масс ячейки

$\Delta x, \Delta y$ – проекция ячейки на оси x и y соответственно

2D лимитеры

- Лимитер $\Lambda\Pi_h$ для **кусочно-линейных функций** должен удовлетворять следующим условиям:
- 1. **Сохранение «массы»:** для любого элемента $T_j \in T_h$

$$\int_{T_j} \Lambda\Pi_h u_h dxdy = \int_{T_j} u_h dxdy$$

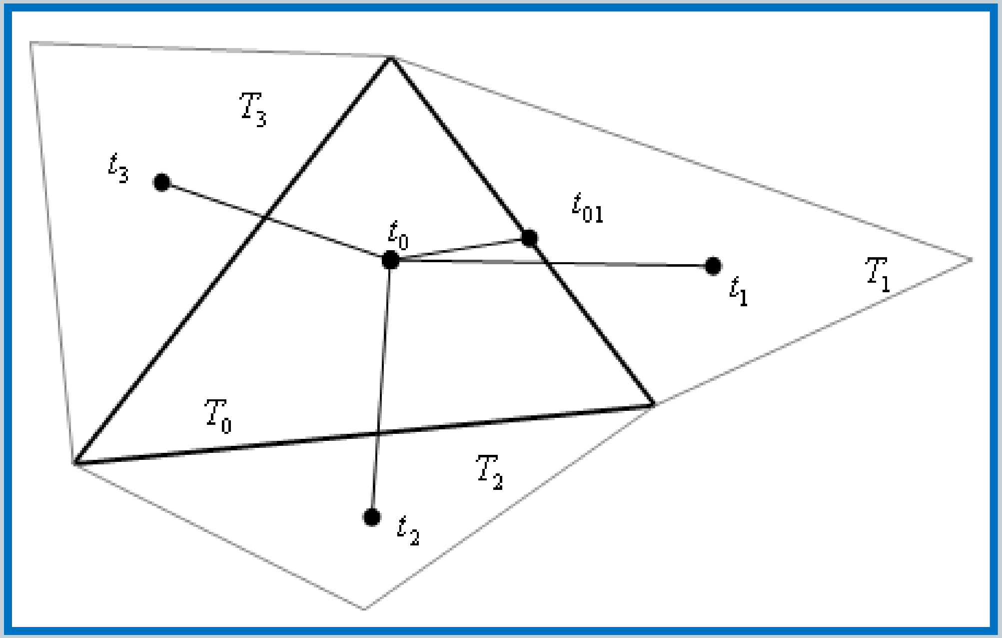
- 2. **Ограничение наклона:** на каждом элементе $T_j \in T_h$

величины наклона кусочно-линейной функции

$$\Lambda\Pi_h u_h = \sum_{k=0}^{2} \tilde{u}_k \phi_k(x,y) = u_0 + \sum_{k=1}^{2} \tilde{u}_k \phi_k\left(x,y\right)$$

по направлениям, заранее определенным по некоторому правилу, u_h не превышают величин наклона исходной функции .

Построение ограничителя $\Lambda\Pi_h$ на треугольном элементе.



t_j – центр масс треугольника T_j

t_{0j} – центр $j-го$ ребра, являющегося общим для треугольников T_0, T_j

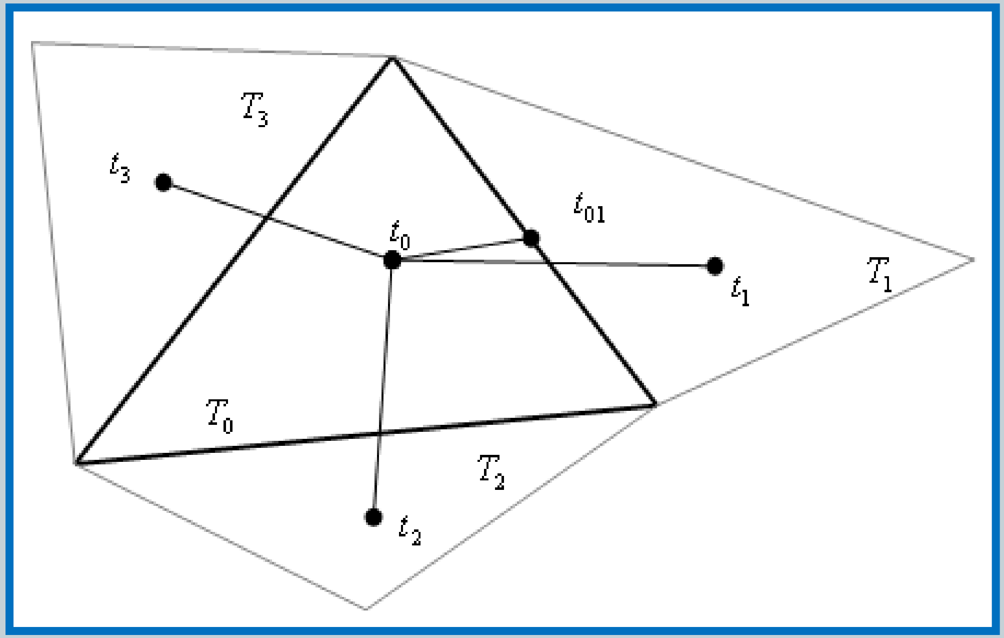
Рассмотрим на каждом из треугольников T систему базисных функций

$\varphi_j(x,y)$ – линейная функция $\qquad \varphi_j(x,y)=\begin{cases}1, & \text{в} \quad t_{0j}, \\ 0, & \text{в} \quad t_{0i}\end{cases} \qquad j \neq i.$

Тогда приближенное решение в треугольнике T_j можно представить в виде $u_h(x,y,t)=\sum_{j=1}^{3} u_{0j}(t)\cdot\varphi_j(x,y)$

$u_{0j}(t)$ – значение численного решения в центре j - го ребра

Построение ограничителя $\Lambda\Pi_h$ на треугольном элементе (2).



1. Вычислим приращение функции в точке t_{0i}

$$\Delta u_{0j} = u_h(t_{0j}) - u_h(t_0) = u_h(t_{0j}) - u_0$$

$$u_0 = \bar{u}_{T_0} = \frac{1}{|T_0|}\int_{T_0} u_h dxdy = u_h(t_0)$$

2. Тогда для $(x,y)\in T_0$ в фиксированный момент времени t можно записать:

$$u_h(x,y) = \sum_{j=1}^{3} u_{0j}\cdot\varphi_j(x,y) = u_0 + \sum_{j=1}^{3}\Delta u_{0j}\cdot\varphi_j(x,y)$$

3. Построим линейную функцию $\tilde{u}_{hj}(x,y)$ на треугольнике, вершины которого являются центрами масс соответствующего треугольника $T_0T_1T_2$, $T_0T_1T_3$ или $T_0T_2T_3$. по интегральным средним значениям внутри данного треугольника.

4. Вычислим приращение функции $\Delta\tilde{u}_{0j} = \tilde{u}_{0j} - u_0$,

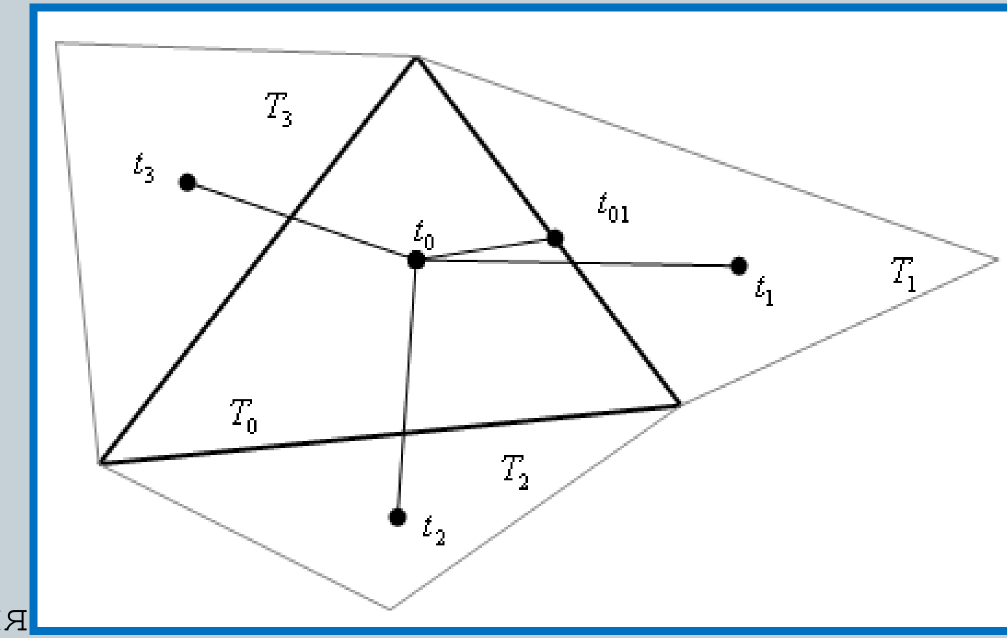
Построение ограничителя $\Lambda\Pi_h$ на треугольном элементе (3).

Для определения $\Lambda\Pi_h u_h$

вычислим величины

$$\Delta_j = minmod(\Delta u_{0j}, \nu\Delta\tilde{u}_{0j}),$$

$$где \ 1 \le \nu \le 2$$



Для выполнения закона сохранения необходимо потребовать выполнения условия

$$\int_{T_j}\left(u_0 + \sum_{j=1}^{3}\Delta_j \cdot \psi_j(x,y)\right)dxdy = \int_{T_j} u_h dxdy \quad \text{или} \quad u_0 \cdot S_{T_j} + \frac{S_{T_j}}{3}\sum_{j=1}^{3}\Delta_j = u_0 \cdot S_{T_j}$$

Если это равенство выполнено и $\sum_{i=1}^{3}\Delta_j = 0,$ то полагаем

$$\Lambda\Pi_h u_h = u_0 + \sum_{j=1}^{3}\Delta_j \varphi_j(x,y).$$

Если $\sum_{j=1}^{3}\Delta_j \ne 0,$ то величины Δ_j подвергаются коррекции в сторону уменьшения.

Построение ограничителя $\Lambda\Pi_h$ на треугольном элементе(4).

1. Все Δ_j одного знака, тогда полагаем $\Delta_j = 0, \quad j = 1,2,3$
2. Две Δ_j одного знака, а третья – противоположного,

пусть для определенности $sign(\Delta_1) = sign(\Delta_2) = -sign(\Delta_3)$

и $|\Delta_1 + \Delta_2| > |\Delta_3|$

тогда следует большие величины уменьшить так чтобы

$$\theta \cdot (\Delta_1 + \Delta_2) + \Delta_3 = 0 \quad \text{, где } \theta < 1 .$$

Вычисляем суммарный вклад положительных членов $\sum_{i=1}^{3} \Delta_j \Rightarrow pos = \sum_{j=1}^{3} \max(0, \Delta_j),$

и

суммарный вклад отрицательных членов $\sum_{i=1}^{3} \Delta_j \Rightarrow neg = \sum_{j=1}^{3} \max(0, -\Delta_j),$

Полагаем $\theta^+ = \min\left(1, \frac{neg}{pos}\right), \quad \theta^- = \min\left(1, \frac{pos}{neg}\right).$

Определим величину $\tilde{\Delta}_j = \theta^+ \max(0, \Delta_j) - \theta^- \max(0, -\Delta_j).$

Тогда окончательно получим

$$\boxed{\Lambda\Pi_h u_h(x, y) = u_0 + \sum_{j=1}^{3} \tilde{\Delta}_j \varphi_j(x, y).}$$

Для применения данного лимитера, в случае когда **решение** представляет собой **полином, порядка выше единицы**, спроецируем функцию

$$u_h(x,y,t)=\sum_{j=0}^{5}u_j(t)\cdot\phi_j(x,y)$$

на пространство линейных полиномов $u_h^l(x,y)=\sum_{j=1}^{3}u_{0j}^l\cdot\varphi_j(x,y)$

Далее лимитируем функцию $u_h^l(x,y)$

в соответствии с алгоритмом, описанным выше.

Если $\Delta_j^l=\Delta u_{0j}^l$ для всех j,

то в результате действия лимитера **исходная функция не изменится**

$$\Lambda\Pi_h u_h(x,y)=\sum_{j=0}^{5}u_j(t)\cdot\phi_j(x,y),$$

в противном случае продолжаем лимитирование в соответствии с алгоритмом .

2D обобщение «моментного» лимитера

Для построения нового «моментного» лимитера перейдем к **блочно ортогональной системе базисных функций.**

I: $\phi_0 = 1,$

II: $\phi_1 = \dfrac{x - x_c}{\Delta x},\ \phi_2 = \dfrac{y - y_c}{\Delta y},$

III: $\begin{cases} \phi_3 = \left(\dfrac{x - x_c}{\Delta x}\right)^2, \\ \phi_4 = \left(\dfrac{x - x_c}{\Delta x}\right)\left(\dfrac{y - y_c}{\Delta y}\right), \\ \phi_5 = \left(\dfrac{y - y_c}{\Delta y}\right)^2 \end{cases}$

I: $\varphi_0 = 1,$

II: $\varphi_x = \dfrac{x - x_c}{\Delta x},\ \varphi_y = \dfrac{y - y_c}{\Delta y},$

III: $\begin{cases} \varphi_{xx} = \left(\dfrac{x - x_c}{\Delta x}\right)^2 + \alpha_{xx}\left(\dfrac{x - x_c}{\Delta x}\right) + \beta_{xx}\left(\dfrac{y - y_c}{\Delta y}\right) + \gamma_{xx}, \\ \varphi_{xy} = \left(\dfrac{x - x_c}{\Delta x}\right)\left(\dfrac{y - y_c}{\Delta y}\right) + \alpha_{xy}\left(\dfrac{x - x_c}{\Delta x}\right) + \beta_{xy}\left(\dfrac{y - y_c}{\Delta y}\right) + \gamma_{xy}, \\ \varphi_{yy} = \left(\dfrac{y - y_c}{\Delta y}\right)^2 + \alpha_{yy}\left(\dfrac{x - x_c}{\Delta x}\right) + \beta_{yy}\left(\dfrac{y - y_c}{\Delta y}\right) + \gamma_{yy} \end{cases}$

1.Разложим исходную функцию $u_h(x, y) = \sum_{j=0}^{5} u_j(t) \cdot \phi_j(x, y)$ по базису

$$\boxed{u_h(x, y, t) = \bar{u}_0 + u_1^* \varphi_x + u_2^* \varphi_y + u_3 \varphi_{xx} + u_4 \varphi_{xy} + u_5 \varphi_{yy},}$$

где $\bar{u}_0 = \dfrac{1}{|T_0|} \displaystyle\int_{T_0} u_h \, dx dy$

Krivodonova L., Limiters for high-order discontinuous Galerkin methods. 2007, Journal of Computational Physics, vol. 226, pp. 879-896

2. Рассмотрим
$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=k_x+2u_3\left(\frac{x-x_c}{\Delta x}\right)+u_4\left(\frac{y-y_c}{\Delta y}\right)$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=k_y+u_4\left(\frac{x-x_c}{\Delta x}\right)+2u_5\left(\frac{y-y_c}{\Delta y}\right)$$

Ограничиваем производные

$$\Lambda\Pi_h\frac{\partial u_h(x,y)}{\partial x}=k_x+2\tilde{u}_3\left(\frac{x-x_c}{\Delta x}\right)+\tilde{u}_4^x\left(\frac{y-y_c}{\Delta y}\right)$$

$$\Lambda\Pi_h\frac{\partial u_h(x,y)}{\partial y}=k_y+\tilde{u}_4^y\left(\frac{x-x_c}{\Delta x}\right)+2\tilde{u}_5\left(\frac{y-y_c}{\Delta y}\right)$$

Необходимо выполнение условия

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\Lambda\Pi_h\frac{\partial u_h(x,y)}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\Lambda\Pi_h\frac{\partial u_h(x,y)}{\partial y}\right)$$

$$\Lambda\Pi_h^n \frac{\partial u_h(x,y)}{\partial x} = k_x + 2\tilde{u}_3\left(\frac{x-x_c}{\Delta x}\right) + \frac{\tilde{u}_4^x + \tilde{u}_4^y}{2}\left(\frac{y-y_c}{\Delta y}\right)$$

$$\Lambda\Pi_h \frac{\partial u_h(x,y)}{\partial y} = k_y + \frac{\tilde{u}_4^x + \tilde{u}_4^y}{2}\left(\frac{x-x_c}{\Delta x}\right) + 2\tilde{u}_5\left(\frac{y-y_c}{\Delta y}\right)$$

Если в результате действия лимитера на функции $\dfrac{\partial u_h(x,y)}{\partial x}$ $\dfrac{\partial u_h(x,y)}{\partial y}$ коэффициенты u_3, u_4, u_5 **не изменились**

$$u_3 = 2\tilde{u}_3, \quad u_4 = \frac{\tilde{u}_4^x + \tilde{u}_4^y}{2}, \quad u_5 = 2\tilde{u}_5$$

то **результатом** действия лимитера будет **исходная функция** $u_h(x,y,t)$

3. **в противном случае,** подобно одномерному «моментному» лимитеру следует перейти **к лимитированию коэффициентов при линейной части**

$$u_h^l(x,y,t) = \bar{u}_0 + u_1^*\left(\frac{x-x_c}{\Delta x}\right) + u_2^*\left(\frac{y-y_c}{\Delta y}\right)$$

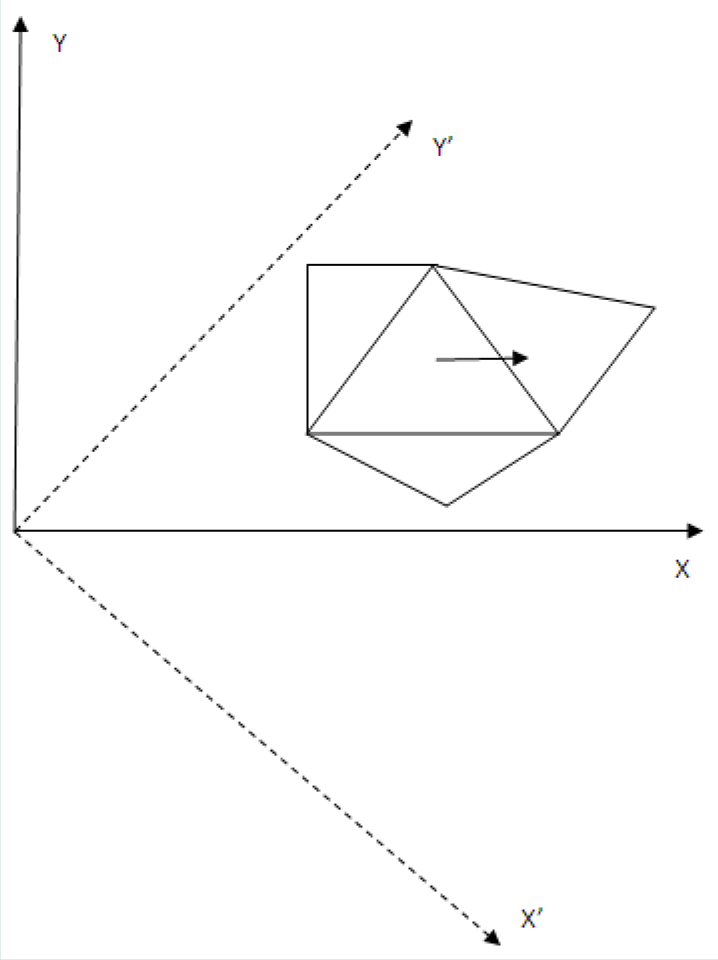
$$\Lambda\Pi_h u_h^l(x,y,t) = \bar{u}_0 + \tilde{u}_1^*\left(\frac{x-x_c}{\Delta x}\right) + \tilde{u}_2^*\left(\frac{y-y_c}{\Delta y}\right)$$

Действие **«моментного» лимитера** можно записать в виде

$$\Lambda\Pi_h^m u_h(x,y,t) = \bar{u}_0 + \tilde{u}_1^* \varphi_x(x,y) + \tilde{u}_2^* \varphi_y(x,y)$$
$$+ 2\tilde{u}_3 \varphi_{xx}(x,y) + \frac{\tilde{u}_4^x + \tilde{u}_4^y}{2} \varphi_{xy}(x,y) + 2\tilde{u}_5 \varphi_{yy}(x,y)$$

Выбор направлений лимитируемых производных.

Во избежание ситуации, когда направление, по которому производится лимитирование, ортогонально вектору градиента, перейдем в новую систему координат.

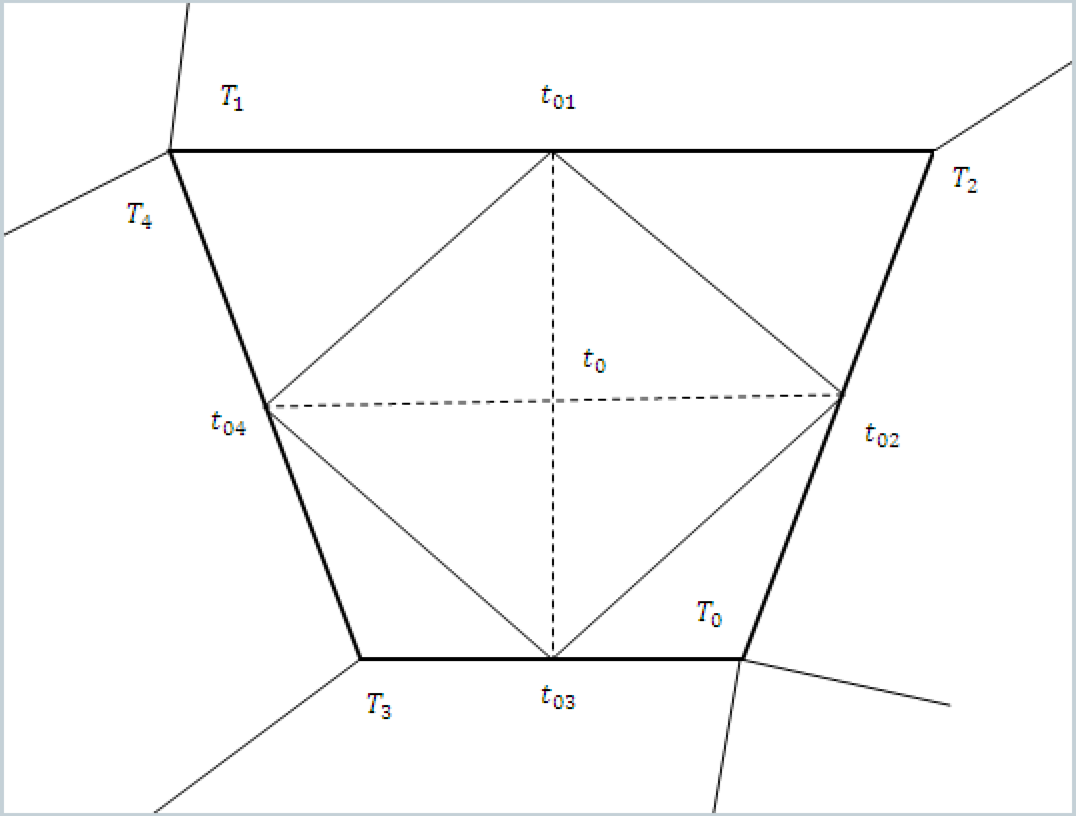


Обобщение моментного лимитера на четырехугольные ячейки

$$\varphi_0(x,y)=1$$

$$\varphi_1(x,y)=\begin{cases}1, & \text{в} \quad t_{01},\\ -1, & \text{в} \quad t_{03},\\ 0, & \text{в} \quad t_{02},\\ 0, & \text{в} \quad t_{04}\end{cases}$$

$$\varphi_2(x,y)=\begin{cases}0, & \text{в} \quad t_{01},\\ 0, & \text{в} \quad t_{03},\\ 1, & \text{в} \quad t_{02},\\ -1, & \text{в} \quad t_{04}\end{cases}$$



$$u_h(x,y,t)=\overset{*}{u}_0\varphi_0+\overset{*}{u}_1\varphi_1+\overset{*}{u}_2\varphi_2$$

Для всех задач использовалась схема третьего порядка по времени, сохраняющая монотонность решения.

$$U^{*} = \Lambda\Pi_h \left\{ U^n + \Delta t L(U^n) \right\}$$

$$U^{**} = \Lambda\Pi_h \left\{ \frac{3}{4}U^n + \frac{1}{4}U^{*} + \frac{1}{4}\Delta t L(U^{*}) \right\}$$

$$U^{n+1} = \Lambda\Pi_h \left\{ \frac{1}{3}U^n + \frac{2}{3}U^{**} + \frac{2}{3}\Delta t L(U^{**}) \right\}$$

.

Исследование влияние различных лимитирующих функций на порядок точности решения разрывным методом Галеркина

Распределение плотности в начальный момент выберем в виде бесконечно гладкой функции:

$$\rho = \begin{cases} 1 + e^{2-2\frac{l^2}{l^2 - x^2}}, & |x| < l \\ 1, & \text{иначе} \end{cases} \qquad x \in [-1,1], \ l = 0.2, \ \gamma = 5/3$$

Остальные гидродинамические параметры определяются из условий постоянства энтропии и инварианта R^+

$$\varepsilon = \rho^{(\gamma-1)}, \quad u = \frac{-2\sqrt{\varepsilon(\gamma-1)\gamma}}{\gamma-1}, \quad E = \rho\varepsilon + \rho\frac{u^2}{2}$$

Расчетная область: [X]x[Y]=[-1,1]x[0,0.06]

На границах области были заданы постоянные граничные условия:

$$\rho(-1,y,t) = 1, u(-1,y,t) = -\sqrt{10}, E(-1,y,t) = 6,$$

$$\rho(1,y,t) = 1, \quad u(1,y,t) = -\sqrt{10}, \quad E(1,y,t) = 6,$$

$$\rho(x,0,t) = \rho(x,0.06,t), u(x,0,t) = u(x,0.06,t), E(x,0,t) = E(x,0.06,t)$$

Вычисление порядка точности метода.

$$p = \frac{\log_2 \left\| U_h - U^T \right\|_{L_i}}{\log_2 \left\| U_{h/2} - U^T \right\|_{L_i}}, \qquad i = 1, 2, 4.$$

$$\left\| U_h - U^T \right\|_{L^i} = \left(\iint_{\Omega} \left(U_h - U^T \right)^i dxdy \right)^{1/i}, i = 1, 2, 4 \;\; \Omega \in R^2$$

Исследование влияние различных лимитирующих функций на порядок точности решения разрывным методом Галеркина

T = 0.07
p = 2
$\mu_1 = \mu_2 = 2.0$

		Без лимитера		Лимитер Кокбурна		"Моментный" лимитер	
	N	ошибка	порядок	ошибка	порядок	ошибка	порядок
L^1	150	1.21e - 05		1.02e - 04		2.89e - 05	
	300	1.69e - 06	2.84	2.69e - 05	1.92	6.09e - 06	2.25
	600	1.44e - 07	3.55	5.87e - 06	2.19	9.18e - 07	2.73
	1200	1.41e - 08	3.34	1.28e - 06	2.19	9.32e - 08	3.29
L^2	150	2.19e - 04		1.10e - 03		4.29e - 04	
	300	3.95e - 05	2.47	3.55e - 04	1.64	1.39e - 04	1.62
	600	3.80e - 06	3.37	8.89e - 05	1.99	2.70e - 05	2.36
	1200	3.58e - 07	3.40	1.92e - 05	2.20	3.35e - 06	3.01
L^4	150	1.62e - 03		7.03e - 03		2.93e - 03	
	300	3.23e - 04	2.32	2.48e - 03	1.50	1.16e - 03	1.32
	600	3.65e - 05	3.14	6.71e - 04	1.88	2.48e - 04	2.23
	1200	3.55e - 06	3.36	1.45e - 04	2.21	3.52e - 05	2.81

Выводы.

- Предложен новый лимитер повышенного порядка точности, являющийся обобщением моментного лимитера на треугольные и четырехугольные сетки.
- Показано, что предложенный лимитер позволяет сохранить решение повышенного порядка точности, в то время как классический лимитер Кокбурна не дает порядка точности выше второго.