

XV Всероссийская Конференция-школа
молодых исследователей "Современные
проблемы математического моделирования"

“Блочный” метод Айзенштата в подпространствах Крылова

Петухов А.В.

Институт Вычислительной Математики
и Математической Геофизики СО РАН

Структура доклада

- Блочный формат хранения матриц (**BSR**)
- Алгоритм SSOR в модификации Айзенштата для матриц хранимых в блочном формате
- Сравнение эффективности “точечного” и “блочного” форматов хранения
- Векторизация
- Модификация формата BSR
- Сравнение эффективности “точечного” и “модифицированного блочного” форматов хранения

Блочный формат хранения матриц (BSR)

	1		2		3	
1	1	2			3	4
	5	6				7
2	8	9	10	11		
	12	13		14		
3			15		16	
					17	18

$$n = 3 \quad n_b = 2$$

$$ia = \{0, 2, 4, 6\};$$

$$ja = \{0, 2, 0, 1, 1, 2\};$$

$$a = \{[1, 5, 2, 6], [3, 0, 4, 7], [8, 12, 9, 13], [10, 0, 11, 14], [15, 0, 0, 0], [16, 17, 0, 18]\}$$

Алгоритм SSOR в модификации Айзенштата для матриц хранимых в блочном формате

$$Au = f \quad A = D + U + L$$

$$B = (G + L)G^{-1}(G + U), \quad \text{где } G = \frac{1}{\omega}D \quad G = L_G U_G$$

$$B = L_G(I + \tilde{L})(I + \tilde{U})U_G$$

$$\tilde{L} = L_G^{-1}LU_G^{-1} \quad \tilde{U} = L_G^{-1}UU_G^{-1}$$

$$\tilde{A} = (I + \tilde{U})^{-1} + (I + \tilde{L})^{-1} \left(I - (2I - \tilde{D})(I + \tilde{U})^{-1} \right)$$

$$\tilde{D} = L_G^{-1}DU_G^{-1}$$

$$\tilde{f} = (I + \tilde{L})^{-1}L_G^{-1}f \quad \tilde{u} = (I + \tilde{U})U_G u$$

$$\tilde{A}\tilde{u} = \tilde{f}$$

Сравнение эффективности “точечного” и “блочного” форматов хранения

64x64x64

	2				3				4				5				6			
	Epf		Elf		Epf		Elf		Epf		Elf		Epf		Elf		Epf		Elf	
om	it	t, c	it	t, c	it	t, c	it	t, c	it	t, c	it	t, c	it	t, c	it	t, c	it	t, c	it	t, c
1	76	1,8	73	2,7	77	3,7	73	3,7	77	4,9	73	5,1	77	9,8	73	7,8	78	13,9	73	10
1,1	69	1,2	66	2,4	70	2,5	66	3,4	70	4,5	66	4,6	70	6,8	66	7	71	9,9	66	9
1,2	63	1,1	60	2,2	64	2,3	60	3,1	64	4,1	60	4,2	64	6,3	60	6,4	64	8,9	60	8,2
1,3	58	1	55	2	58	2,1	55	2,8	59	3,8	55	3,9	59	5,8	55	5,9	59	8,3	55	7,6
1,4	53	0,9	51	1,9	54	1,9	51	2,6	54	3,4	51	3,6	54	5,3	51	5,4	54	7,7	51	7
1,5	49	0,9	46	1,7	49	1,7	46	2,4	50	3,2	46	3,2	50	4,9	46	4,9	50	7	46	6,3
1,6	44	0,8	41	1,5	45	1,6	41	2,1	45	2,9	41	2,9	45	4,4	41	4,4	45	6,4	41	5,7
1,7	40	0,7	36	1,3	41	1,5	36	1,9	41	2,7	36	2,6	41	4,1	36	3,9	41	5,8	36	5
1,8	38	0,7	32	1,2	39	1,4	32	1,7	40	2,6	32	2,7	40	3,9	32	3,5	40	5,7	32	4,4
1,9	45	0,8	31	1,2	46	1,6	31	1,6	47	3	31	2,2	47	4,6	31	3,4	47	6,6	31	4,3

Сравнение эффективности “точечного” и “блочного” форматов хранения

128x128 x128

	2				3				4				5				6			
	Epf		Elf		Epf		Elf		Epf		Elf		Epf		Elf		Epf		Elf	
om	it	t, c	it	t, c	it	t, c	it	t, c	it	t, c	it	t, c	it	t, c	it	t, c	it	t, c	it	t, c
1	141	26,1	136	41,8	143	54,1	136	56,6	144	76,1	136	76,3	144	132	136	117	145	189	136	151
1,1	129	20	124	38,1	131	39,8	124	51,5	131	69,5	124	69,7	132	102	124	107	132	145	124	137
1,2	120	18,6	115	35,3	121	36,6	115	47,9	121	64,3	115	64,7	122	93,9	115	99	122	134	115	136
1,3	109	17	104	32	110	33,7	104	43,4	111	58,9	104	60	111	85,5	104	89,6	112	124	104	126
1,4	98	15,2	93	28,6	100	30,7	93	38,8	100	53,1	93	57,6	101	77,9	93	80,2	101	111	93	113
1,5	88	13,8	83	25,6	90	27,7	83	34,7	90	47,8	83	51,5	91	70,1	83	71,8	91	100	83	101
1,6	79	12,4	74	22,9	81	24,9	74	31	81	43,3	74	45,9	81	62,5	74	64	82	90,7	74	89,9
1,7	71	11,2	64	19,8	73	22,6	64	26,9	73	39	64	39,8	73	56,6	64	55,4	74	81,9	64	78,1
1,8	66	10,4	54	16,8	68	20,9	54	22,7	68	40,2	54	33,7	69	53,4	54	47	69	76,4	54	66,2
1,9	71	11,1	44	13,7	74	22,7	44	18,6	75	58,8	44	27,5	75	58	44	38,4	76	83,9	44	53,7

Векторизация

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$$

Intrinsics Guide for Intel(R) AVX

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$(a_1, a_2) / (b_1, b_2) = (a_1 / b_1, a_2 / b_2)$$

for (i=0; i<n; i++) a[i] += b[i];

for (i=0; i<n-8; i+=8) ...

for (j=i; j<n-4; j+=4) ...

for (i=j; i<n-2; i+=2) ...

for (j=i; j<n; j++) ...

Блочный формат хранения матриц (BSR)

	1		2		3	
1	1	2			3	4
	5	6				7
2	8	9	10	11		
	12	13		14		
3			15		16	
					17	18

$$n = 3 \quad n_b = 2$$

$$ia = \{0, 2, 4, 6\};$$

$$ja = \{0, 2, 0, 1, 1, 2\};$$

$$a = \{[1, 2, 5, 6], [3, 4, 0, 7], [8, 9, 12, 13], [10, 11, 0, 14], [15, 0, 0, 0], [16, 0, 17, 18]\}$$

Сравнение эффективности “точечного” и “модифицированного блочного” форматов хранения

	2				3				4				5				6			
	Epf		Elf		Epf		Elf		Epf		Elf		Epf		Elf		Epf		Elf	
om	it	t, c	it	t, c	it	t, c	it	t, c	it	t, c	it	t, c	it	t, c	it	t, c	it	t, c	it	t, c
1	76	1,8	73	0,9	77	3,7	73	2	77	4,9	73	2,6	77	9,8	73	4,2	78	13,9	73	5,5
1,1	69	1,2	66	0,9	70	2,5	66	1,6	70	4,5	66	2,3	70	6,8	66	3,6	71	9,9	66	5,1
1,2	63	1,1	60	0,7	64	2,3	60	1,5	64	4,1	60	2,3	64	6,3	60	3,4	64	8,9	60	4,7
1,3	58	1	55	0,7	58	2,1	55	1,3	59	3,8	55	1,9	59	5,8	55	3	59	8,3	55	4,2
1,4	53	0,9	51	0,7	54	1,9	51	1,2	54	3,4	51	1,7	54	5,3	51	3,2	54	7,7	51	4
1,5	49	0,9	46	0,5	49	1,7	46	1,1	50	3,2	46	1,6	50	4,9	46	2,5	50	7	46	3,7
1,6	44	0,8	41	0,5	45	1,6	41	1,1	45	2,9	41	1,8	45	4,4	41	2,3	45	6,4	41	3,3
1,7	40	0,7	36	0,5	41	1,5	36	1	41	2,7	36	1,6	41	4,1	36	2	41	5,8	36	2,7
1,8	38	0,7	32	0,5	39	1,4	32	0,8	40	2,6	32	1,2	40	3,9	32	1,9	40	5,7	32	2,5
1,9	45	0,8	31	0,5	46	1,6	31	0,8	47	3	31	1,3	47	4,6	31	1,8	47	6,6	31	2,5

Сравнение эффективности “точечного” и “модифицированного блочного” форматов хранения

	2				3				4				5				6			
	Epf		Elf		Epf		Elf		Epf		Elf		Epf		Elf		Epf		Elf	
om	it	t, c	it	t, c	it	t, c	it	t, c	it	t, c	it	t, c	it	t, c	it	t, c	it	t, c	it	t, c
1	141	26,1	136	14,5	143	54,1	136	27,9	144	76,1	136	39	144	132	136	61,1	145	189	136	95
1,1	129	20	124	13,4	131	39,8	124	25,8	131	69,5	124	36,1	132	102	124	55,8	132	145	124	90,9
1,2	120	18,6	115	12,3	121	36,6	115	23,9	121	64,3	115	33,3	122	93,9	115	52,1	122	134	115	84,3
1,3	109	17	104	11,1	110	33,7	104	21,8	111	58,9	104	30,5	111	85,5	104	47	112	124	104	76,5
1,4	98	15,2	93	9,9	100	30,7	93	19,4	100	53,1	93	27,2	101	77,9	93	42,2	101	111	93	68,2
1,5	88	13,8	83	8,9	90	27,7	83	17,3	90	47,8	83	24,1	91	70,1	83	37,5	91	100	83	60,9
1,6	79	12,4	74	8,2	81	24,9	74	15,7	81	43,3	74	21,5	81	62,5	74	33,5	82	90,7	74	54,2
1,7	71	11,2	64	6,9	73	22,6	64	13,7	73	39	64	18,4	73	56,6	64	29,1	74	81,9	64	47,1
1,8	66	10,4	54	6,2	68	20,9	54	11,3	68	40,2	54	15,6	69	53,4	54	24,6	69	76,4	54	39,7
1,9	71	11,1	44	4,6	74	22,7	44	9	75	58,8	44	12,6	75	58	44	20,1	76	83,9	44	32,7

Спасибо за внимание!