

# Весовые векторные методы конечных элементов для задач электродинамики и теории упругости с сингулярностью

Рукавишников Виктор Анатольевич

*Вычислительный центр  
Дальневосточного отделения  
Российской академии наук*

# 1. Классическое решение

Пусть в конечной области  $\Omega$  пространства  $R^2$  с границей  $\partial\Omega$  задано уравнение

$$Lu \equiv - \sum_{l,s=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_l} \left( a_{ls}(x) \frac{\partial u}{\partial x_s} \right) + a(x)u = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.1)$$

коэффициенты

$$a_{ls} = a_{sl} \in C^1(\bar{\Omega}), \quad f \in C(\bar{\Omega}), \quad a \in C(\bar{\Omega}), \quad (1.2)$$

$$\sum_{l,s=1}^2 a_{ls}(x) \xi_l \xi_s \geq \gamma \cdot \sum_{l=1}^2 \xi_l^2, \quad \gamma > 0, \quad \forall \xi = (\xi_1, \xi_2) \in R^2. \quad (1.3)$$

Определение 1.1. Функция  $u(x)$  из  $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  называется *классическим решением первой краевой задачи для уравнения (1.1)*, если в  $\Omega$  она удовлетворяет уравнению (1.1), а на границе условию

$$u(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (1.4)$$

Имеет место теорема **Шаудера**

### **Теорема 1.1**

Пусть коэффициенты  $a_{ls}(x)$  и  $a(x)$  оператора  $L$  принадлежат  $C^{m-1,\alpha}(\bar{\Omega})$ ,  $a_{ls}$  удовлетворяют неравенству (1.3),

$a(x) \geq 0$ , а граница  $\partial\Omega$  принадлежит классу  $C^{m,\alpha}$ .

Тогда для любых  $f \in C^{m-2,\alpha}(\bar{\Omega})$ , и  $\varphi \in C^{m,\alpha}(\partial\Omega)$ ,

задача (1.1), (1.4) имеет единственное решение

из класса  $C^{m,\alpha}(\bar{\Omega})$ ,  $m \geq 2$ .

## 2. Обобщённое решение

Для всякого целого  $m \geq 0$ , определим пространство Соболева  $W_2^m(\Omega)$ , состоящее из тех функций  $u \in L_2(\Omega)$ , для которых все частные производные  $D^\lambda u$  (в смысле обобщённых производных) при  $|\lambda| \leq m$  принадлежат пространству  $L_2(\Omega)$ .

При этом

$$\|u\|_{W_2^m(\Omega)}^2 = \sum_{|\lambda| \leq m} \|D^\lambda u\|_{L_2(\Omega)}^2$$

где символ  $D^\lambda u = \partial^{|\lambda|} u / \partial x_1^{\lambda_1} \partial x_2^{\lambda_2}$ ,  $|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2$ ,  $\lambda_i \geq 0$ .

Пространство  $\dot{W}_2^m(\Omega)$  является замыканием пространства основных функций  $D(\Omega)$  по норме  $W_2^m(\Omega)$ .

Определение 2.1. *Обобщённым решением задачи Дирихле (1.1), (1.4) называется функция  $u(x)$  из класса  $W_2^1(\Omega)$ , которая почти всюду на  $\partial\Omega$  совпадает с  $\varphi(x)$  и для любых  $v \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ , удовлетворяет интегральному тождеству*

$$a(u, v) = l(v),$$

где

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left( \sum_{l,s=1}^n a_{ls} \frac{\partial u}{\partial x_s} \frac{\partial v}{\partial x_l} + a(x)uv \right) dx,$$

$$l(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx,$$

О.А. Ладыженская – существование и единственность, коэрцитивность, дифференциальные свойства

- Метод Галёркина, Бубнова-Галёркина
- Метод разностных схем
- Метод конечных объёмов
- Метод конечных элементов

Согласно теории согласованных оценок

$$\|u - u_h\|_{W_2^k(\Omega)} \leq Ch^{m-k} \|u\|_{W_2^m(\Omega)},$$

$u_h$  – приближённое решение,

$h$  – шаг сетки,

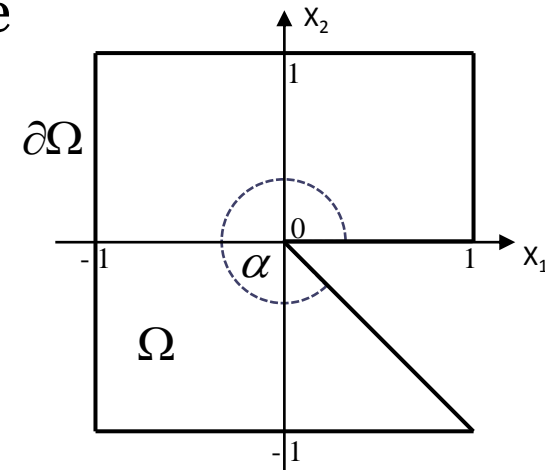
$0 \leq k \leq m$ ,  $m, k$  – действительные числа.

### 3. Краевые задачи с сингулярностью

Известно, что если граница области  $\partial\Omega$  содержит углы  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), то обобщённое решение краевой задачи

принадлежит классу  $W_2^{1+p-\varepsilon}$ ,  $p = \min_{i=1, \dots, N} \{p_i\}$ , где

$$p_i = \begin{cases} \frac{\pi}{\alpha_i} & \text{для задач Дирихле и Неймана,} \\ \frac{\pi}{2\alpha_i} & \text{для смешанной краевой задачи,} \end{cases}$$



$\varepsilon$  — любое положительное число.

Краевые задачи со слабой сингулярностью.

Фикс, Сидоров А.Ф., Волков Е.В., И. Бабушка.

# Интеграл Дирихле

## Интеграл Дирихле

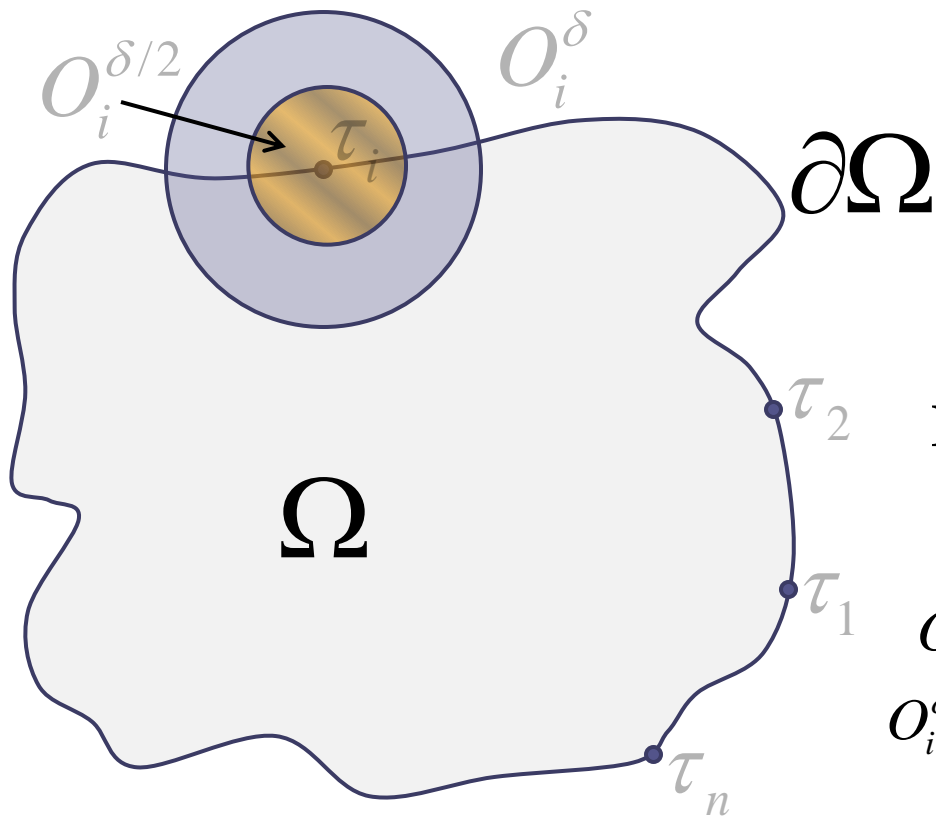
$$D[u] = \int_{\Omega} \sum_{l=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_l} \right)^2 dx.$$



ядерный взрыв

## Для краевых задач с сингулярностью

- **$R_\nu$ -обобщённое решение**
- Два класса задач: с согласованным и несогласованным вырождением исходных данных
- Существование и единственность  $R_\nu$ -обобщённого решения, коэрцитивные и дифференциальные свойства
- Весовые разностные схемы
- Метод конечных элементов в  **$h$** ,  **$p$** , и  **$h$ - $p$**  версиях
- Программы и численный анализ модельных задач



$$\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$$

$$\partial\Omega^\circ = \bigcup_{i=1}^n \tau_i$$

Пусть  $O_i^\delta$  – круг с центром в точке  $\tau_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) и радиусом  $\delta > 0$ , т.е.

$$O_i^\delta = \{x \mid \|x - \tau_i\| \leq \delta\} \quad \text{и} \quad O_i^\delta \cap O_j^\delta \neq \emptyset, \quad i \neq j; \quad \Omega' = \bigcup_{i=1}^n (\Omega \cap O_i^\delta).$$

Зададим весовую функцию –  $\rho(x)$  и

$$\left| \frac{\partial \rho}{\partial x_l} \right| \leq \delta' \quad (l = 1, 2), \quad \delta' > 0. \quad (3.1)$$

Весовые пространства  $H_{2,\alpha}^k(\Omega)$  и  $W_{2,\alpha}^k(\Omega)$  с нормами

$$\|u(x)\|_{H_{2,\alpha}^k(\Omega)} = \left( \sum_{|\lambda| \leq k} \int_{\Omega} \rho^{2(\alpha+|\lambda|-k)}(x) |D^\lambda u(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad (3.2)$$

$$\|u(x)\|_{W_{2,\alpha}^k(\Omega)} = \left( \sum_{|\lambda| \leq k} \int_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) |D^\lambda u(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad (3.3)$$

где  $D^\lambda = \frac{\partial^{|\lambda|}}{\partial x_1^{\lambda_1} \partial x_2^{\lambda_2}}$ ,  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ ,  $|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2$ ;

$\lambda_1, \lambda_2, k$  – целые,  $\alpha$  – вещественное число.

Через  $W_{2,\alpha+l-1}^k(\Omega, \delta)$  для  $l \geq 1$  обозначим множество функций, удовлетворяющих условиям:

a)  $|D^k u(x)| \leq C_1 \cdot \gamma^k \cdot k! \cdot (\rho^{\alpha+k}(x))^{-1}$  для  $x \in \Omega'$  где  $k = \overline{0, l}$ ,

постоянные  $C_1, \gamma \geq 1$  не зависят от  $k$ ;

b)  $\|u(x)\|_{L_{2,\alpha}(\Omega \setminus \Omega')} \geq C_2$ ,  $C_2 = \text{const}$ ; с квадратом нормы

$$\|u(x)\|_{W_{2,\alpha+l-1}^l(\Omega, \delta)}^2 = \sum_{|\lambda| \leq l} \left\| \rho^{\alpha+l-1}(x) |D^\lambda u(x)| \right\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (3.4)$$

Рассмотрим в области  $\Omega$  дифференциальное уравнение

$$-\sum_{l=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_l} \left( a_{ll}(x) \frac{\partial u}{\partial x_l} \right) + a(x)u(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

с граничным условием

$$u(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega$$

Введём билинейную и линейную формы:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_\Omega(u_v, v) = & \int_{\Omega} \sum_{l=1}^2 \left[ a_{ll}(x) \rho^{2v}(x) \frac{\partial u_v(x)}{\partial x_l} \frac{\partial v(x)}{\partial x_l} + a_{ll}(x) \frac{\partial \rho^{2v}(x)}{\partial x_l} \frac{\partial u_v(x)}{\partial x_l} v(x) + \right. \\ & \left. + a(x) \rho^{2v}(x) u_v(x) v(x) \right] dx, \end{aligned}$$

$$(f, v) = \int_{\Omega} \rho^{2v}(x) f(x) v(x) dx.$$

Определение 3.1. Функция  $u_\nu(x)$  из множества  $W_{2,\nu+\beta/2}^1(\Omega, \delta)$  называется  $R_\nu$ -обобщённым решением задачи Дирихле с несогласованным вырождением исходных данных, если  $u_\nu(x) = \varphi(x)$  почти всюду на  $\partial\Omega$  и для всех  $v(x)$  из  $\mathring{W}_{2,\nu+\beta/2}^1(\Omega, \delta)$  справедливо интегральное тождество

$$\tilde{a}_\Omega(u_\nu, v) = (f, v)$$

при любом, но фиксированном значении  $\nu$ , удовлетворяющем неравенству

$$\nu > \mu + \beta / 2.$$

# 4. Численный анализ уравнений Максвелла с сингулярностью

ВОЛНОВОД

P. Ciarlet, F. Assous: метод сингулярных дополнений:  $O(h^{2/3})$ ;

M. Costabel, M. Dauge: регуляризация, МКЭ :  $O(h^{2/3})$ ;

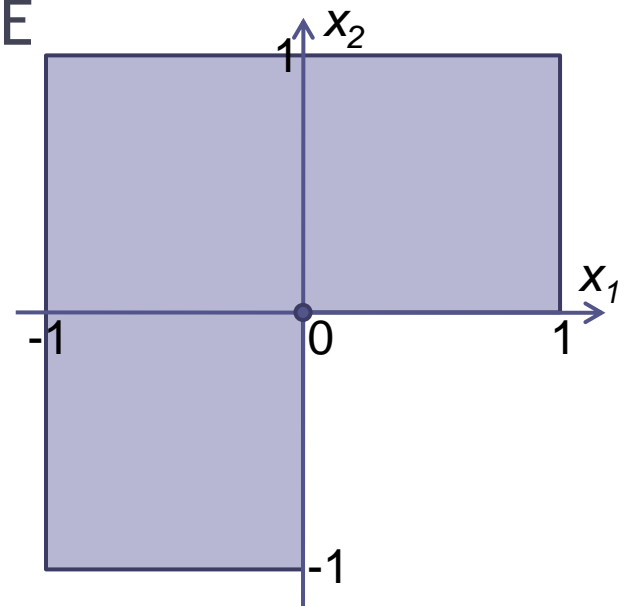
$R_\nu$ - обобщенное решение, весовой векторный МКЭ:  $O(h)$ .

Гармонический случай, волна типа ТЕ

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} - k^2 \mathbf{E} = \mathbf{f}, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{E} = 0, \quad x \in \Omega, \quad (4.2)$$

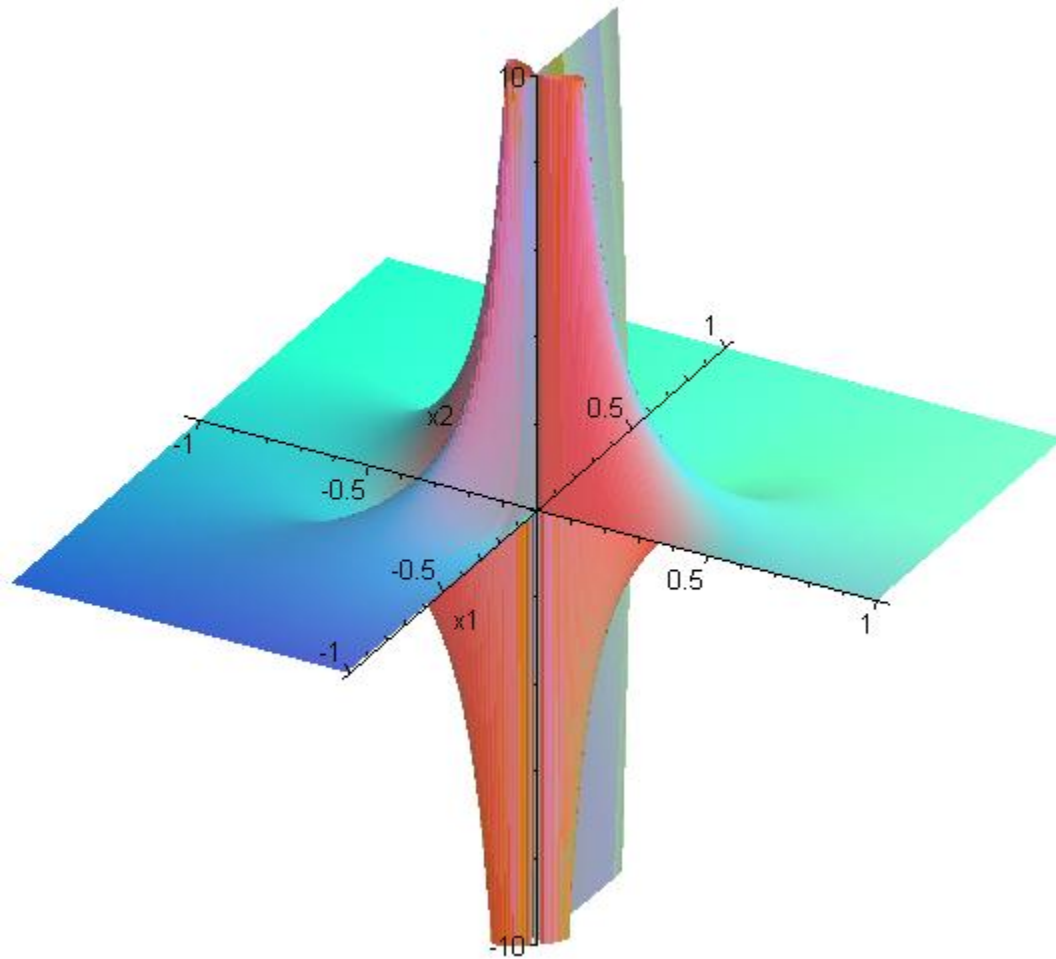
$$\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (4.3)$$



$$\mathbf{E} = (E_1(x), E_2(x)), \quad \mathbf{rot} \mathbf{E} = \frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2}, \quad \mathbf{rot} \varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \end{pmatrix}$$



# Пример решения: компонента $E_1$



$$E_1 = \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \left( x_1 x_2 (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1) \right)^2 \cdot \rho^{-4.5} \right]$$

Пусть  $a$  и  $b$  билинейная и линейная формы:

$$a(\mathbf{E}, \mathbf{F}) = \left( \operatorname{rot} \mathbf{E}, \operatorname{rot} \left( \rho^{2\nu} \mathbf{F} \right) \right) - k^2 \left( \mathbf{E}, \rho^{2\nu} \mathbf{F} \right),$$

$$b(\mathbf{F}) = \left( \mathbf{f}, \rho^{2\nu} \mathbf{F} \right).$$

Определение 4.1 . *Вектор-функция  $\mathbf{E} \in \mathring{\mathbf{H}}_{2,\nu}^1(\Omega)$  называется  $R_\nu$ -обобщенным решением задачи (4.1)-(4.3) если она удовлетворяет условию солидаидальности (4.2) и для любой вектор - функции  $\mathbf{F} \in \mathring{\mathbf{H}}_{2,\nu}^1(\Omega)$  удовлетворяет интегральному тождеству:*

$$a(\mathbf{E}, \mathbf{F}) = b(\mathbf{F}) \quad (4.4)$$

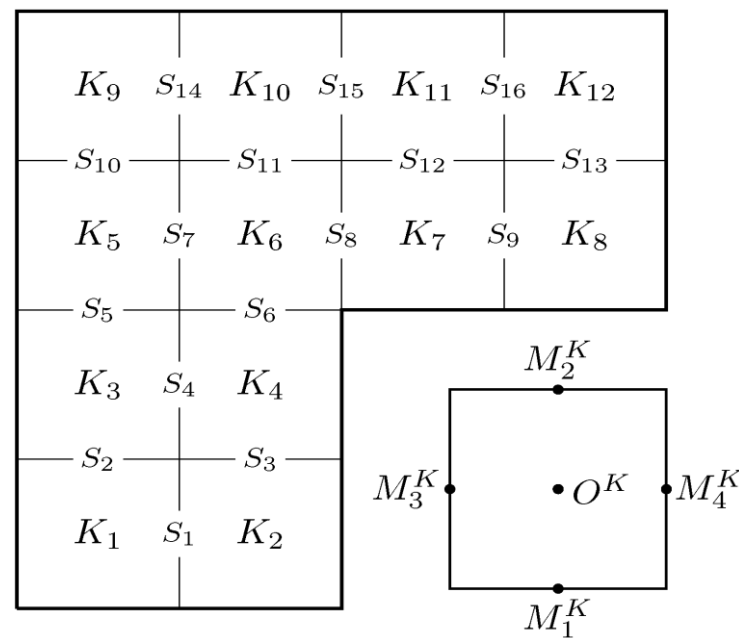
## Схема весового векторного метода конечных элементов

$$\Psi_1^K = \frac{1}{h} \rho^{-2\gamma} \left( M_1^K \right) \left( \frac{1}{h} + o_2^K - x_2 \right) \mathbf{i},$$

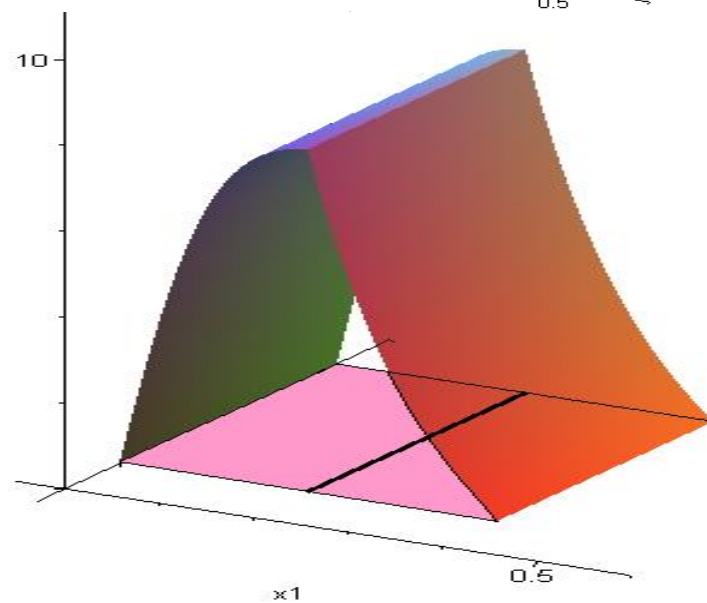
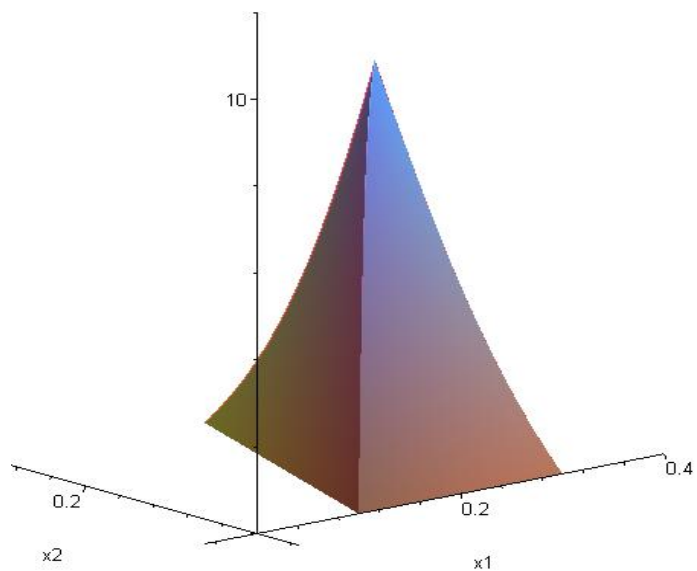
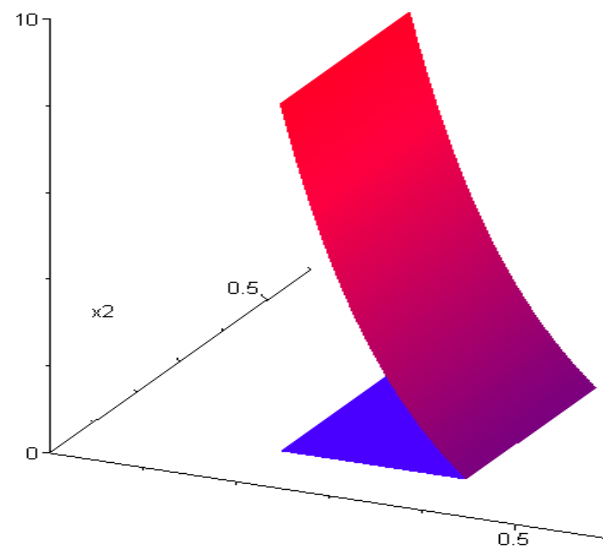
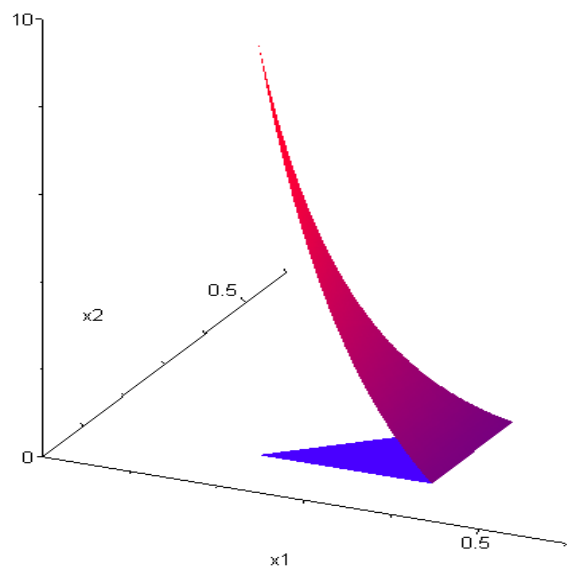
$$\Psi_2^K = \frac{1}{h} \rho^{-2\gamma} \left( M_2^K \right) \left( \frac{1}{h} + x_2 - o_2^K \right) \mathbf{i},$$

$$\Psi_3^K = \frac{1}{h} \rho^{-2\gamma} \left( M_3^K \right) \left( \frac{1}{h} + o_1^K - x_1 \right) \mathbf{j},$$

$$\Psi_4^K = \frac{1}{h} \rho^{-2\gamma} \left( M_4^K \right) \left( \frac{1}{h} + x_1 - o_1^K \right) \mathbf{j},$$



# Весовые функции формы и базисные функции на элементе



Определение 4.2. Вектор - функцию  $\mathbf{E}_h \in \mathbf{U}_h$ , удовлетворяющую равенству

$$a(\mathbf{E}_h, \mathbf{u}_h) = b(\mathbf{u}_h)$$

будем называть *приближенным  $R_V$ -обобщенным решением* для задачи (4.1)-(4.3).

Приближенное решение  $\mathbf{E}_h$  будем искать в виде:

$$\mathbf{E}_h = \sum_{K \in T_h} \sum_{j \in \{1,2,3,4\}} d_j^K \psi_j^K.$$

The coefficients  $d_j^K$  are defined from the system of equations

$$a(\mathbf{E}_h, \psi_j^K) = b(\psi_j^K), \quad K \in T_h, \quad j \in \{1,2,3,4\}. \quad (4.5)$$

# Результаты численных экспериментов

Вычислительный кластер ВЦ ДВО РАН

Программа "Proba-III" , GMRES-метод для решения системы (4.5).

Модельные задачи:

1. Вспомогательная функция:

$$\varphi = \left( x_1 x_2 (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1) \right)^2 \left( \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right)^{\beta+2}.$$

2. Решение  $\mathbf{E} = \mathbf{rot} \varphi$ .

3. Подставим  $\mathbf{E}$  в уравнение (4.1) и найдем правую часть  $\mathbf{f}$  для коэффициентов  $k_1=50, k_2=300$ .

Численные эксперименты проводились при различных  $h$ .

## Оценка точности:

1.  $\|\mathbf{E} - \mathbf{E}_h\|_{L_{2,\nu}(\Omega)}$

2. В середине каждой стороны конечного элемента  $M_i^K$  для найденных приближенных решений вычислялись погрешности

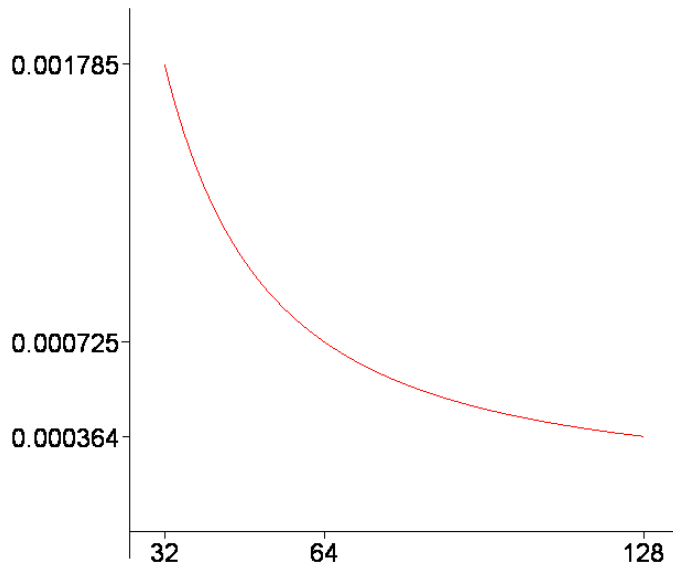
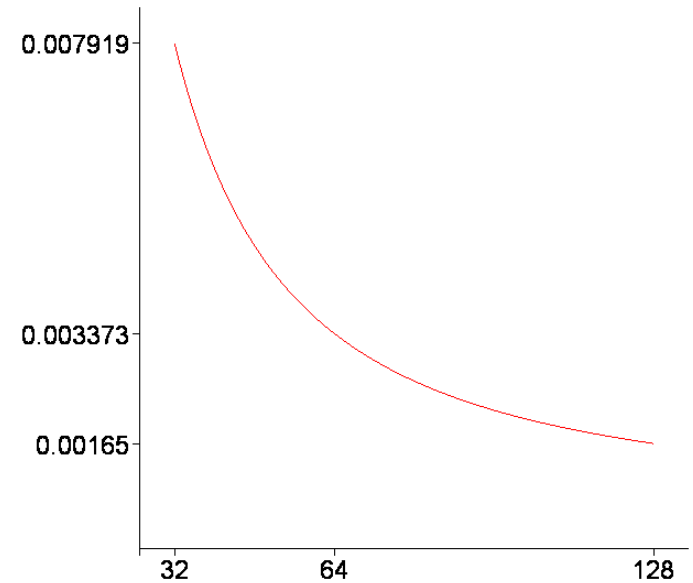
$$\delta_{1i} = |E_1(M_i) - E_{1h}(M_i)|, \quad \delta_{2i} = |E_2(M_i) - E_{2h}(M_i)|, \quad i=1, \dots, S_h.$$

3. Определялось количество  $n$  и координаты точек с погрешностью  $\delta_{ij}$ , меньше заданных предельных погрешностей  $\bar{\Delta}_1 = 0.01$  для  $k=k_1$  и  $\bar{\Delta}_2 = 0.001$  для  $k=k_2$ .

**Table 1**

Dependence of error  $\|\mathbf{E}-\mathbf{E}_h\|_{\mathbf{L}_{2,\nu}(\Omega)}$  for  $k=k_1=50$  on the number of segments of fragmentation  $N$  (mesh step  $h$ ),  $\beta=-6.5$ ,  $\delta=0.17$ ,  $\nu=4.8$ ,  $\gamma=4.8$ .

<b>N</b>	<b>32</b>	<b>64</b>	<b>128</b>
<b>h</b>	0.062500	0.031250	0.015625
$\ \mathbf{E}-\mathbf{E}_h\ _{\mathbf{L}_{2,\nu}(\Omega)}$	0.007919	0.003373	0.001650

**Table 2**

Dependence of error  $\|\mathbf{E}-\mathbf{E}_h\|_{\mathbf{L}_{2,\nu}(\Omega)}$  for  $k=k_2=300$  on the number of segments of fragmentation  $N$  (mesh step  $h$ ),  $\beta=-6.5$ ,  $\delta=0.17$ ,  $\nu=4.8$ ,  $\gamma=4.8$ .

<b>N</b>	<b>32</b>	<b>64</b>	<b>128</b>
<b>h</b>	0.062500	0.031250	0.015625
$\ \mathbf{E}-\mathbf{E}_h\ _{\mathbf{L}_{2,\nu}(\Omega)}$	0.001785	0.000725	0.000364

The approximate solution by a proposed FEM converges to an exact  $R_\nu$ -generalized solution in the weight space  $\mathbf{L}_{2,\nu}(\Omega)$  with the first rate dependent on  $h$ , or  $O(h)$ .



**Table 3**

Percentage of points where errors are less than the given limit value  $\bar{\Delta}_1 = 0.01$ ,  
 $k=k_1=50$ ,  $\beta=-6.5$ ,  $\delta=0.13$ ,  $\nu=3.0$ ,  $\gamma=0.75$

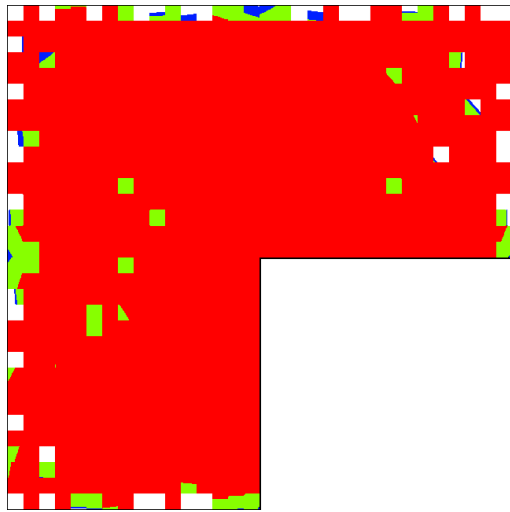
<b>N</b>	<b>32</b>	<b>64</b>	<b>128</b>
$n_1$	4.89%	36.52%	71.11%

**Table 4**

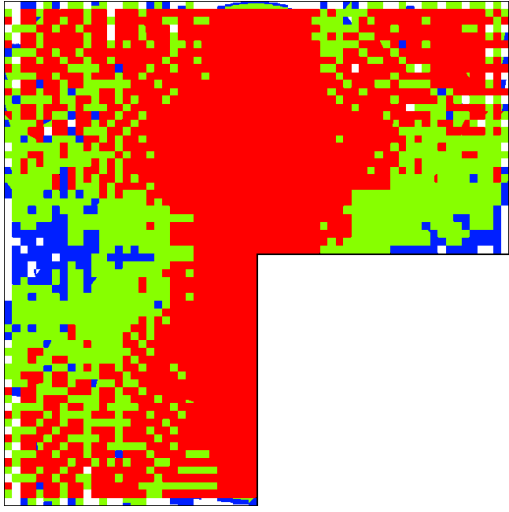
Percentage of points where errors are less than the given limit value  $\bar{\Delta}_2 = 0.001$ ,  
 $k=k_2=300$ ,  $\beta=-6.5$ ,  $\delta=0.13$ ,  $\nu=3.0$ ,  $\gamma=0.75$

<b>N</b>	<b>32</b>	<b>64</b>	<b>128</b>
$n_2$	46.36%	68.28%	70.50%

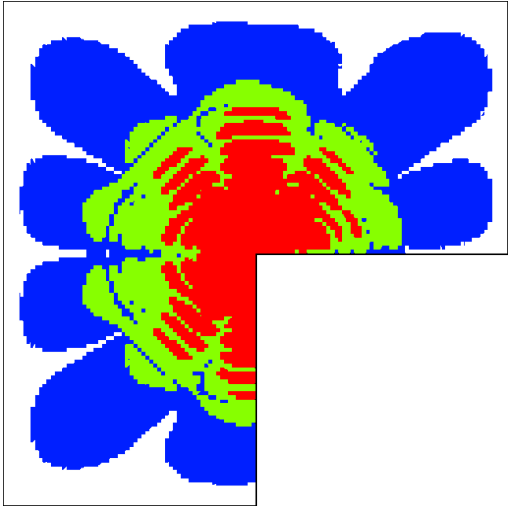
k=50



32

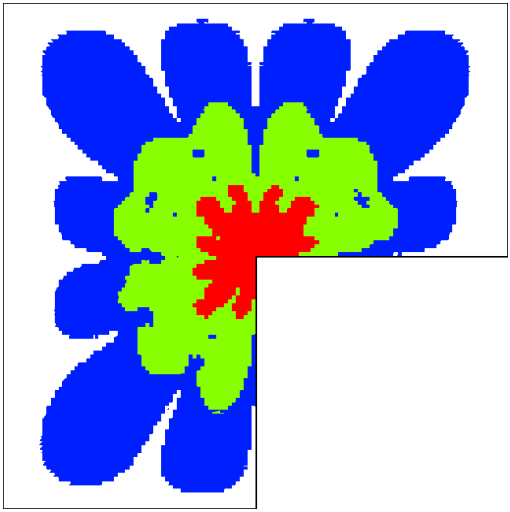
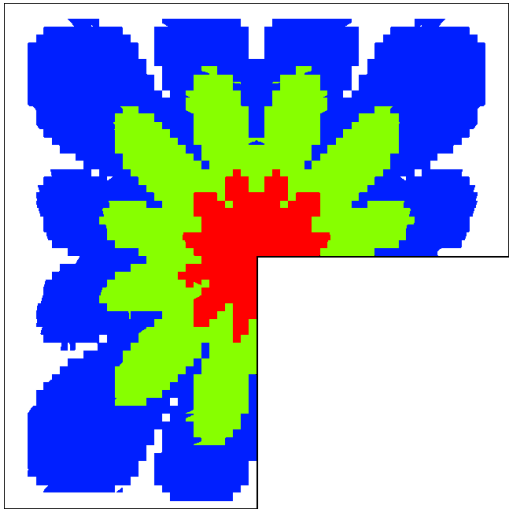
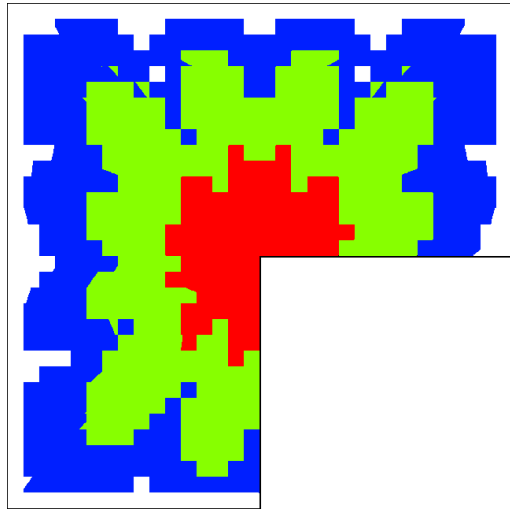
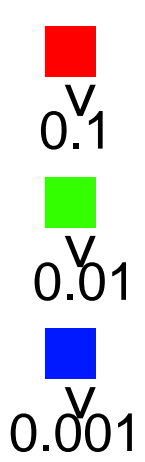


64



128

k=300



# Выводы

Серия численных экспериментов показала:

(1) Приближенное решение, найденное весовым векторным МКЭ сходится к  $R_\nu$ -обобщенному решению в норме весового пространства  $\mathbf{L}_{2,\nu}(\Omega)$  со скоростью  $O(h)$ ;

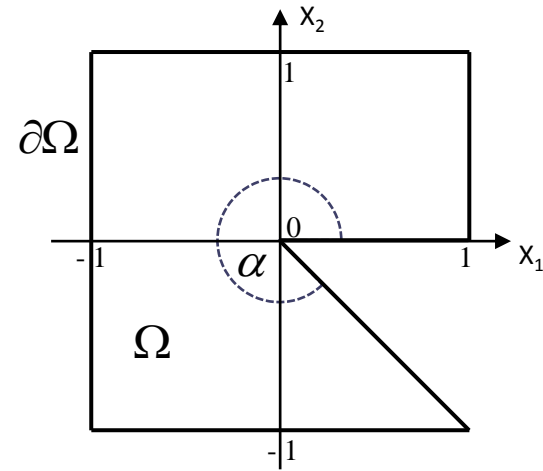
(2) Количество узлов в которых абсолютная погрешность не превосходит заданные предельные погрешности  $\bar{\Delta}_1$  и  $\bar{\Delta}_2$  и радиус окрестности их содержащей уменьшаются с уменьшением шага сетки.

# 5. Весовой МКЭ для задачи теории упругости с сингулярностью

$$-(2\mathbf{div}(\mu\varepsilon(\mathbf{u})) + \nabla(\lambda\mathbf{div}\mathbf{u})) = \mathbf{f}, \quad x \in \Omega, \quad (5.1)$$

$$u_i = q_i, \quad x \in \Gamma_i^D, \quad (5.2)$$

$$\sigma_i(\mathbf{u})\mathbf{n} = p_i, \quad x \in \Gamma_i^N, \quad i = 1, 2. \quad (5.3)$$



$$\Gamma = \Gamma_i^D \cup \Gamma_i^N, \quad \Gamma_i^D \cap \Gamma_i^N = \emptyset, \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2),$$

$\varepsilon(\mathbf{u})$  – тензор деформации,  $\mathbf{n}$  – единичный вектор внешней нормали,

$\lambda, \mu = \text{const}$ . Кроме того

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \sigma(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Положим

$$\mathbf{f} \in \mathbf{L}_{2,\beta}(\Omega, \delta), \quad q_i \in W_{2,\beta}^{1/2}(\Gamma_i^D, \delta), \quad p_i \in L_{2,\beta-1/2}(\Gamma_i^N, \delta), \quad i = 1, 2, \quad \beta, \delta > 0. \quad (5.4)$$

Определение 5.1.  $R_\nu$ -обобщённое решение задачи (5.1)-(5.4) – такая функция  $\mathbf{u}_\nu(x) \in \mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega, \delta)$ , которая почти всюду на  $\Gamma_i^D$  ( $i=1,2$ ) удовлетворяет краевому условию (5.2) и  $\forall \mathbf{v}(x) \in \mathbf{W}_{2,\nu}^{1,D}(\Omega, \delta)$  ( $\nu \geq \beta$ ) обеспечивает выполнение интегрального тождества

$$a(\mathbf{u}_\nu, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}). \quad (5.5)$$

$a(\mathbf{u}_\nu, \mathbf{v})$  и  $l(\mathbf{v})$  соответственно билинейная и линейная формы.

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} (2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\rho^{2\nu} \mathbf{v}) + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div}(\rho^{2\nu} \mathbf{v})) dx,$$

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \rho^{2\nu} \mathbf{f} \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma^N} \rho^{2\nu} \mathbf{p} \mathbf{v} ds.$$

# Схема весового МКЭ

Вводим  $\psi^k(x) = \rho^{v^*}(x)\varphi^k(x)$ ,  $k = \overline{0, n-1}$ ,  $\forall P_k \in P$ ,

$P$ -множество узлов триангуляции.

$$V^h = \text{span}\{\psi^k\}_{k=0}^{n-1}, V_i^h = \left\{v_i \in V^h : v_i(P_k)|_{P_k \in P_i^D} = 0\right\}, i = 1, 2 (P_i^D \subset P).$$

$$\mathbf{V}^h = [V^h]^2, \mathbf{V}_D^h = V_1^h \times V_2^h.$$

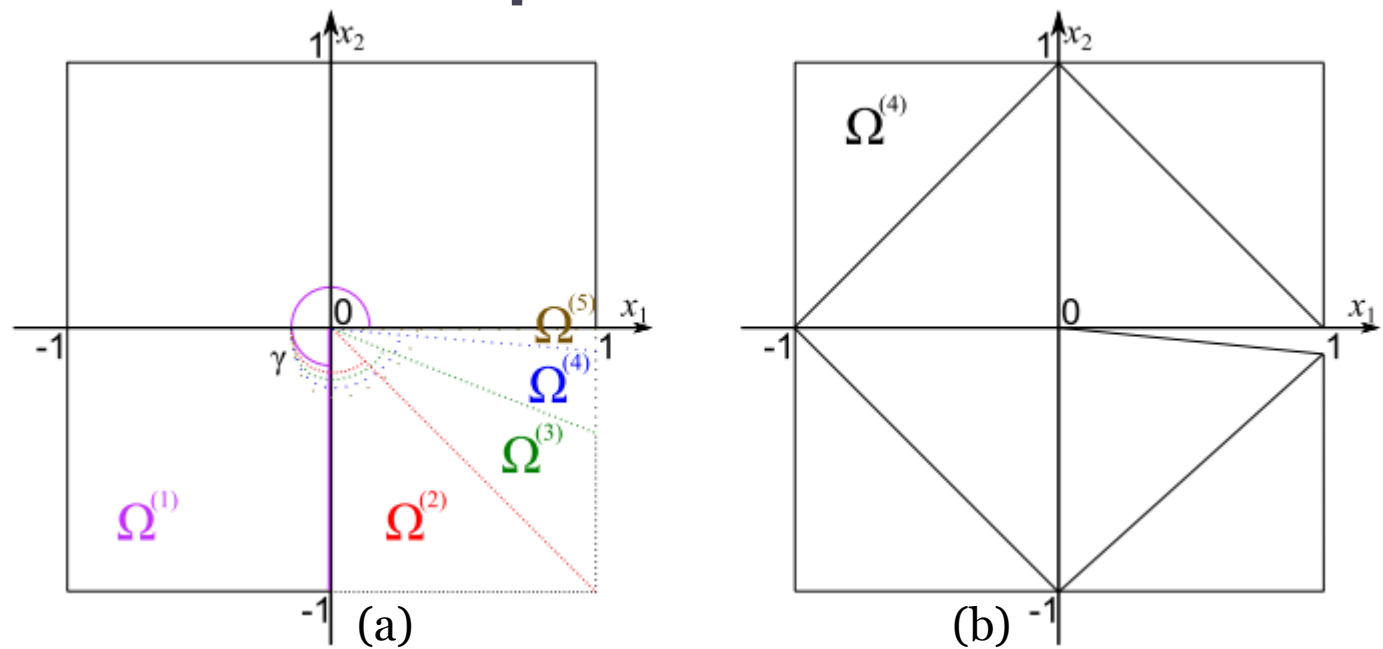
$$u_{v,1}^h = \sum_{k=0}^{n-1} d_{2k} \psi^k(x), \quad u_{v,2}^h = \sum_{k=0}^{n-1} d_{2k+1} \psi^k(x), \quad d_j = \rho^{-v^*}(P_{[j/2]})c_j, \quad j = \overline{0, 2n-1}.$$

Определение 5.2. *Приближённое  $R_v$ -обобщённое решение задачи (5.1)-(5.4) – такая функция  $\mathbf{u}_v^h \in \mathbf{V}^h$ ,  $i$ -ые компоненты которой в узлах  $P_i^D$  ( $i = 1, 2$ ) удовлетворяет краевому условию (5.2) и  $\forall \mathbf{v}_D^h \in \mathbf{V}_D^h$  и  $\forall v \geq \beta$  обеспечивает выполнение интегрального тождества*

$$a(\mathbf{u}_v^h, \mathbf{v}_D^h) = l(\mathbf{v}_D^h), \tag{5.5}$$

где  $\mathbf{u}_v^h = (u_{v,1}^h, u_{v,2}^h)$ .

# Численный эксперимент



**Рис 5.1.** (a) Область  $\Omega$  для различных значений угла  $\gamma$ . (b) Пример предварительной триангуляции области  $\Omega^{(4)}$  ( $\gamma=1.75\pi$ ).

$$u_1(x) = u_2(x) = (x_1^2 + x_2^2)^\alpha$$

**Таблица 5.1.** Связь показателя степени  $\alpha$ , величины угла  $\gamma$ , типа краевых условий

Область, №	I	II	III	IV	V
величина угла, $\gamma$	$1.5\pi$	$1.75\pi$	$1.875\pi$	$1.975\pi$	$2\pi$
$\alpha$ (задача 1)	0.333333	0.285714	0.266667	0.253165	0.25
$\alpha$ (задача 2)	0.166667	0.142857	0.133333	0.126528	0.125

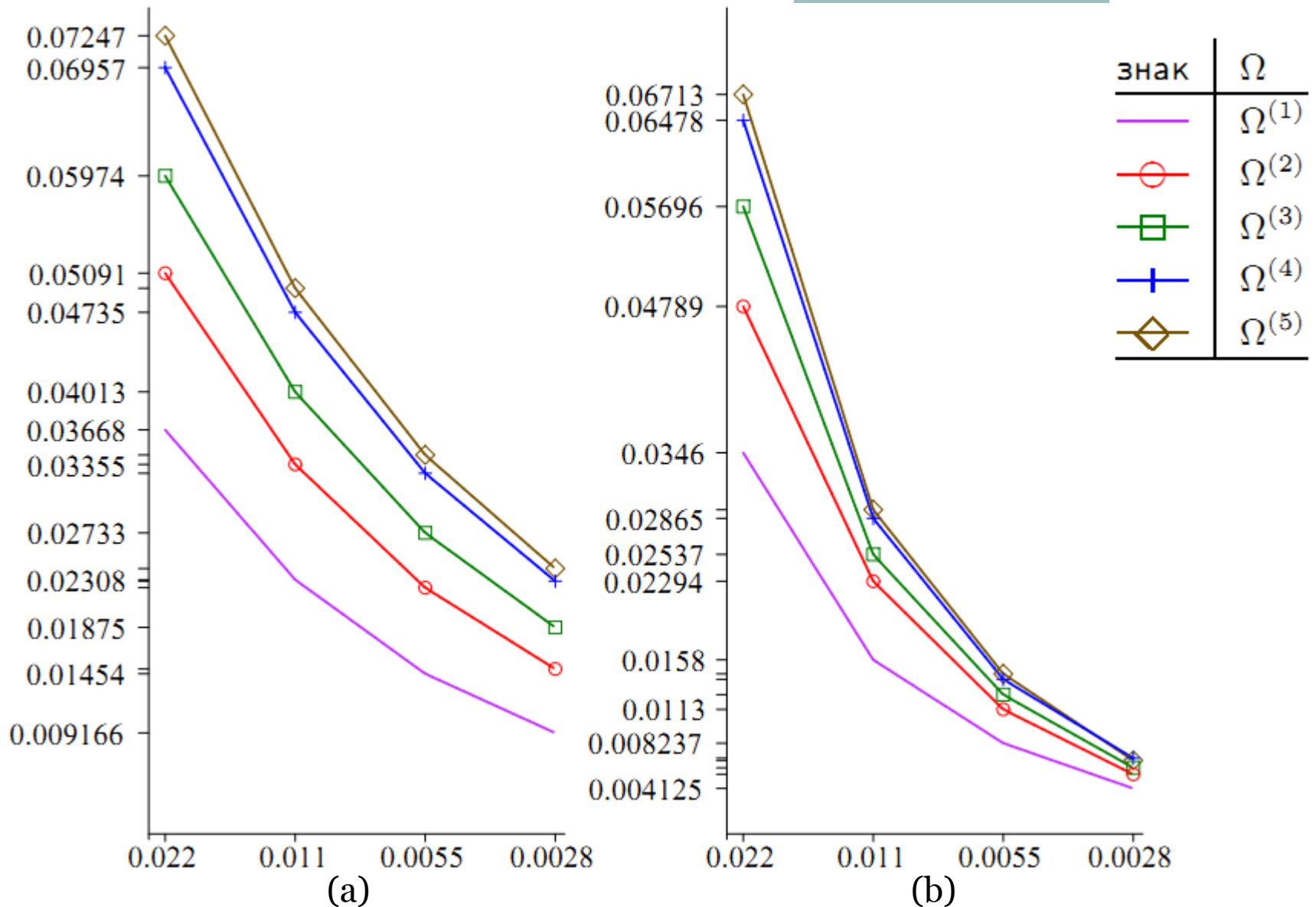
$u(x) \in W_2^{1+k-\varepsilon}(\Omega)$ ,  $k = \min_{i=1,\dots,N} \{k_i\}$ , где  $\Omega$  - двумерная область с границей, содержащей углы  $\gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,

$$k_i = \begin{cases} \frac{\pi}{\gamma_i} & \text{для задачи Дирихле или Неймана,} \\ \frac{\pi}{2\gamma_i} & \text{для смешанной краевой задачи,} \end{cases}$$

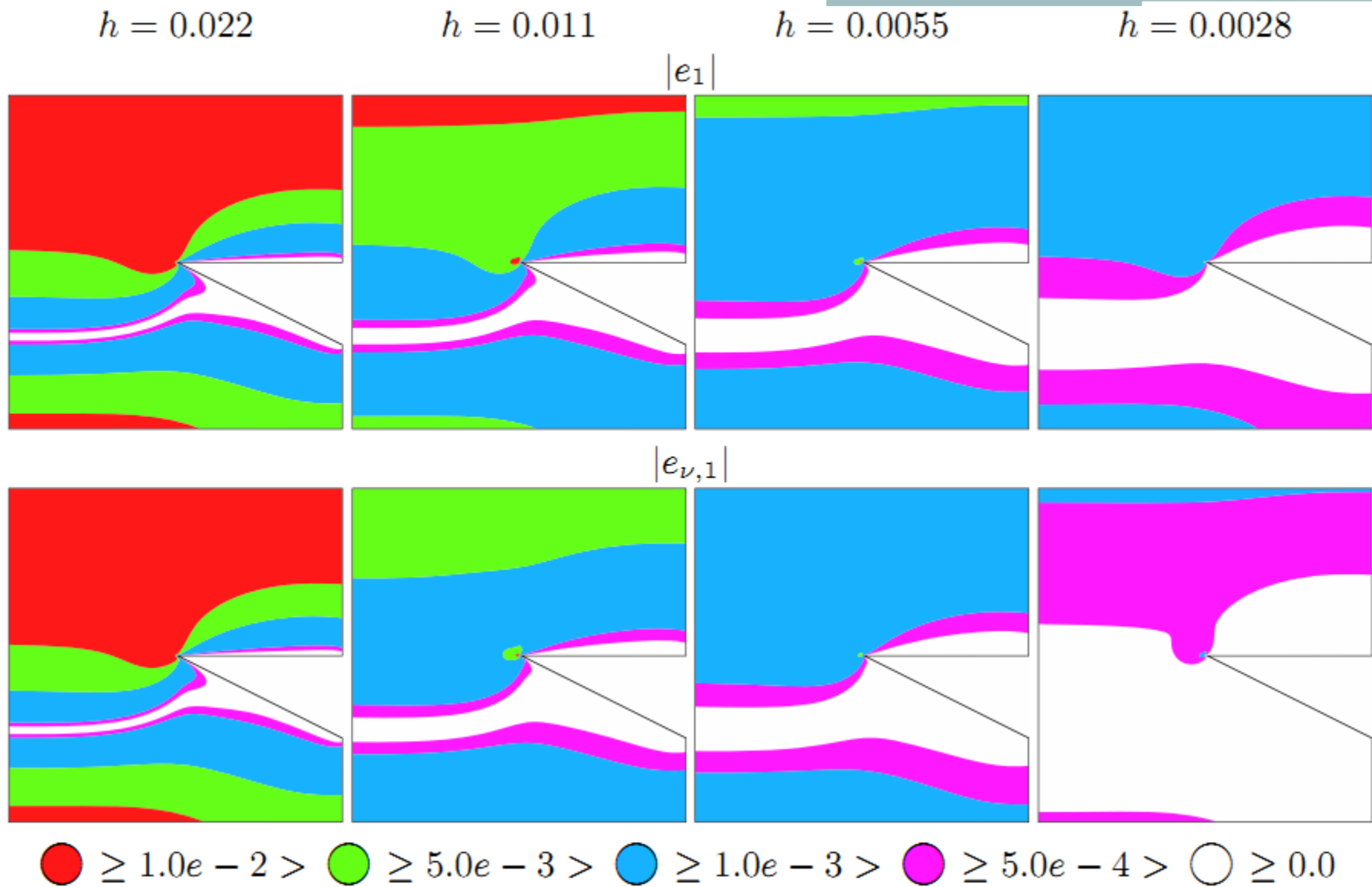
### Скорость сходимости

$$\|u_v - u_v^h\|_{W_2^1(\Omega)} = O(h^k).$$

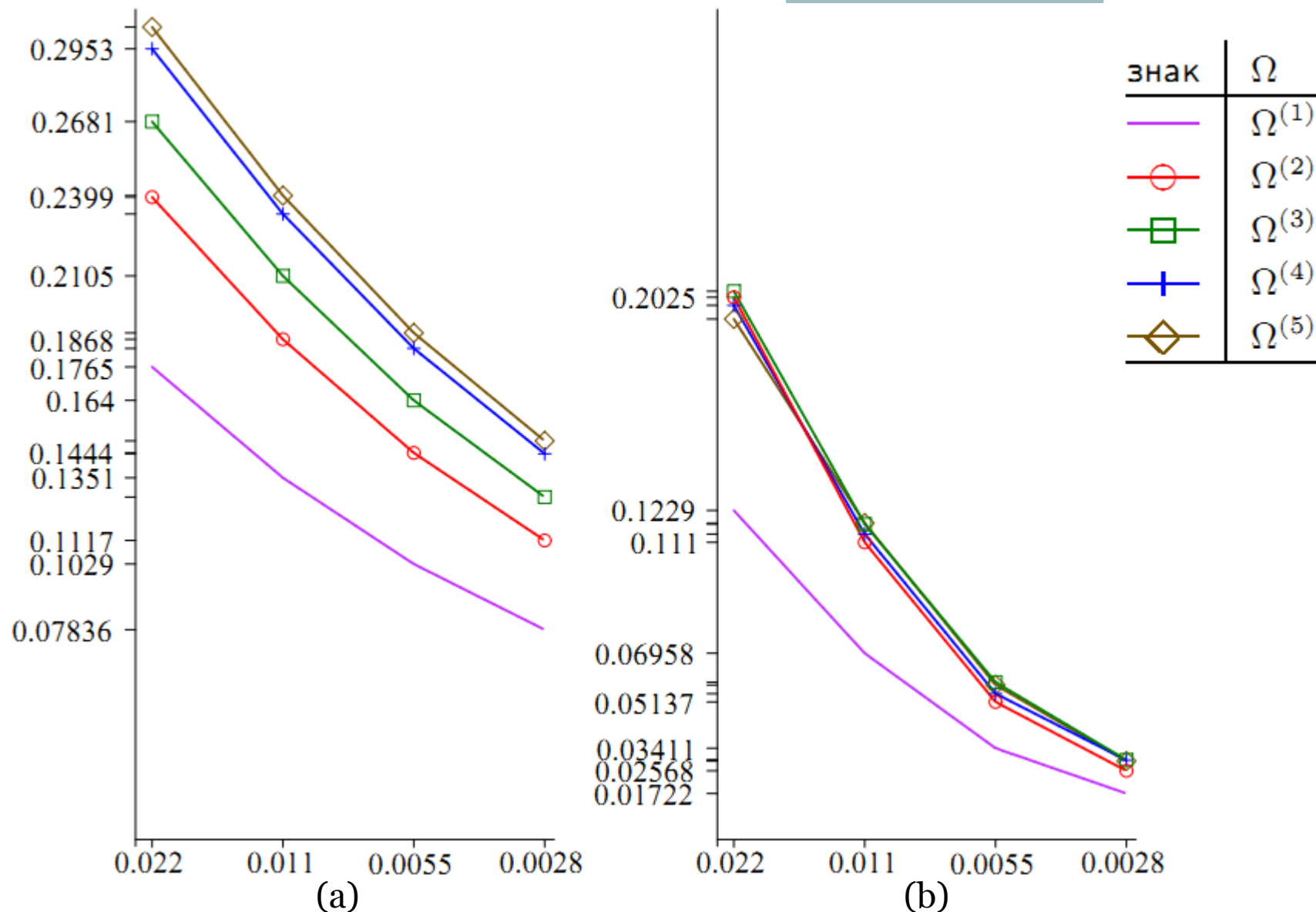




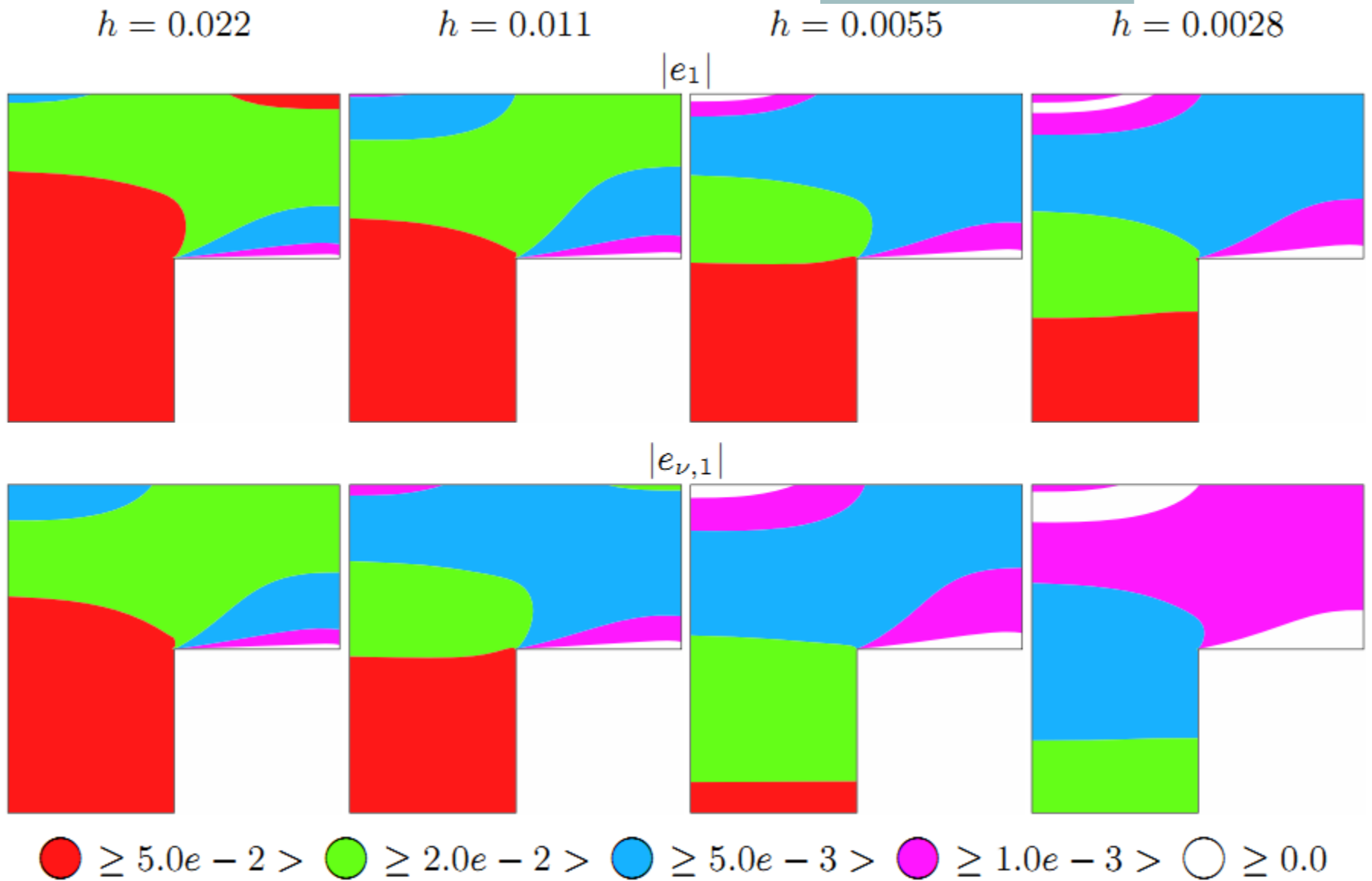
**Рис 5.2.** Зависимость  $W_{2,\nu}^1(\Omega)$  - нормы погрешности приближённого обобщённого ( $\nu=0$ ) (a) и  $R_\nu$ -обобщённого (b) решений задачи 1 от  $h$ .



**Рис 5.3.** Распределение абсолютных погрешностей нахождения первых компонент приближённых обобщённого ( $|e_1|$ ) и  $R_\nu$ -обобщённого ( $|e_{v,1}|$ ) решений задачи 1 в  $\Omega^{(3)}$ .



**Рис 5.4.** Зависимость  $W_{2,\nu}^1(\Omega)$  - нормы погрешности приближённого обобщённого ( $\nu=0$ ) (a) и  $R_\nu$ -обобщённого (b) решений задачи 2 от  $h$ .



**Рис 5.5.** Распределение абсолютных погрешностей нахождения первых компонент приближённых обобщённого ( $|e_1|$ ) и  $R_v$ -обобщённого ( $|e_{v,1}|$ ) решений задачи 2 в  $\Omega^{(1)}$ .

# Выводы

1. приближенное  $R_{\nu}$ -обобщённое решение задачи (5.1)-(5.4) сходится к точному со скоростью  $O(h)$  в норме пространства  $W_{2,\nu}^1(\Omega, \delta)$ , в отличие от обобщенного, скорость сходимости которого в энергетической норме имеет порядок  $O(h^{2\alpha})$ ;
2. скорость сходимости  $R_{\nu}$ -обобщённого решения не зависит от размера тупого угла границы области;
3. величина абсолютной погрешности приближенного  $R_{\nu}$ -обобщённого решения в подавляющем числе узлов сетки на один–два порядка лучше, чем для обобщенного решения.

# Литература

1. *Rukavishnikov V.A.* The methods of numerical analysis for boundary value problem with strong singularity // *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. 2009. Vol. 24. No. 6. P. 565-590.
2. *Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova H.I.* The finite element method for boundary value problem with strong singularity // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2010. Vol. 234. No. 9. P. 2870-2882.
3. *Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova H.I.* On the Error Estimation of the Finite Element Method for the Boundary Value Problems with Singularity in the Lebesgue Weighted Space // *Numerical Functional Analysis and Optimization*. DOI:10.1080/01630563.2013.809582.
4. *Rukavishnikov V.A., Mosolapov A.O.* New numerical method for solving time-harmonic Maxwell equations with strong singularity // *Journal of Computational Physics*. 2012. Vol. 231. No. 6. P. 2438–2448.
5. *Рукавишников В.А., Мосолапов А.О.* Весовой векторный метод конечных элементов для одной задачи электромагнетизма с сильной сингулярностью // *ДАН*. 2013. Т. 449. № 2. С. 144-148.
6. *Рукавишников В.А., Николаев С.Г.* Весовой метод конечных для задачи теории упругости с сингулярностью // *ДАН*. 2013. Т.453. № ?. С. ?-?.
7. *Rukavishnikov V.A., Nikolaev S.G.* *Weighted finite element method for the elasticity problem with singularity // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. (to appear).*