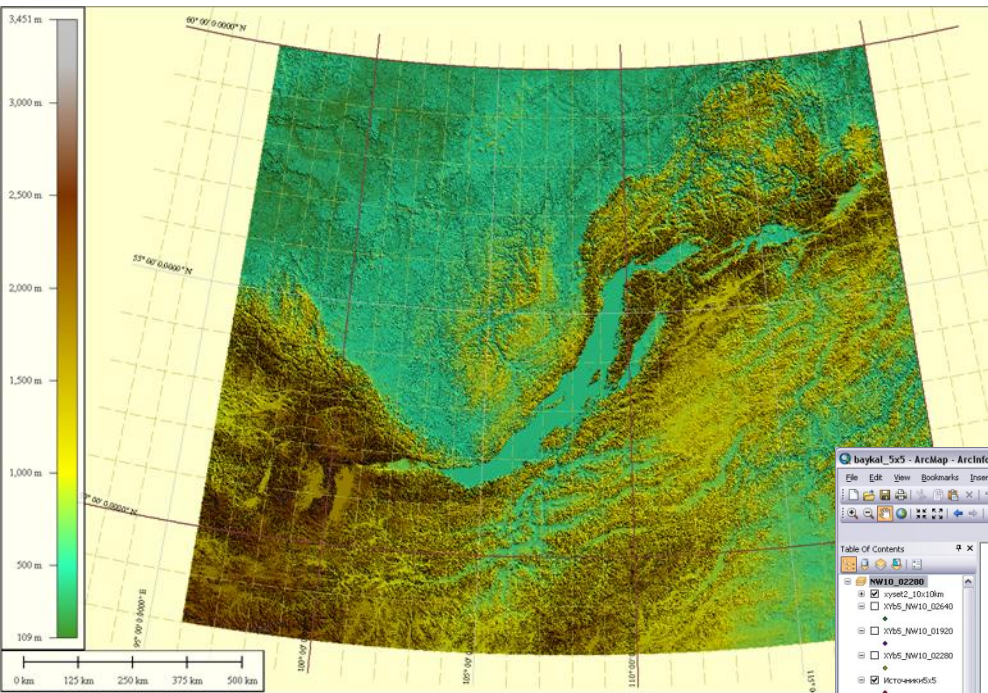


**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
АТМОСФЕРНОГО ПЕРЕНОСА
ПРИМЕСИ
В БАЙКАЛЬСКОМ РЕГИОНЕ**

Пьянова Э.А.

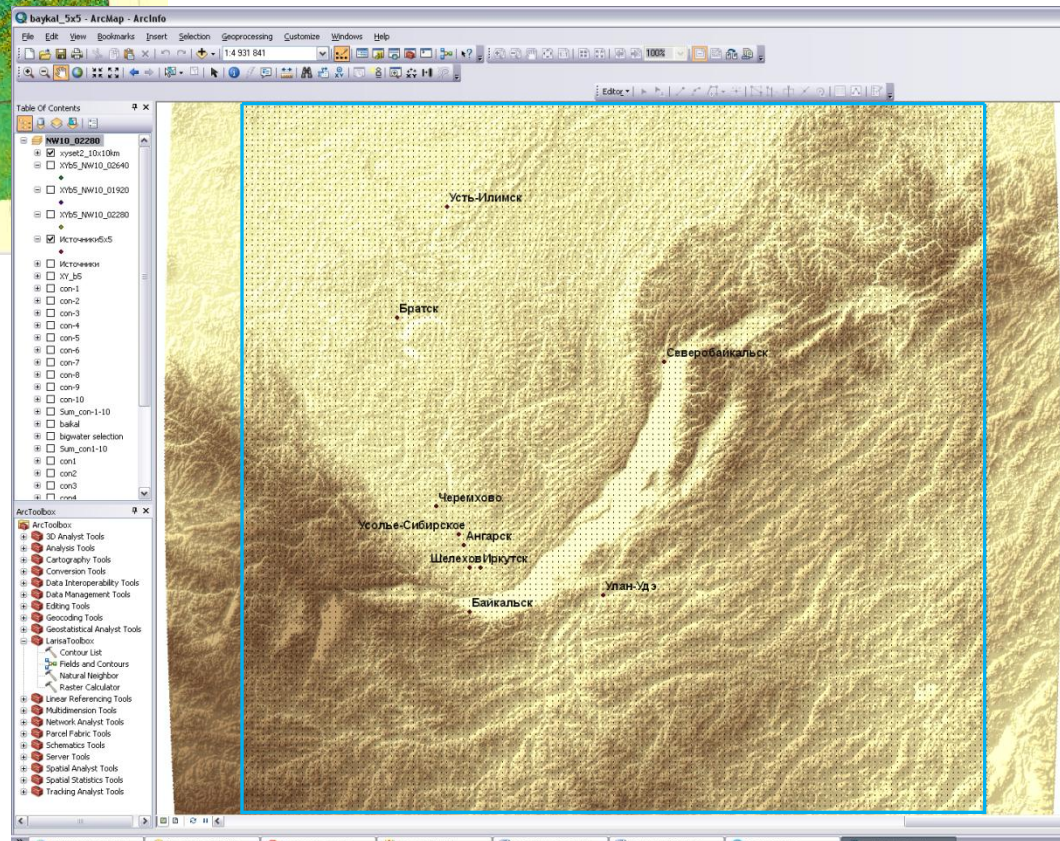
*Институт вычислительной математики и математической
геофизики СО РАН, Новосибирск, pianova@ngs.ru*

Область моделирования



Перепад высот
от 133 м до 2867 м

Рельеф – данные SRTM
(Shuttle Radar Topography
Mission), 2000



Уравнения модели динамики атмосферы

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \operatorname{div} \rho u \vec{u} = -\frac{\partial p'}{\partial x} + l \rho v + \Delta_u u ,$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \operatorname{div} \rho v \vec{u} = -\frac{\partial p'}{\partial y} - l \rho u + \Delta_v v ,$$

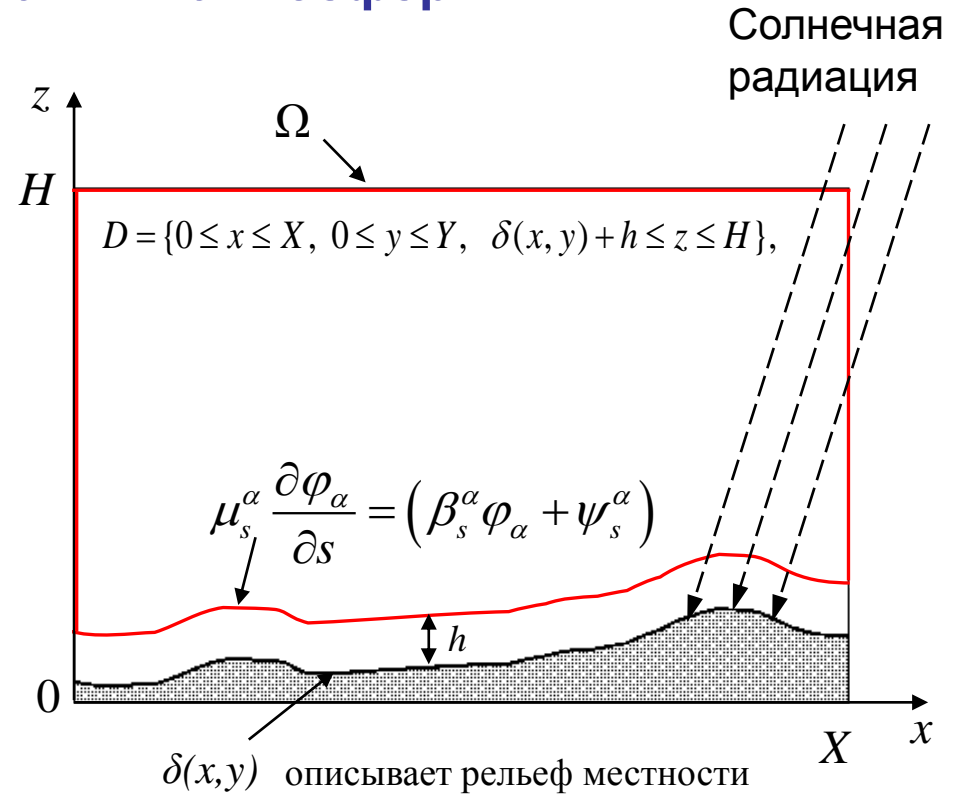
$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \operatorname{div} \rho w \vec{u} = -\frac{\partial p'}{\partial z} + \lambda \rho \vartheta' + \Delta_w w ,$$

$$\frac{\partial \rho \vartheta'}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vartheta' \vec{u} = -S \rho w - \frac{\rho L_w \Phi_v}{c_p} + \Delta_\theta \vartheta' ,$$

$$\frac{\partial \rho q'}{\partial t} + \operatorname{div} \rho q' \vec{u} = \rho \Phi_v - \rho w \frac{\partial \bar{Q}}{\partial z} + \Delta_q q' ,$$

$$\operatorname{div} \rho \vec{u} = 0 ,$$

$$p = \rho R T (1 + 0.608 q) , \quad \theta = T \left(\frac{1000}{p} \right)^{R/c_p} .$$



$$\varphi_\alpha (\alpha = \overline{1,5}) = u, v, w, \vartheta', q' ,$$

$\mu_s^\alpha, \beta_s^\alpha, \psi_s^\alpha$ – функции заданного вида

Уравнения интегрируются в области $D_t = D \times [0, \bar{t}]$,

$[0, \bar{t}]$ – интервал времени

Модель переноса пассивной примеси

$$\frac{\partial \rho c}{\partial t} + u \frac{\partial \rho c}{\partial x} + v \frac{\partial \rho c}{\partial y} + (w - w_c) \frac{\partial \rho c}{\partial z} = \Delta_c c + f$$

$$c(\vec{x}, 0) = c^0(\vec{x}), \quad t = 0,$$

$$\frac{\partial c}{\partial x} = 0, \quad x = 0, X, \quad \frac{\partial c}{\partial y} = 0, \quad y = 0, Y, \quad \frac{\partial c}{\partial z} = 0, \quad z = H,$$

$$\mu_{cz} \frac{\partial c}{\partial z} = (\beta_c - w_c) c - f_0(x, y, t), \quad z = \delta(x, y),$$

$$\Delta_c = \frac{\partial}{\partial x} \mu_{cx} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \mu_{cy} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \mu_{cz} \frac{\partial}{\partial z}$$

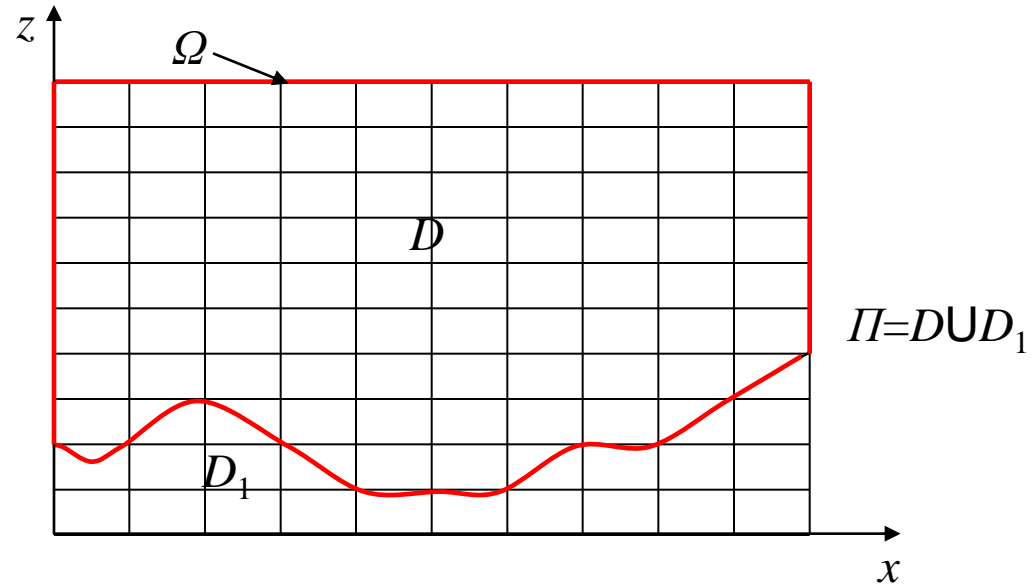
$\delta(x, y)$ – функция, описывающая рельеф местности

Учет рельефа

(метод фиктивных областей)

$$B \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t} + A \vec{\varphi} = F, \quad \vec{x} \in D,$$

$$A_0 \vec{\varphi} = F_0, \quad \vec{x} \in \Omega,$$



Дополним область D до прямоугольного параллелепипеда Π и рассмотрим в нем задачу

$$\tilde{B} \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t} + \tilde{A} \vec{\varphi} = \tilde{F}, \quad \text{где } \tilde{A} = \begin{cases} A & \text{для } \vec{x} \in D, \\ A_0 & \text{для } \vec{x} \in \Omega, \\ 0 & \text{для } \vec{x} \in D_1, \end{cases} \quad \tilde{F} = \begin{cases} F & \text{для } \vec{x} \in D, \\ F_0 & \text{для } \vec{x} \in \Omega, \\ 0 & \text{для } \vec{x} \in D_1. \end{cases} \quad (2.6)$$

Через D_1 обозначено дополнение области D до параллелепипеда.

Условия на границе раздела не меняются.

Поскольку условия на границе раздела D и D_1 являются естественными для вариационного функционала, то они учитываются автоматически в коэффициентах дискретных уравнений, а решение задачи в основной области D не зависит от способа продолжения через границу раздела в D_1 .

Реализация численной модели на основе интегрального тождества

Система уравнений

$$B \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t} + A \vec{\varphi} = F, \quad \vec{x} \in D \quad (2.1)$$

$$A_0 \vec{\varphi} = F_0, \quad \vec{x} \in \Omega, \quad (2.2)$$

$$\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0, \quad t = 0, \quad (2.3)$$

Уравнения модели умножаются на весовые функции, складываются и интегрируются по всей области с учетом начальных и краевых условий

Разностные схемы для уравнений модели (2.1)-(2.3)

$$\frac{\partial I^h(\vec{\varphi}^h, \vec{\varphi}^{*h})}{\partial \vec{\varphi}^{*h}} = 0, \quad \forall \vec{\varphi}^{*h} \in Q^{*h}(D_t^h)$$

Вариационно-разностный подход

Интегральное тождество

$$I(\vec{\varphi}, \vec{\varphi}^*) = 0$$

Вводится сеточная область, на ней определяются пространственные сеточные функции

$$\vec{\varphi}^h \in Q^h(D_t^h), \quad \vec{\varphi}^{*h} \in Q^{*h}(D_t^h).$$

строятся аппроксимации интегрального тождества

Дискретный аналог интегрального тождества

$$I^h(\vec{\varphi}^h, \vec{\varphi}^{*h}) = 0$$

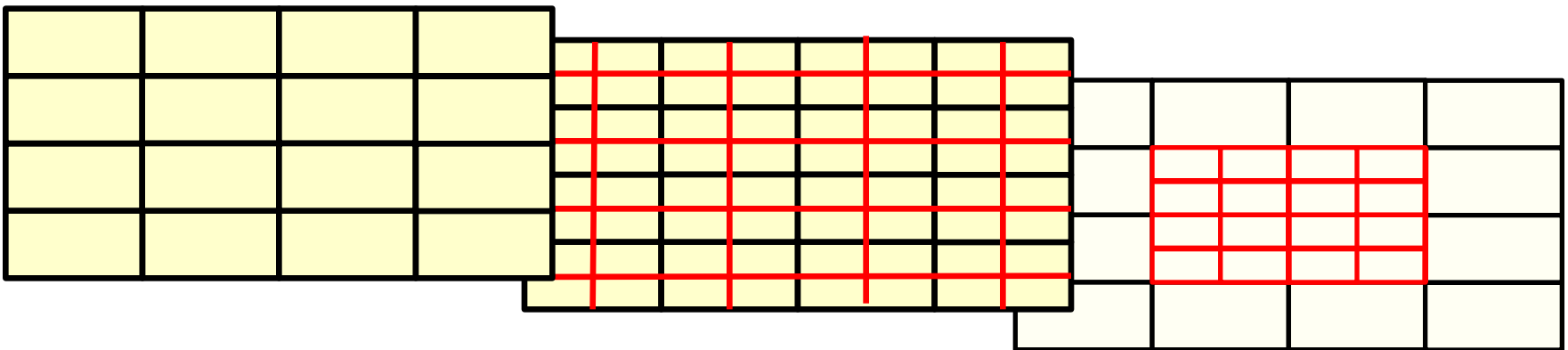
$$\vec{\varphi}^h = \left\{ \vec{\varphi}_{imk}^j = \vec{\varphi}(x_i, y_m, z_k, t_j) \right\},$$

$$\vec{\varphi}^{*h} = \left\{ \vec{\varphi}_{imk}^{*j} = \vec{\varphi}^*(x_i, y_m, z_k, t_j) \right\},$$

- При построении разностных схем на основе интегрального тождества применялся *метод расщепления* по физическим процессам и координатным направлениям.
- На первом этапе расщепления для аппроксимации **конвективно-диффузионных операторов** использовались *монотонные разностные схемы*. Метод построения основан на дискретно-аналитических аппроксимациях интегрального тождества, где в качестве весовых функций используются решения локальных сопряженных задач (Пененко В.В., 1993).
- Решение уравнений на этапе согласования метеоэлементов сводится к решению **разностного аналога уравнения Пуассона** для отклонений давления, по которым затем восстанавливаются поля компонент скорости ветра и потенциальной температуры. Уравнение для отклонений давления решалось с помощью метода сопряженных градиентов.
- Схемы удовлетворяют разностному аналогу уравнения баланса энергии и закону сохранения массы, переносят субстанцию в направлении движения потока.

Основные направления исследований

- Изучение процессов формирования атмосферных циркуляций и переноса примеси в областях со сложным рельефом (Байкальский регион)
- Модификация блоков модели и программного кода для уменьшения времени счета
- Сравнение результатов расчетов на сетках различного масштаба.

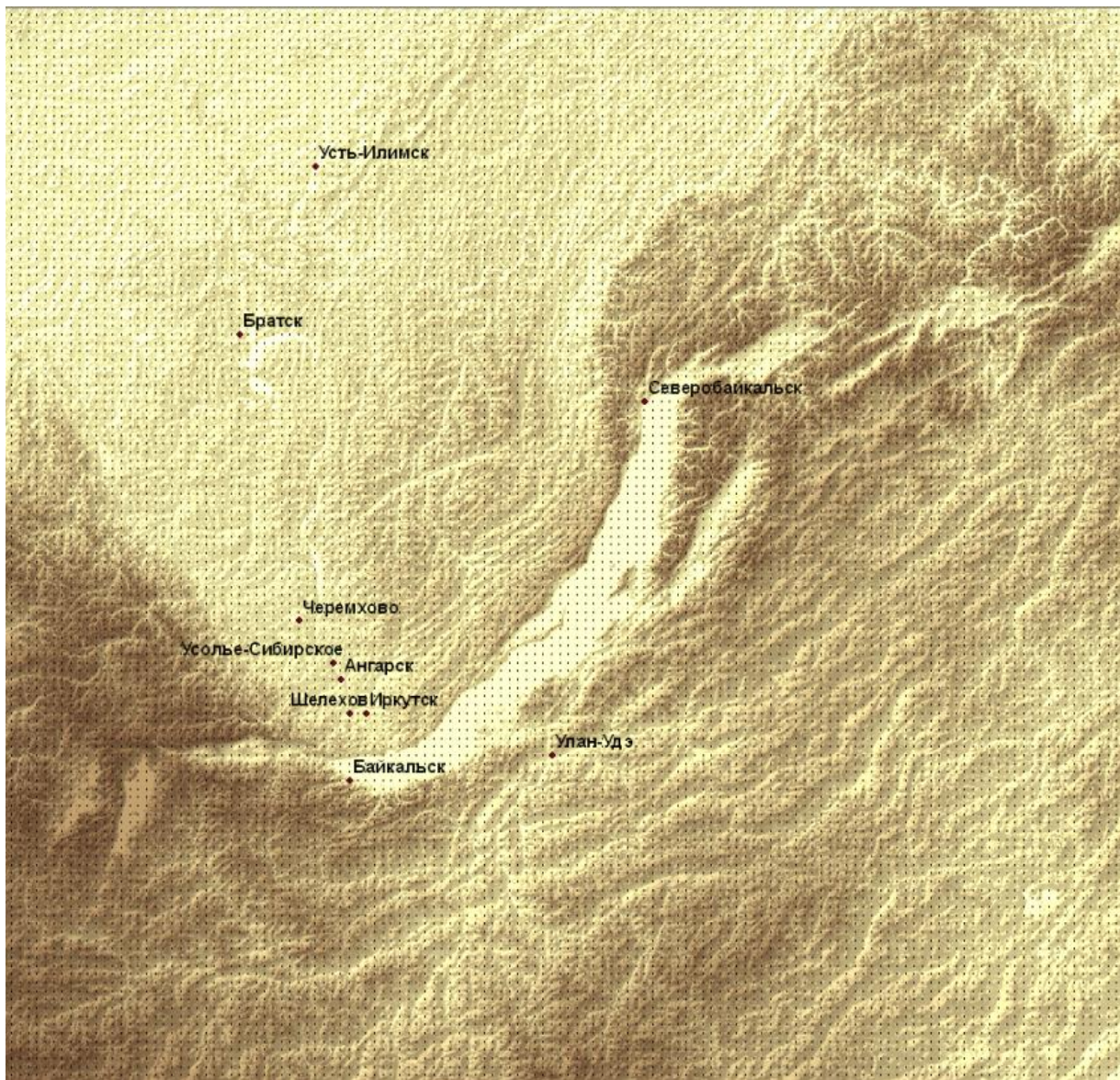


Метод сопряженных градиентов

$$Ax=f$$

A – 7ми диагональная матрица  CSR-формат хранения матрицы

	134x129x50	267x258x50	134x129x50	267x258x50
1й шаг	13 сек (9.7)	87 сек (73.5)	6 сек (2.7)	25 сек (10)
2й шаг	10 сек (6.5)	70 сек (54)	5 сек (1.7)	23 сек (7.5)
3й шаг	10 сек (6.3)	68 сек (53.5)	5 сек (1.6)	24 сек (7.2)
1-60й шаг	12 мин	77 мин	7 мин	36 мин
60-120 шаги	15 мин		9 мин	49 мин



Область моделирования

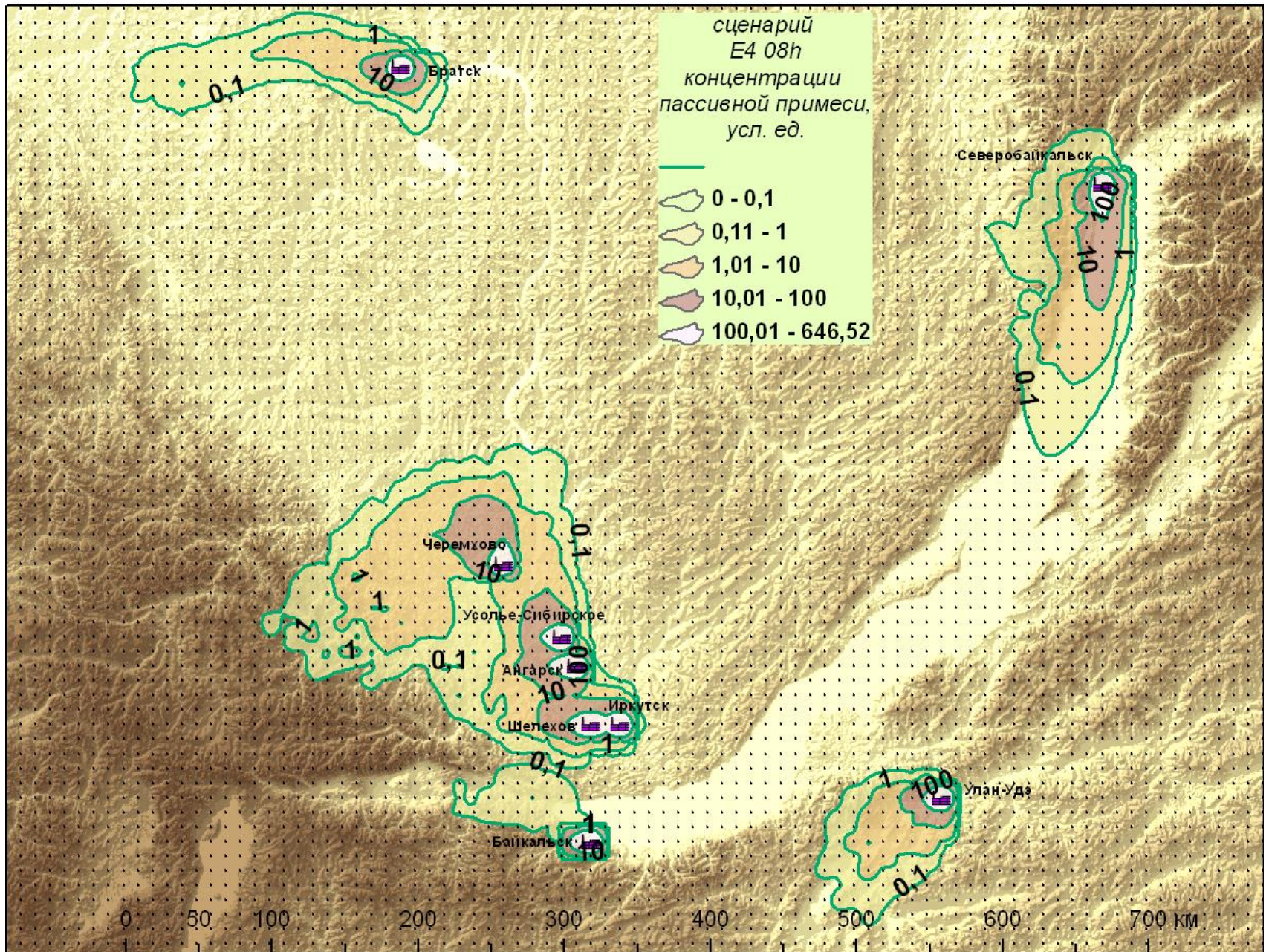
1340 км на 1290 км
по горизонтали,
6 км по вертикали.

Расчетная сетка
прямоугольная
равномерная по
горизонтали.

Шаги сетки

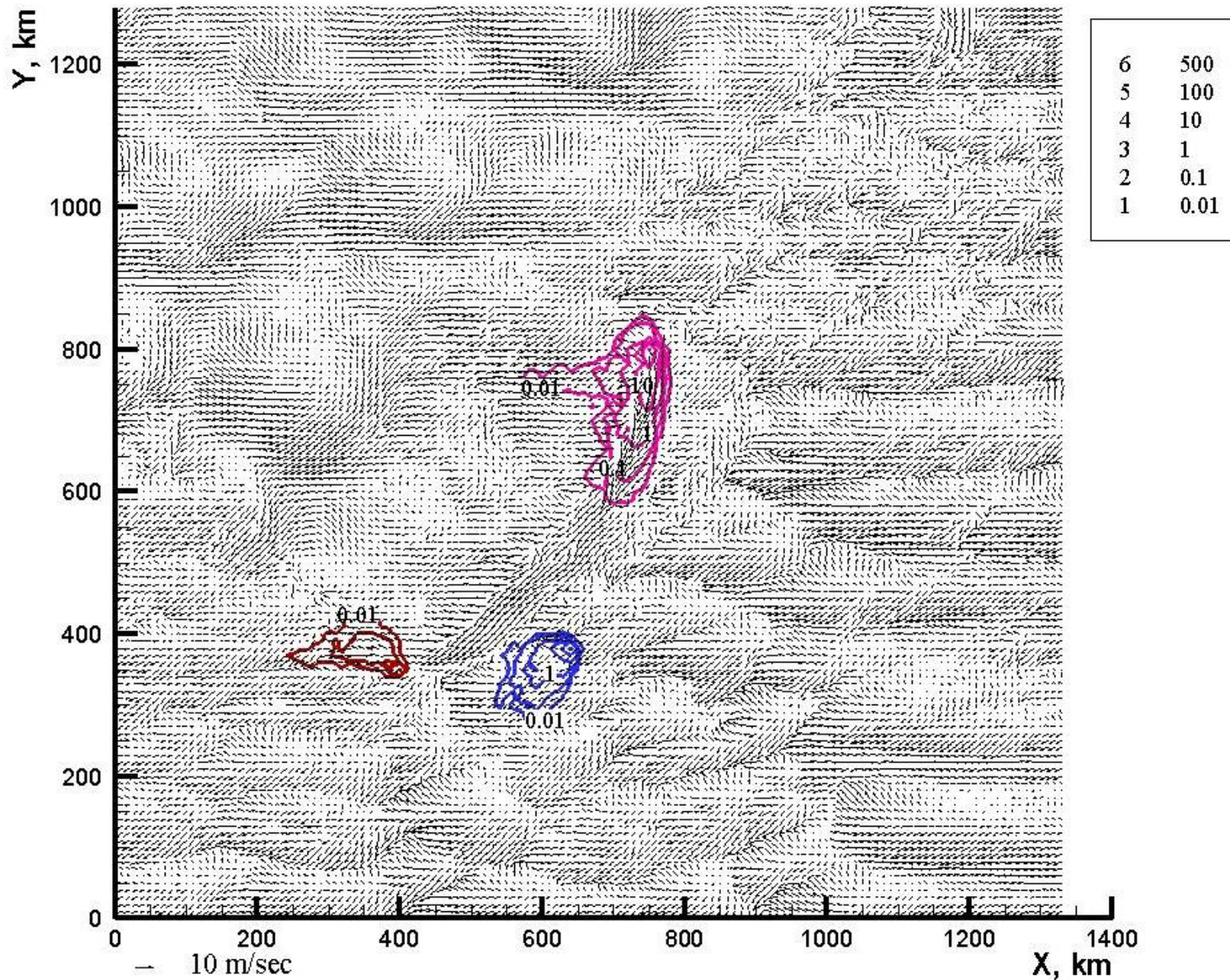
а) по горизонтали 10 км, по
вертикали 100-200 м.

б) по горизонтали 5 км, по
вертикали 100-200 м.



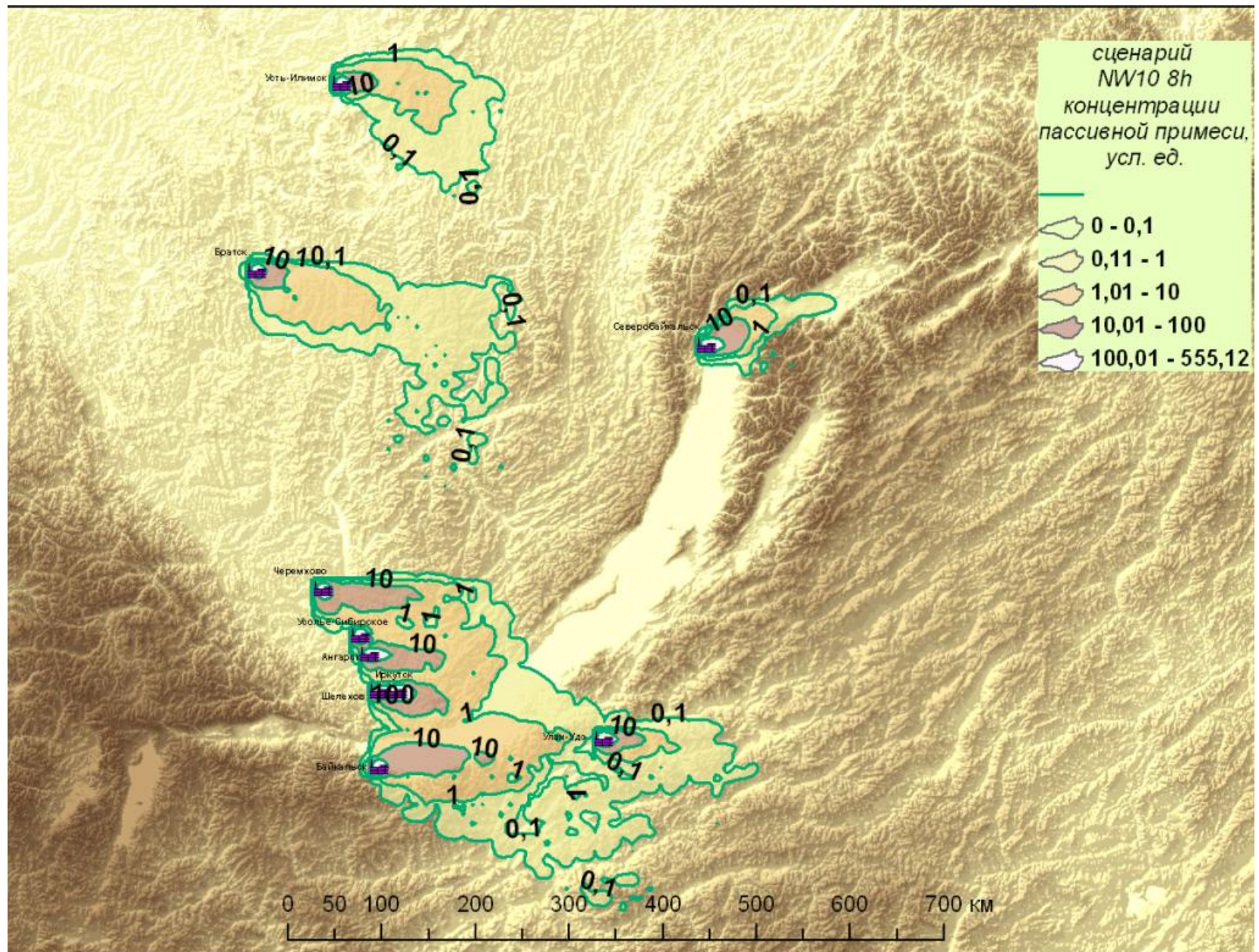
Восточный ветер U=4 м/с

8 ч



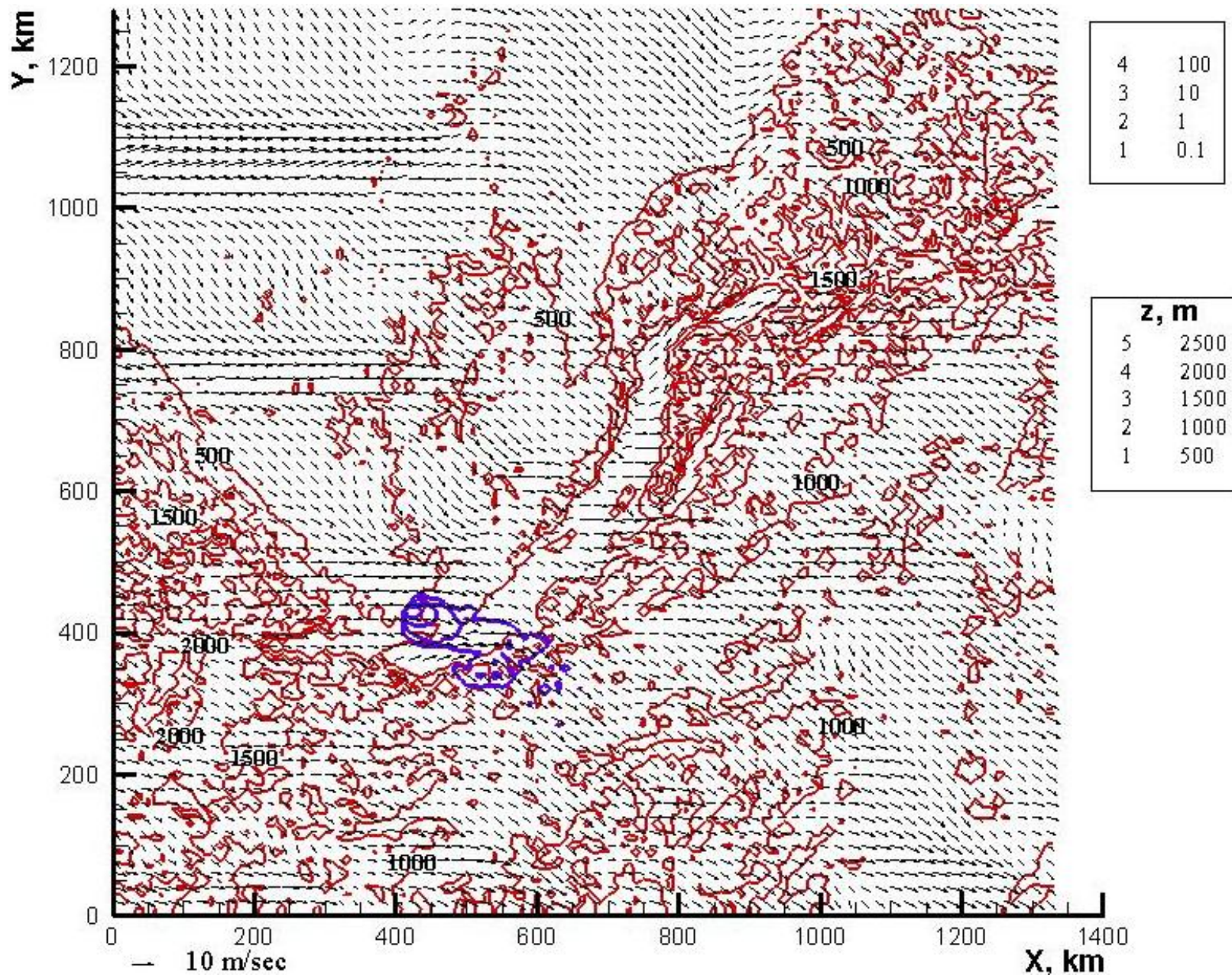
Восточный ветер $U=4$ м/с

8 ч



Северо-западный ветер $U=7$ м/с, $V=-7$ м/с

8 ч



Северо-западный ветер $U=7$ м/с, $V=-7$ м/с

8 ч

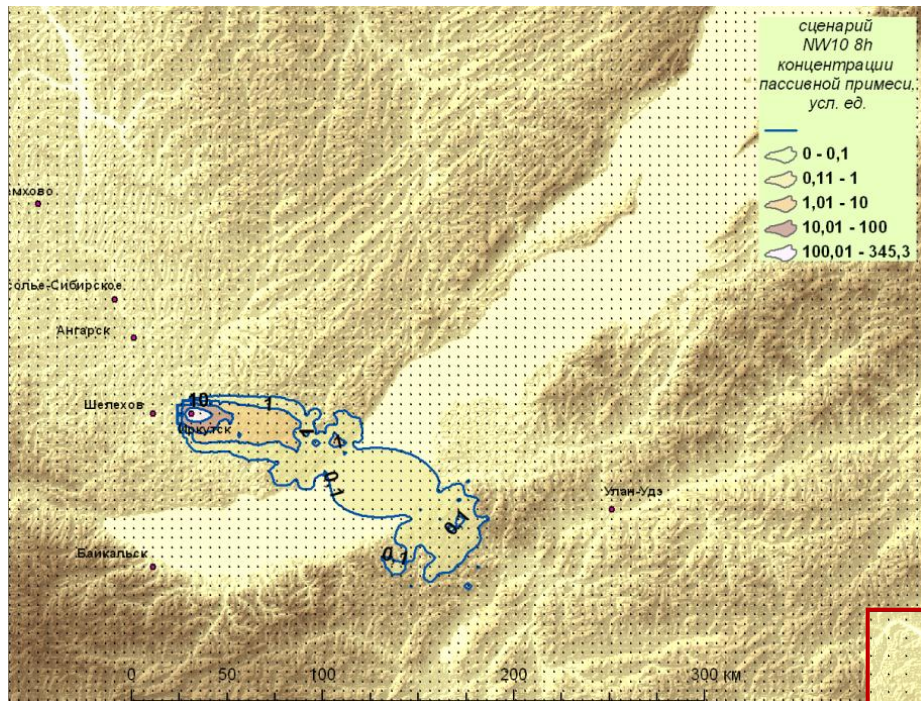
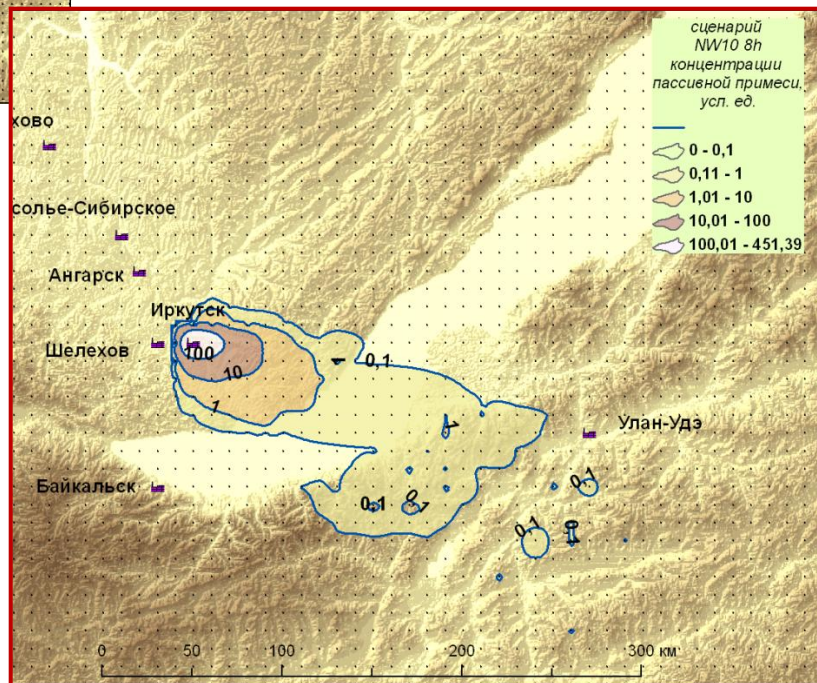


Рис.1
 $U_g=7$ м/с,
 $V_g=-7$ м/с

(северо-западный ветер)

Иркутск

8 ч



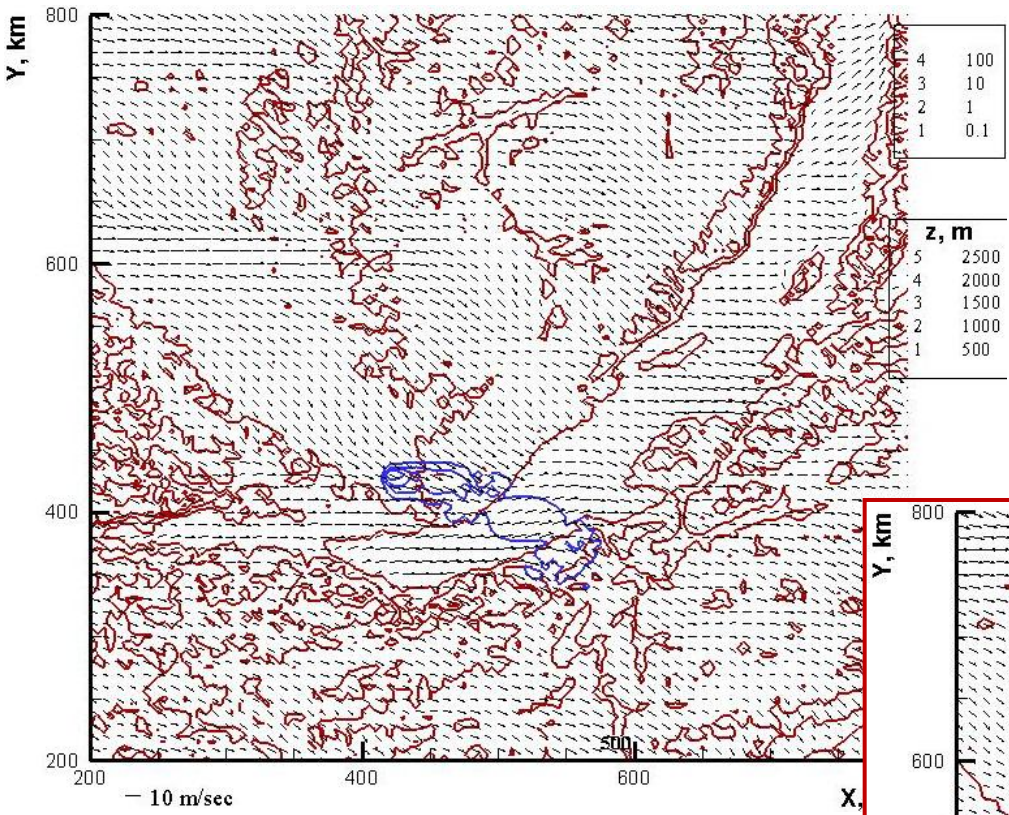
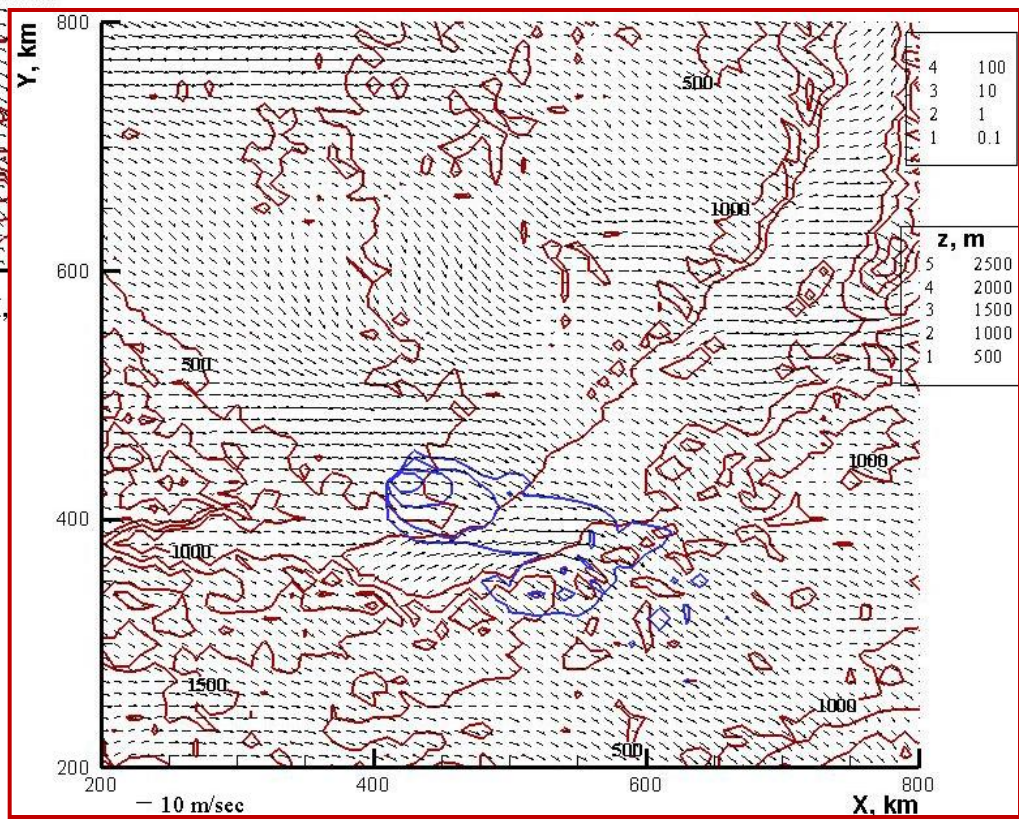


Рис.2
 $U_g = 7 \text{ м/с}$,
 $V_g = -7 \text{ м/с}$

(северо-западный ветер)

Иркутск

8 ч



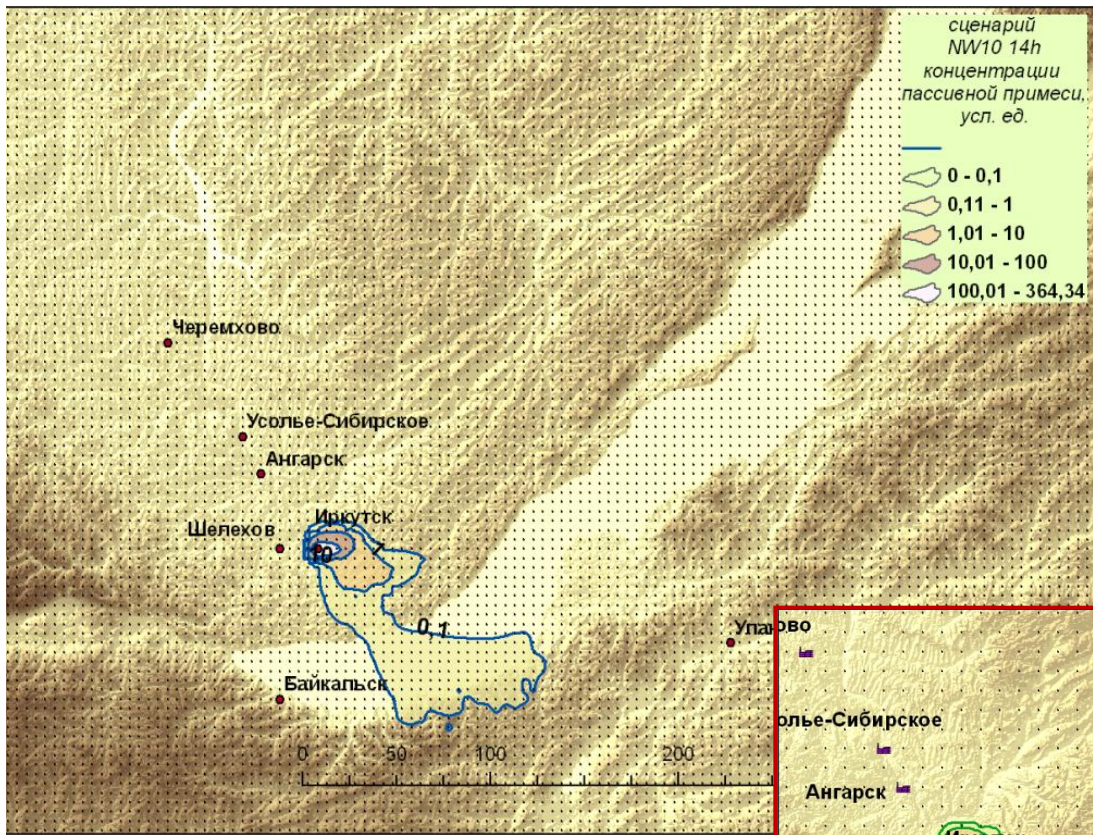
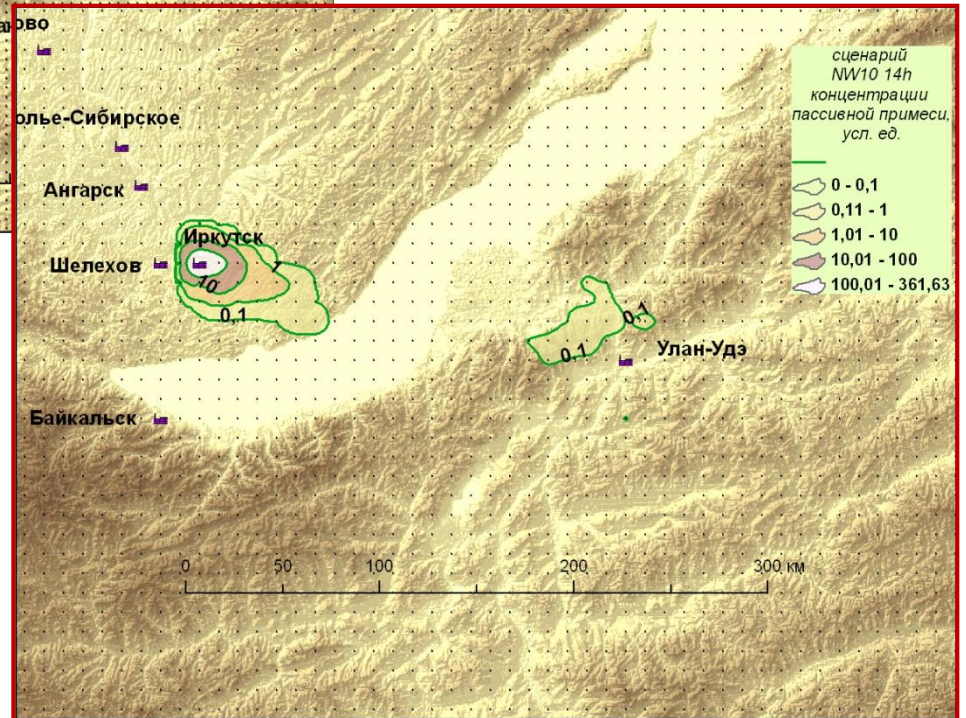


Рис.3

$U_g=7$ м/с,
 $V_g=-7$ м/с

(северо-западный ветер)



Иркутск

14 ч

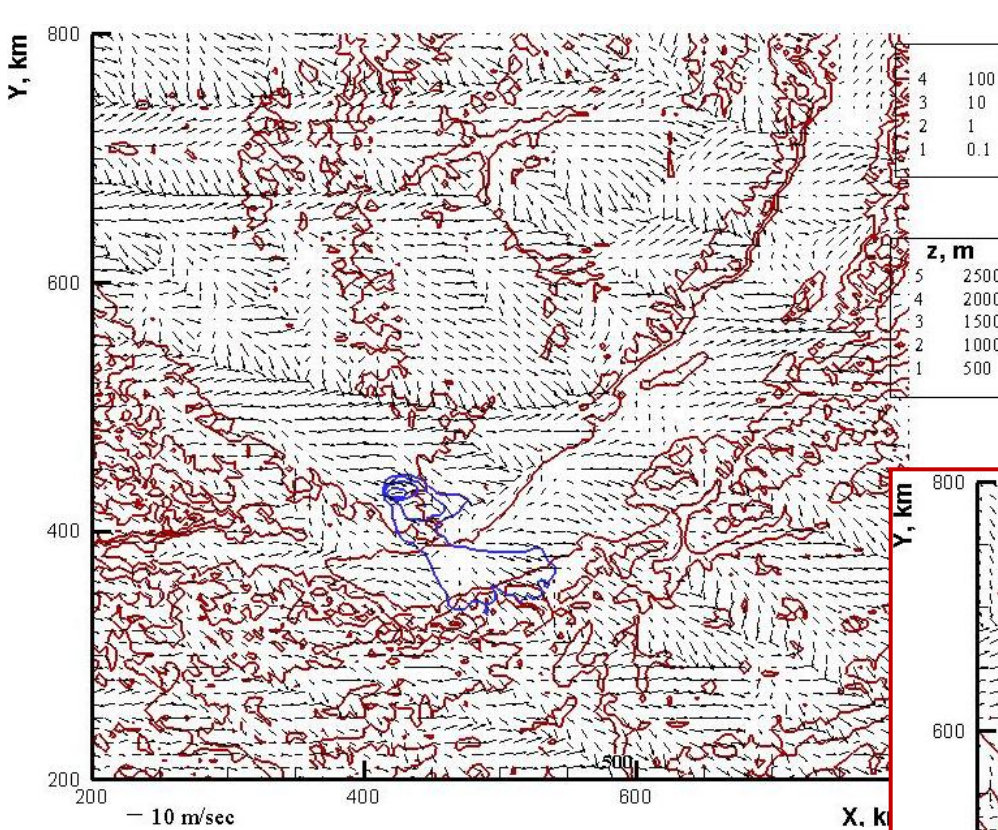
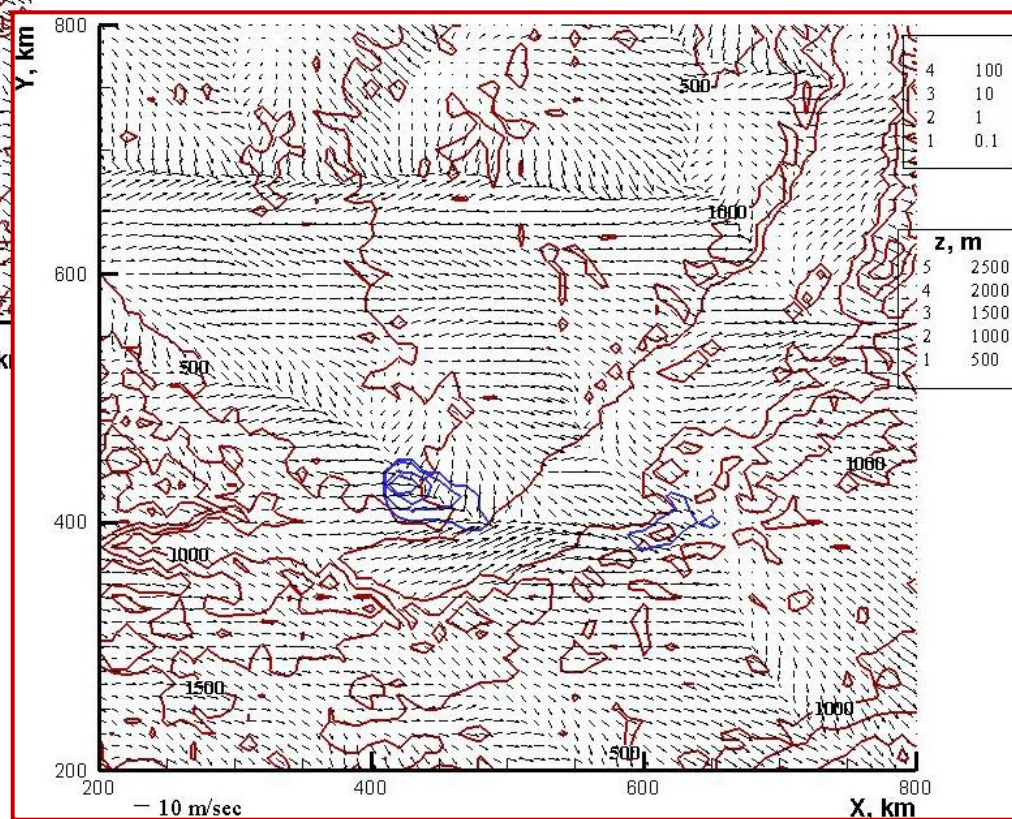


Рис.4
 $U_g=7$ м/с,
 $V_g=-7$ м/с

(северо-западный ветер)

Иркутск

14 ч



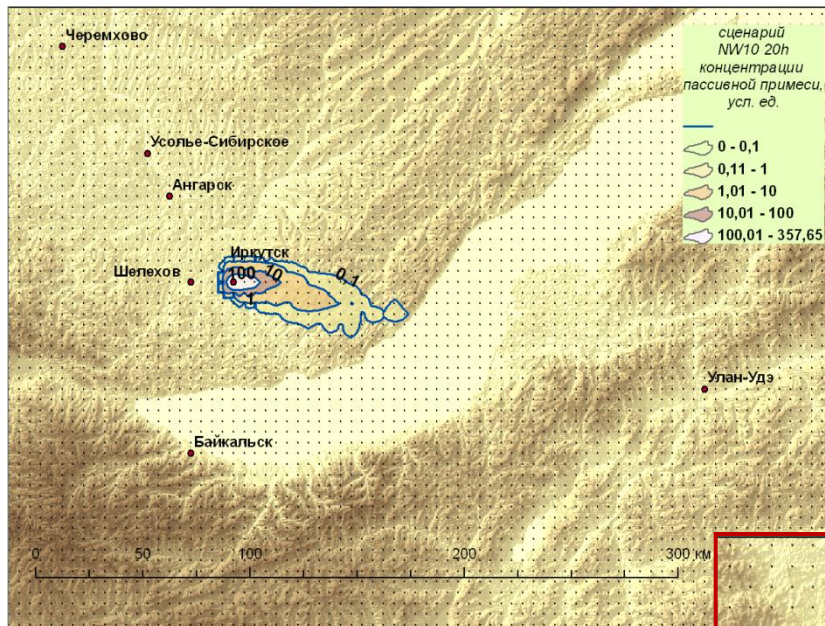
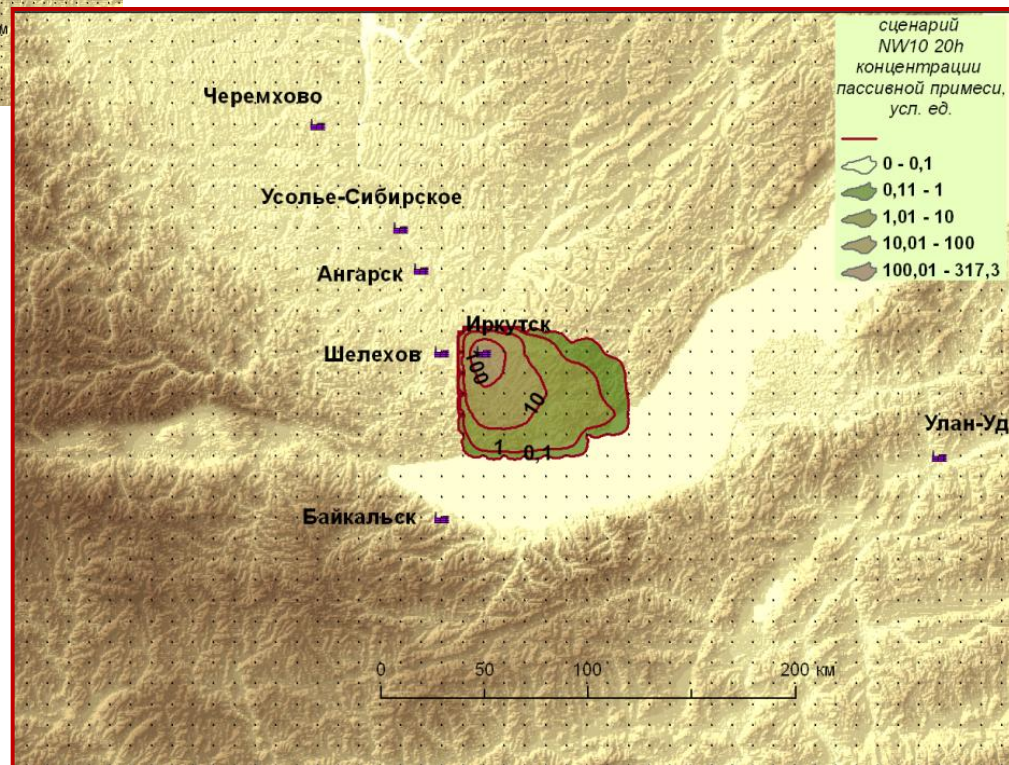


Рис.5
 $U_g=7$ м/с,
 $V_g=-7$ м/с

(северо-западный ветер)

Иркутск

20 ч



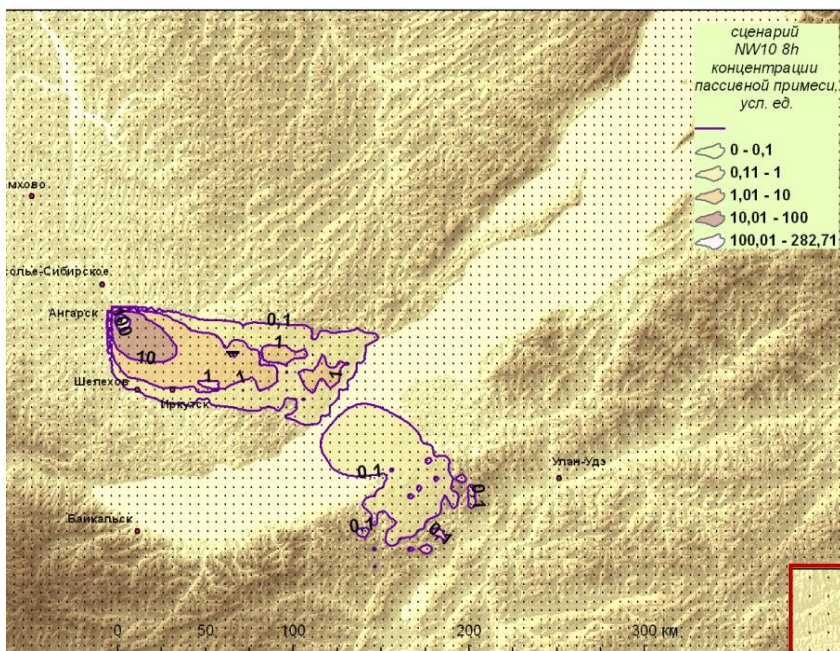
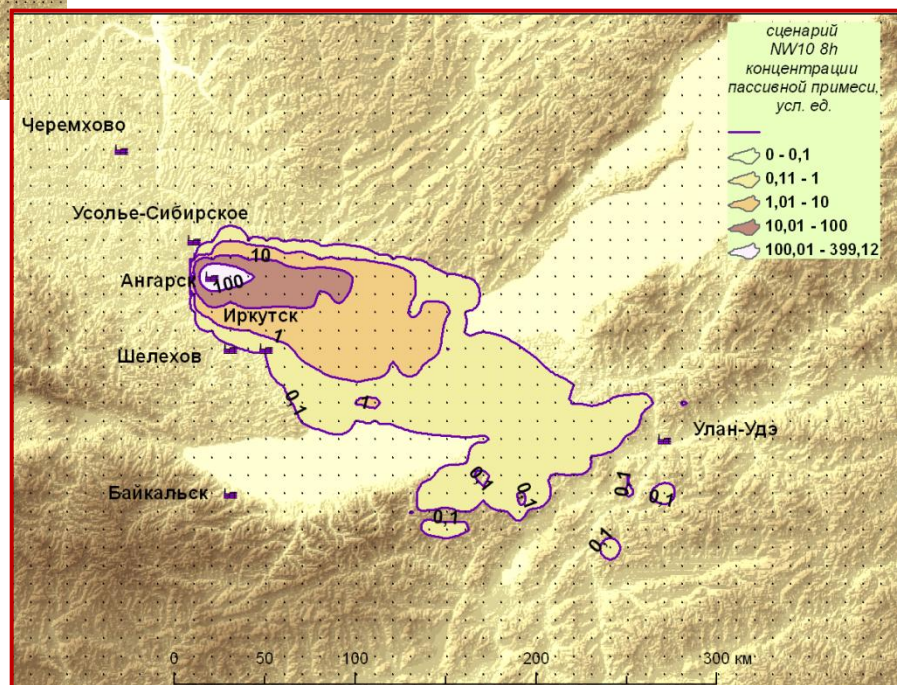


Рис.6
 $U_g=7$ м/с,
 $V_g=-7$ м/с

(северо-западный ветер)

Ангарск

8 ч



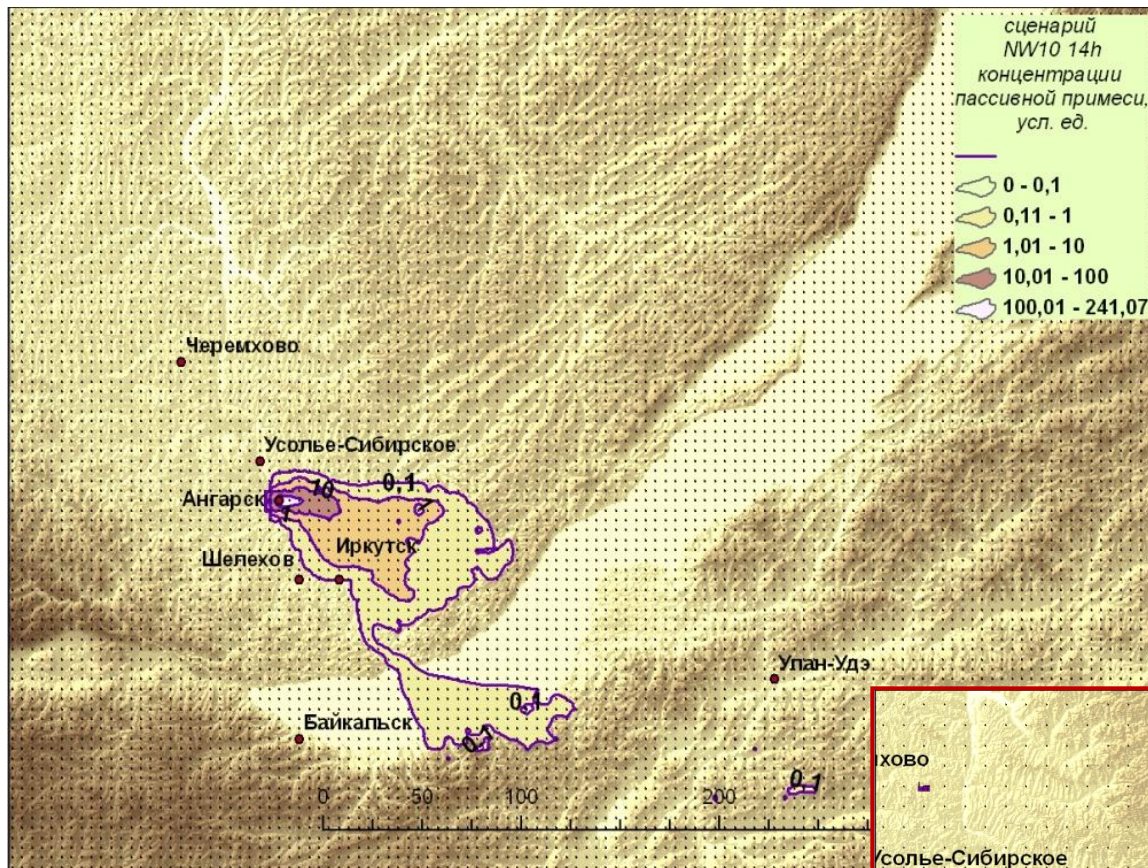
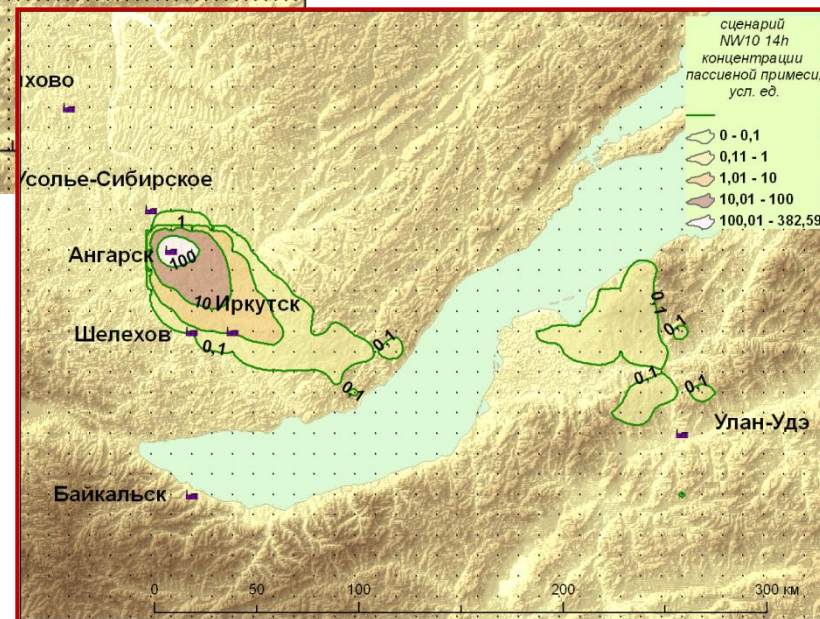


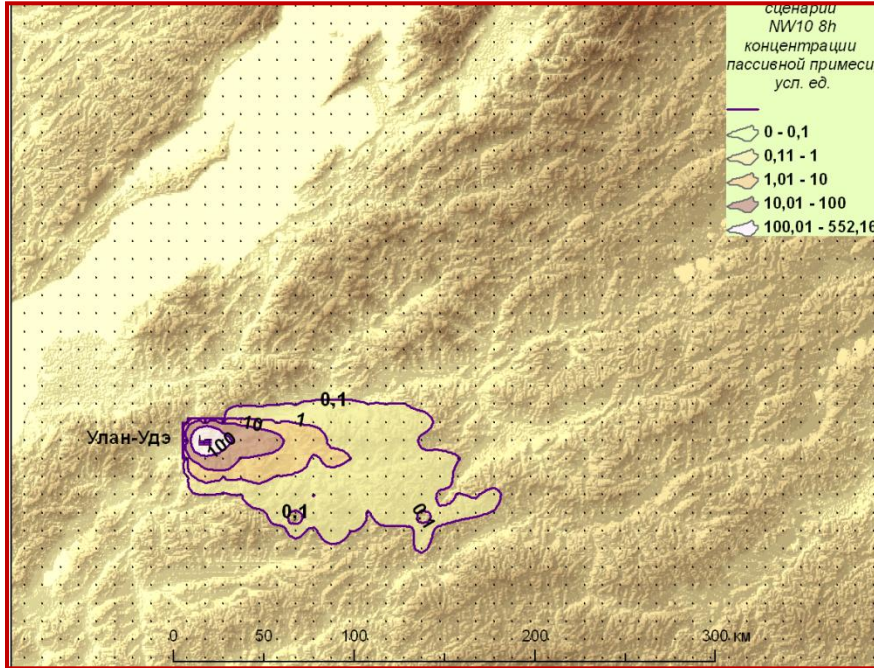
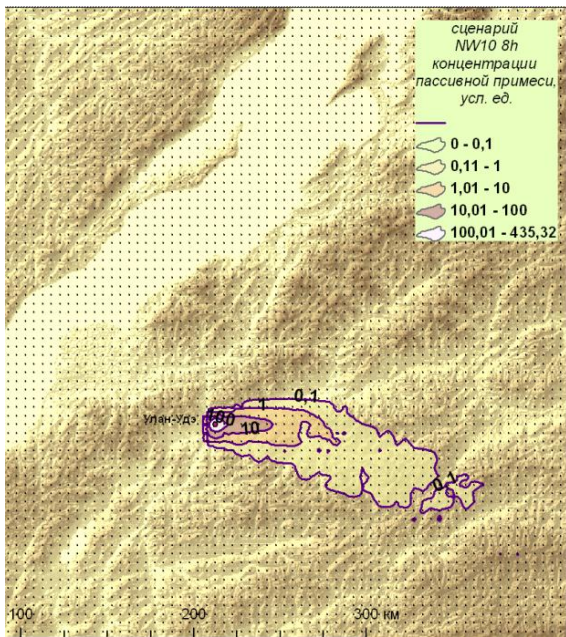
Рис.7
 $U_g=7$ м/с,
 $V_g=7$ м/с

(северо-западный ветер)

Ангарск

14 ч





Улан-Уде

8 ч

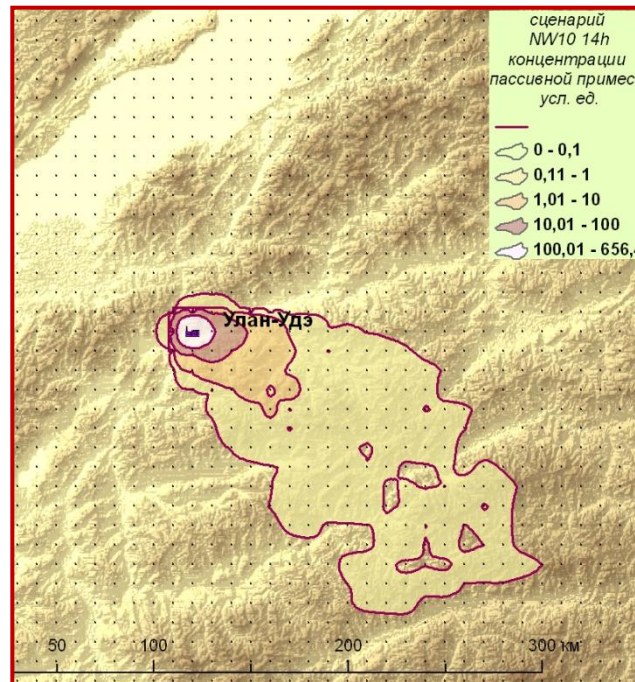
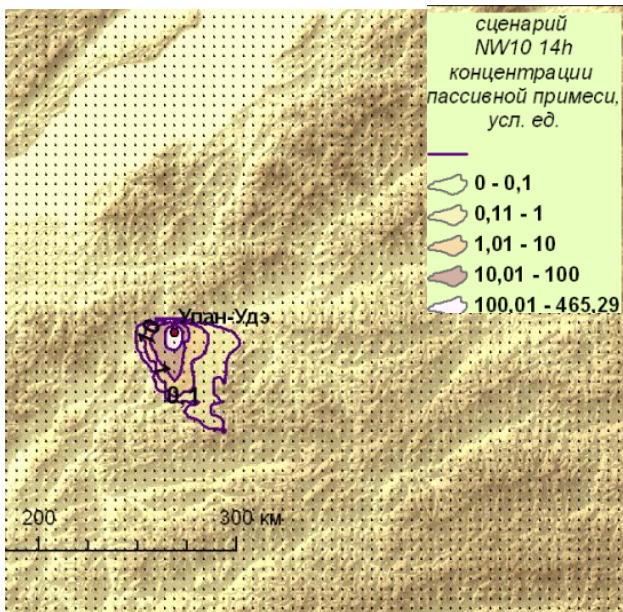


Рис.8
Ug=7 м/с,
Vg=-7 м/с

(северо-западный ветер)

Улан-Уде

14 ч

Спасибо за внимание!

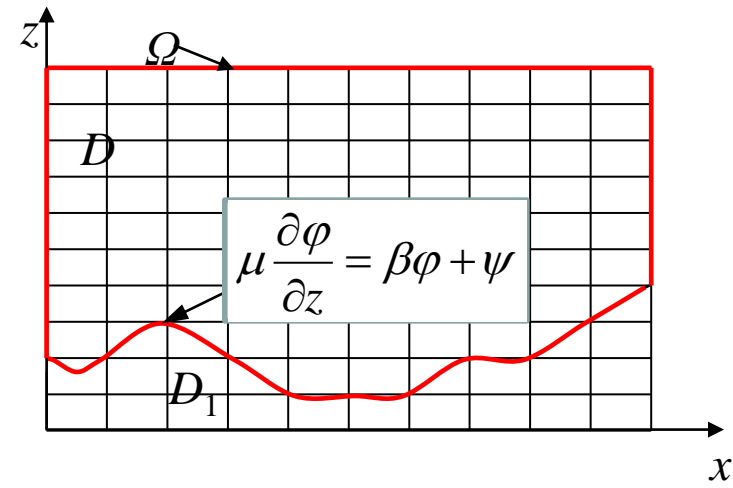
Интегральное тождество

$$I(\vec{\varphi}, \vec{Y}, \vec{\varphi}^*) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{D_t} \frac{1}{2} \left[(\Lambda \hat{u}, u^*) + (\Lambda \hat{v}, v^*) + (\Lambda \hat{w}, w^*) + \frac{\lambda}{S} (\Lambda \hat{g}', g^*) + L_w (\Lambda \hat{q}', q^*) + \chi (\Lambda \hat{c}, c^*) \right] dDdt + \\
 &+ \frac{1}{2} \int_D \left(\hat{u}u^* + \hat{v}v^* + \hat{w}w^* + \frac{\lambda}{S} \hat{g}'g^* + L_w \hat{q}'q^* + \chi \hat{c}c^* \right) \Big|_0^{\bar{t}} dD + \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} u_n \left(\hat{u}u^* + \hat{v}v^* + \hat{w}w^* + \frac{\lambda}{S} \hat{g}'g^* + L_w \hat{q}'q^* + \chi \hat{c}c^* \right) d\Omega dt + \\
 &+ \sum_{\alpha=1}^6 \int_{D_t} \left[\mu_{\alpha x} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x} \frac{\partial \varphi_\alpha^*}{\partial x} + \mu_{\alpha y} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y} \frac{\partial \varphi_\alpha^*}{\partial y} + \mu_{\alpha z} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial z} \frac{\partial \varphi_\alpha^*}{\partial z} \right] dDdt - \\
 &- \sum_{\alpha=1}^6 \left[\int_{\Omega_{yzt}} \mu_{\alpha x} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x} \varphi_\alpha^* \Big|_0^x d\Omega dt + \int_{\Omega_{xzt}} \mu_{\alpha y} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y} \varphi_\alpha^* \Big|_0^y d\Omega dt + \int_{\Omega_{xyt}} \mu_{\alpha z} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial z} \varphi_\alpha^* \Big|_{\delta(x,y)+h}^H d\Omega dt \right] + \\
 &+ \int_{D_t} \left[l(\hat{u}v^* - \hat{v}u^*) + \lambda(\hat{w}g^* - \hat{g}'w^*) \right] dDdt + \int_{D_t} \rho \left(\frac{L_w \Phi_v}{c_p} \frac{\lambda}{S} g^* + L_w \left(w \frac{\partial \bar{Q}}{\partial z} - \Phi_v \right) q^* - \chi w_c \frac{\partial c}{\partial z} c^* \right) dDdt + \\
 &+ \int_{D_t} \left[\vec{u}^* \text{grad} p' - \vec{u} \text{grad} p^* \right] dDdt + \int_{\Omega_t} \hat{u}_n p^* d\Omega dt = 0,
 \end{aligned}$$

$$\int_0^H \mathcal{N} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + w \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \varphi^* dz =$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} \mathcal{N} \left[\int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \varphi^* dz + \int_{z_i}^{z_{i+1}} \left(w \varphi^* + \mu \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz - \mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} \varphi^* \Big|_{z_i}^{z_{i+1}} \right]$$



$$\int_{z_4}^{z_5} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \varphi^* dz + \int_{z_4}^{z_5} \left(w \varphi^* + \mu \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz - \mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} \varphi^* \Big|_{z_4}^{z_5} \approx$$

$$\approx \varphi_4^* \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{z_4} \int_{z_4}^{z_5} r^* dz + \int_{z_4}^{z_5} \left(w r^* + \mu \frac{\partial r^*}{\partial z} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz - \mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} r^* \Big|_{z_4}^{z_5} \right] =$$

$$= \varphi_4^* \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{z_4} C - (wAB)(\varphi_5 - \varphi_4) + (\beta \varphi_4 + \psi) \right]$$

$$w \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \mu \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} = 0, \quad z_i \leq z \leq z_{i+1}$$

$$\varphi_i^*(z) = \varphi_i^* r^*(z),$$

$$r^*(z_i) = 1, \quad r^*(z_{i+1}) = 0,$$

$$r^*(z) = A(\exp[-(z - z_i)w / \mu] - B),$$

$$z_i \leq z \leq z_{i+1}$$

$$w r^* + \mu \frac{\partial r^*}{\partial z} = \text{const} = -wAB,$$

$$B = \exp[-(z_{i+1} - z_i)w / \mu],$$

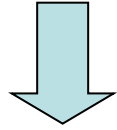
$$A = 1/(1 - B),$$

$$C = \left(\frac{\mu}{w} - (z_{i+1} - z_i)AB \right)$$

Пененко В.В. Численные схемы для адвективно-диффузионных уравнений с использованием локальных сопряженных задач. 1993

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u\varphi - \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \varphi^* dx =$$

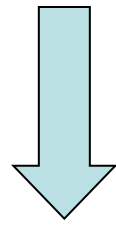
$$= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \varphi^* dx + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (u\varphi^* + \mu \frac{\partial \varphi^*}{\partial x}) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx - \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} \varphi^* \Big|_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}$$



выбор

$\varphi_i^*(x) = \varphi_i^* r_i^*(x)$, весовых функций

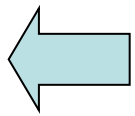
$$r_i^*(x) = \begin{cases} \varphi_1^*, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ \varphi_2^*, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ 0, & x \leq x_{i-1}, x \geq x_{i+1}, \end{cases}$$



схема

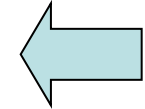
$$(R_{i+1/2} + R_{i-1/2}) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_i - (uAB)_{i+1/2} (\varphi_{i+1} - \varphi_i) + (uA)_{i-1/2} (\varphi_i - \varphi_{i-1}) = 0,$$

$$(uAB)_{i+1/2} \geq 0, \quad (uA)_{i-1/2} \geq 0, \quad R_{i\pm 1/2} \geq 0, \quad i = \overline{1, N-1}$$



$$\mu \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial x} + u\varphi_1^* = -uAB = const_1,$$

$$\mu \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial x} + u\varphi_2^* = uA = const_2,$$

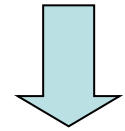


Локально-сопряженные задачи

$$\frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial \varphi_\alpha^*}{\partial x} + u \frac{\partial \varphi_\alpha^*}{\partial x} = 0, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \alpha = 1, 2$$

$$\varphi_1^*(x_i) = 1, \quad \varphi_1^*(x_{i+1}) = 0,$$

$$\varphi_2^*(x_i) = 0, \quad \varphi_2^*(x_{i+1}) = 1.$$



решения

$$\varphi_1^*(x) = A(e^{-\frac{u}{\mu}(x-x_i)} - B),$$

$$\varphi_2^*(x) = A(1 - e^{-\frac{u}{\mu}(x-x_i)}),$$

$$B = e^{-\frac{u}{\mu}(x_{i+1}-x_i)}, \quad A = 1/(1-B),$$

$$R_{i+1/2} = \Delta x \left(\frac{\mu}{u\Delta x} - AB \right)_{i+1/2},$$

$$R_{i-1/2} = \Delta x \left(A - \frac{\mu}{u\Delta x} \right)_{i-1/2}$$

Численная реализация задачи о переносе пассивной примеси

$$\frac{c_{im0}^{j+1} - c_{im0}^{j+2/3}}{\Delta \tau} R_{1/2} - (\tilde{w}AB)_{1/2} (c_{im1}^{j+1} - c_{im0}^{j+1}) + (\beta_c - w_c) c_{im0}^{j+1} = (f_0)_{im}^{j+1},$$

$$\left(\frac{c_{ink}^{j+1} - c_{ink}^{j+2/3}}{\Delta \tau} - f_{ink}^{j+2/3} \right) (R_{k+1/2} + R_{k-1/2}) + (\tilde{w}A)_{k-1/2} (c_{ink}^{j+1} - c_{i-1mk}^{j+1}) - (\tilde{w}AB)_{k+1/2} (c_{i+1mk}^{j+1} - c_{ink}^{j+1}) = 0,$$

$$k = \overline{1, K-1},$$

$$\frac{c_{imK}^{j+1} - c_{imK}^{j+2/3}}{\Delta \tau} R_{K-1/2} + (\tilde{w}A)_{K-1/2} (c_{imK}^{j+1} - c_{imK-1}^{j+1}) = 0, \quad (3.3)$$

$$i = \overline{0, N}, \quad m = \overline{0, M}, \quad j = \overline{0, J-1};$$

$$-(u_s AB)_{\alpha+1/2} = (\mu_s [\eta(1 - cth\eta)] / \Delta s)_{\alpha+1/2}, \quad (u_s A)_{\alpha-1/2} = (\mu_s [\eta(1 + cth\eta)] / \Delta s)_{\alpha-1/2},$$

$$R_{\alpha\pm 1/2} = (\Delta s [1 \mp \xi(\eta)] / 2)_{\alpha\pm 1/2}, \quad \eta_{\alpha\pm 1/2} = (u_s \Delta s / 2 \mu_s)_{\alpha\pm 1/2}, \quad \xi(\eta) = (\eta cth\eta - 1) / \eta,$$

$$\tilde{w} = w - w_c, \quad u_s = u, v, \tilde{w}, \quad \mu_s = \mu_{cx}, \mu_{cy}, \mu_{cz}, \quad \Delta s = \Delta x, \Delta y, \Delta z, \quad \alpha = i, m, k. \quad (3.4)$$

Положительность всех коэффициентов (3.4) и диагональное преобладание матрицы перехода для системы (3.3) обеспечивают монотонность численных схем (3.3). Схемы (3.3) обеспечивают неотрицательность концентраций, выполнение соотношений баланса массы и перенос примеси по направлению потока несущей среды.

Матрица монотонного вида

Матрица $A=(a_{ij})$ называется матрицей монотонного вида, если из $Ax \geq 0$ следует $x \geq 0$ и из $Ax \leq 0$ следует $x \leq 0$.

Для того чтобы матрица A была матрицей монотонного вида, необходимо и достаточно, чтобы все элементы обратной матрицы были неотрицательны.

Лемма. Если для матрицы A

$$a_{ii} > 0, \quad a_{ij} \leq 0 (i \neq j), \quad |a_{ii}| - \sum_{i \neq j} |a_{ij}| > 0, \quad i, j = \overline{1, N}$$

то она монотонного вида.

$$-\frac{\Delta t(uAB)_{i+1/2}}{R_{i+1/2} + R_{i-1/2}} \varphi_{i+1}^{j+1} + \left(1 + \frac{\Delta t(uAB)_{i+1/2}}{R_{i+1/2} + R_{i-1/2}} + \frac{\Delta t(uA)_{i-1/2}}{R_{i+1/2} + R_{i-1/2}}\right) \varphi_i^{j+1} - \frac{\Delta t(uA)_{i-1/2}}{R_{i+1/2} + R_{i-1/2}} \varphi_{i-1}^{j+1} = \varphi_i^j, \quad (1)$$

$$(uAB)_{i+1/2} \geq 0, \quad (uA)_{i-1/2} \geq 0, \quad R_{i\pm 1/2} \geq 0, \quad i = \overline{1, N-1}$$

- Для задания граничных условий на нижней расчетной границе использовалась параметризационная модель приземного слоя (Казаков А.Л., Лыкосов В.Н., 1982).
- Для расчета горизонтальных коэффициентов турбулентной диффузии использовалась формула Смагоринского (Smagorinsky, 1963).
- Расчет вертикальных коэффициентов диффузии осуществлялся по k - ε модели, k - кинетическая энергия турбулентности, ε – энергия диссипации.
- Для нахождения температуры подстилающей поверхности решалось уравнение баланса тепла на границе раздела атмосфера-почва с привлечением уравнения для потока тепла в почву (Казаков А.Л., Леженин А.А., 1998).
- Потоки прямой солнечной радиации на подстилающую поверхность рассчитывались с учетом наклона и экспозиции склонов.