

# ***ОБОСНОВАНИЕ СХОДИМОСТИ ДИСКРЕТНЫХ АНАЛОГОВ СОПРЯЖЕННО-ОПЕРАТОРНЫХ МОДЕЛЕЙ***

- ***Сорокин С.Б.***
- ***ИВМиМГ (Новосибирск)***

# ■ Содержание

- 1. Введение
- 2. Сопряженно-операторные модели
- 3. Общая схема построения дискретного аналога сопряженно-операторной модели
- 4. Пример построения дискретного аналога – 1D, 2D
- 5. Обоснование сходимости – 1D
  - 5.1. Устойчивость
  - 5.2. Аппроксимация
  - 5.3. Сходимость
- 6. Тесты
- 7. Дальнейшие возможности

## ■ 2. Сопряженно-операторные модели

■ *Математические модели для классических стационарных задач механики сплошной среды обладают сопряженно-операторной структурой.*

Математические модели физического явления основаны на:

- *законе (законах) сохранения,*
- *уравнении состояния,*
- *определяющих соотношениях.*

■ Как правило, оператор в определяющих соотношениях  $R$  сопряжен по Лагранжу оператору  $R^*$  в законе сохранения.

■ Трактуя математическую модель как операторные уравнения в гильбертовых пространствах, имеем:

$$R^* w = f, \quad w = Kq, \quad q = Ru,$$

$$u \in U(R) \subset H, \quad w \in U(R^*) \subset H^*.$$

## ■ Задача теплопроводности:

$\mathbf{w} = (w_1, w_2)^T$  – вектор (тензор ранга 1),

$\mathbf{q} = (q_1, q_2)^T$  – вектор (тензор ранга 1),

$u$  – скаляр,

$$R^* \mathbf{w} = \operatorname{div} \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = f, \quad \mathbf{q} = R u = -\operatorname{grad} u = - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} u.$$

$$\mathbf{w} = K \mathbf{q} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \mathbf{q},$$

$$\int_D (u \operatorname{div} \mathbf{w}) dV = \int_D (-\operatorname{grad} u \cdot \mathbf{w}) dV + \int_S u (\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}) dS$$

## ■ Статическая задача теории упругости

$\mathbf{w} = \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})^T$  – "тензор" напряжений (ранга 2),

$\mathbf{q} = \boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, 2\varepsilon_{12})^T$  – "тензор" деформаций (ранга 2),

$\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$  – вектор перемещений (тензор ранга 1),

$$R^* \boldsymbol{\sigma} = -\text{div} \boldsymbol{\sigma} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{f}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = R\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \text{закон Гука.}$$

$$\int_D \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} dV = \int_D -\text{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} dV + \int_S \overset{\mathbf{0}}{\parallel} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} dS. \quad (L_j^i) = \frac{1}{2} (\nabla_j u^i + \nabla_i u^j).$$

### ■ 3. Общая схема построения дискретного аналога сопряженно-операторной модели

- 1. Выбираем за опорный оператор  $R$ .
- 2. Строим какую-либо его аппроксимацию  $R_h$ .
- 3. За аппроксимацию оператора  $R^*$  берем сопряженный к  $R_h$ :  $R_h^* = (R_h)^*$

$$R_h : H_h \rightarrow H_h^*, \quad R_h^* : H_h^* \rightarrow H_h,$$

$$(R_h u^h, w^h)_{H_h^*} = (u^h, R_h^* w^h)_{H_h}.$$

- Здесь  $H_h$  и  $H_h^*$  соответствующие конечномерные гильбертовы пространства сеточных функций.
- В результате, *независимо* от выбора  $R_h$ , *однозначно* определяется  $R_h^*$

■ Если ввести

■  $e_j$  - ортонормированный базис в  $H_h$  (в скалярном произведении  $(\cdot, \cdot)_{H_h}$ ),

■ то действие оператора  $R_h^*$  на любую сеточную функцию из  $H_h^*$  **однозначно** определяется по формуле

$$R_h^* w^h = \sum_{j=1}^N (R_h^* w^h, e_j)_{H_h} e_j = \sum_{j=1}^N (w^h, R_h e_j)_{H_h^*} e_j.$$

■ Другими словами: **Как только введен  $R_h$**  (определено его действие в  $H_h$ ), **так вы сразу знаете как действует  $R_h^*$** ,

■ и сопряжено-операторная дискретная модель имеет вид:

$$R_h^* w^h = f^h,$$

$$w^h = K_h q^h,$$

$$q^h = R_h u^h,$$

$$\Rightarrow R_h^* K_h R_h u^h = f^h,$$

$$u^h \in H_h.$$

$$u^h \in H_h, w^h \in H_h^*.$$

Лебедев В.И. Разностные аналоги ортогональных разложений основных дифференциальных операторов и некоторых краевых задач математической физики. I.- Журнал вычислительной математики и математической физики, 1964, т. 4, № 3, стр. 449-465.

■ Лебедев В.И. Разностные аналоги ортогональных разложений основных дифференциальных операторов и некоторых краевых задач математической физики. II.- Журнал вычислительной математики и математической физики, 1964, т. 4, № 4, стр. 649-659.



- Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. О представлении разностных схем математической физики в операторной форме. Доклады АН СССР, 1981, т. 258, № 5, стр. 1092 -1096.
- Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. Операторные разностные схемы. Препринт № 9. - Москва, 1981. - 32 стр. - В надзаг.: ИПМ АН СССР.
- Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. Операторные разностные схемы. Дифференциальные уравнения. 1981, т. 17, № 7. стр. 1317-1327.
- Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. Использование метода опорных операторов для построения разностных аналогов операций тензорного анализа. Препринт № 97. - Москва, 1981. - 16 стр. - В надзаг.: ИПМ АН СССР.
- Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. Использование метода опорных операторов для построения разностных аналогов операций тензорного анализа. Дифференциальные уравнения. 1982, т. 18, № 7. стр. 1251-1256.
- Самарский А.А., Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П. Разностные схемы на нерегулярных сетках. Минск, 1996.

- Коновалов А.Н., Сорокин С.Б. Структура уравнений теории упругости. Статика. Новосибирск. Препринт ВЦ СО АН СССР, 1986. № 665, 26 стр.
- Коновалов А.Н., Сорокин С.Б. О разностных аппроксимациях уравнений теории упругости. - В сб. "Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики": Тезисы докладов Всесоюзной конференции, Новосибирск, 1987, стр. 103-104.
- Коновалов А.Н. Сопряженно – факторизованные модели в задачах математической физики. Препринт ВЦ СО РАН, № 1095, Новосибирск, 1997, 60 стр.
- Sorokin S.B. Application of operator structure in numerical solution of elliptic problems. Siberian Journal of Computer Mathematics, v. 1, № 3, 1992, pp. 259-274, Nova Science Publishers, Inc.
- Сорокин С.Б. Метод поэтапного обращения для численного решения бигармонического уравнения. Сибирский математический журнал, Институт математики СО РАН, Новосибирск, 1995. т. 36., № 3. стр. 659--663.
- Sorokin S.B. Step-by-step inversion method for elasticity problems. Сибирский журнал вычислительной математики РАН СО, т.1, №1, Новосибирск, 1998 , стр. 89-97.

- J. Hyman, M. Shashkov. The Approximation of Boundary Conditions for Mimetic Finite Difference Methods. Los Alamos National Laboratory, T-7, MS-B284, Los Alamos NM 87545, November &, 1997.
- J. Hyman, M. Shashkov. Mimetic Discretizations for Maxwell's Equations. *Journal of Computational Physics* 151, 881909,(1999).
  - M. Berndt, K. Lipnikov, J.D. Moulton, and M. Shashkov. Convergence of mimetic finite difference discretizations of diffusion equation. *East-West J. Numer. Math.*, 9: 253-284,2001.
  - J. Hyman, J. Morel, M. Shashkov, and S. Steinberg. Mimetic finite difference methods for diffusion equation. *Comp. Geosciences*, 6(3-4): 333-352, 2002.
  - F. Brezzi, K. Lipnikov, M. Shashkov. Convergence of Mimetic Finite Difference Method for Diffusion Problems on Polyhedral Meshes. August, 2004.
  - K. Lipnikov, M. Shashkov, D. Svyatskiy. The mimetic finite difference discretization of diffusion problems on unstructured polyhedral meshes. *Journal of Computational Physics* 211, (2006), 473-491.
  - M. Berndt, K. Lipnikov, M. Shashkov, M.F. Wheeler, I. Yotov. A mortar mimetic finite difference method on non-matching grids. *Numer. Math.* (2005).
  - И т.д.

# Local flux mimetic finite difference methods

Konstantin Lipnikov<sup>1\*</sup>Mikhail Shashkov<sup>1</sup>Ivan Yotov<sup>2</sup>

January 31, 2008

## 2 Mimetic finite difference method

Let  $X_1$  and  $X_2$  be Hilbert spaces and let  $\mathcal{L}_1$  and  $\mathcal{L}_2$  be two linear operators,  $\mathcal{L}_i: X_i \rightarrow Y_i$ ,  $i = 1, 2$ , which satisfy some fundamental identity:

$$\mathcal{I}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2; f_1, f_2) = 0 \quad \forall f_1 \in X_1, f_2 \in X_2.$$

Suppose that discrete approximation spaces  $X_{ih}$ ,  $Y_{ih}$ ,  $i = 1, 2$ , and the discrete operator  $\mathcal{L}_{1h}$  are given. The idea of the mimetic discretization is to find a discrete operator  $\mathcal{L}_{2h}$  such that a discrete analog of the fundamental identity holds, i.e

$$\mathcal{I}_h(\mathcal{L}_{1,h}, \mathcal{L}_{2,h}; f_{1h}, f_{2h}) = 0 \quad \forall f_{1h} \in X_{1h}, f_{2h} \in X_{2h}. \quad (2.1)$$

This implies that operators  $\mathcal{L}_1$  and  $\mathcal{L}_2$  cannot be discretized independently from each other. For a given  $\mathcal{L}_{1,h}$ , formula (2.1) is the implicit definition of the operator  $\mathcal{L}_{2,h}$ .

With the discrete divergence and quadrature rules for approximating  $L^2$  inner products defined, the discrete gradient operator is derived from the discrete Green's formula (cf. (2.5))

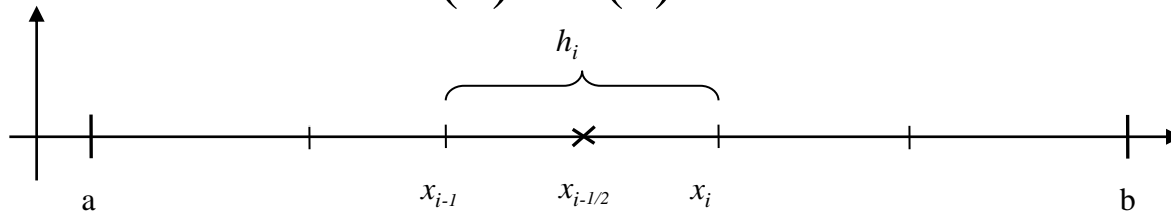
$$[\mathbf{q}, \mathcal{DIV} \mathbf{v}]_\Omega + [\mathbf{v}, \mathcal{GRAD} \mathbf{q}]_X = 0 \quad \forall \mathbf{q} \in Q_h, \forall \mathbf{v} \in X_h. \quad (2.17)$$

**Lemma 2.1** *If (2.13) in Assumption A3 holds, then formula (2.17) gives a unique definition for operator  $\mathcal{GRAD}$ .*

## 4. Пример построения дискретного аналога – 1D, 2D

$$R^* w \equiv \frac{dw}{dx} = f, \quad x \in (a, b), \quad w = k(x)q, \quad q = Ru \equiv -\frac{du}{dx},$$

$$u(a) = u(b) = 0.$$



■  $H_h$  -- гильбертово пространство сеточных функций, заданных на сетке  $\bar{\omega}$ , принимающих нулевое значение на  $\gamma$ , со скалярным произведением:

$$(u^h, v^h)_{H_h} = \sum_{i=1}^N u_i^h v_i^h \left( \frac{h_i}{2} + \frac{h_{i+1}}{2} \right)$$

■  $H_h^*$  -- гильбертово пространство сеточных функций, заданных на сетке  $\omega_{\frac{1}{2}}$ , со скалярным произведением:

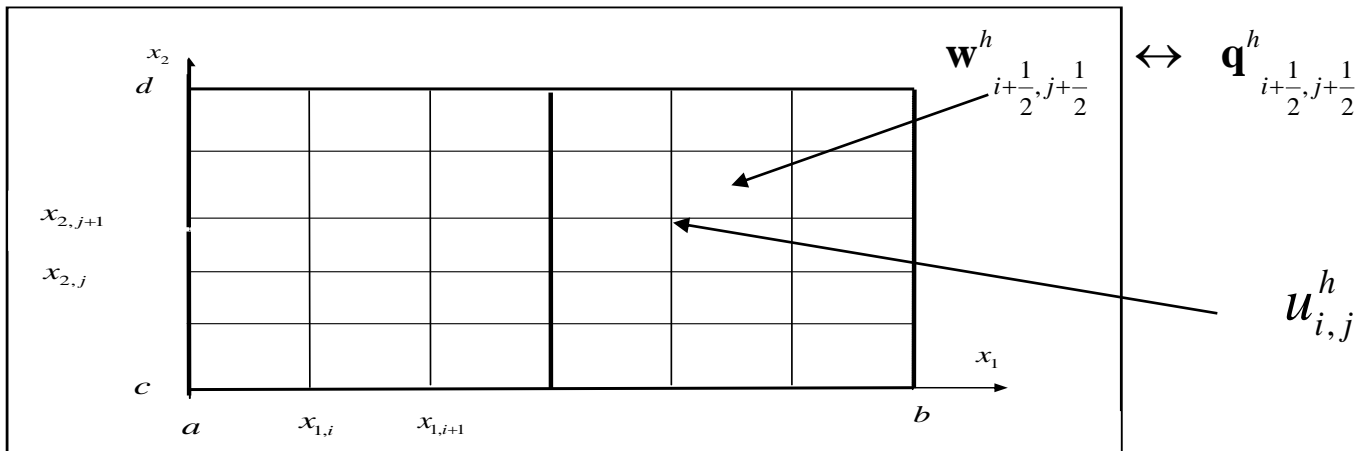
$$(w^h, \sigma^h)_{H_h^*} = \sum_{i=0}^N w_{i+\frac{1}{2}}^h \sigma_{i+\frac{1}{2}}^h h_{i+1}.$$



# ■ Пример построения дискретного аналога – 2D

$$R^* \mathbf{w} \equiv \operatorname{div} \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = f, \quad x \in \Omega, \quad \mathbf{w} = \mathbf{K} \mathbf{q}, \quad Ru = -\operatorname{grad} u \equiv - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} u,$$

$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$



$$(R_h u^h)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} = - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (u_{x_1, i, j}^h + u_{x_1, i, j+1}^h) \\ \frac{1}{2} (u_{x_2, i, j}^h + u_{x_2, i+1, j}^h) \end{bmatrix}, \quad 0 \leq i \leq N_1, 0 \leq j \leq N_2,$$

$$u_{i, j}^h = u^h(x_{1, i}, x_{2, j}) = 0, \quad (x_{1, i}, x_{2, j}) \in \partial\Omega.$$



$$(R_h^* \begin{bmatrix} w_1^h \\ w_2^h \end{bmatrix})_{i, j} = \frac{1}{2} [w_{1, x_1, i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^h + w_{1, x_1, i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^h] + \frac{1}{2} [w_{2, x_2, i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^h + w_{2, x_2, i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^h], \quad 1 \leq i \leq N_1, 1 \leq j \leq N_2,$$

$$[w^h]_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} = [K_h R_h u^h]_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} (R_h u^h)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{E}$$





$$R_h^* R_h u^h = -\frac{1}{4} [u^h_{\bar{x}_1 x_1, i, j-1} + 2u^h_{\bar{x}_1 x_1, i, j} + u^h_{\bar{x}_1 x_1, i, j+1}] - \frac{1}{4} [u^h_{\bar{x}_2 x_2, i-1, j} + 2u^h_{\bar{x}_2 x_2, i, j} + u^h_{\bar{x}_2 x_2, i+1, j}]$$

## ■ Спектральная задача

$$(R_h^* R_h \sin m\pi i h_1 \sin p\pi j h_2)_{ij} = \mu_{mp} \sin m\pi i h_1 \sin p\pi j h_2$$

$$\mu_{mp} = \lambda_m^{x_1} + \lambda_p^{x_2} - \left[ \frac{h_2^2}{4} + \frac{h_1^2}{4} \right] \lambda_m^{x_1} \lambda_p^{x_2},$$

$$\lambda_m^{x_1} = \frac{4}{h_1^2} \sin^2 \frac{m\pi h_1}{2}, \quad \lambda_p^{x_2} = \frac{4}{h_2^2} \sin^2 \frac{p\pi h_2}{2}.$$

■ 1. Можно применять БПФ.

■ 2. Построенный оператор эквивалентен по спектру оператору

$$- u^h_{\bar{x}_1 x_1, i, j} - u^h_{\bar{x}_2 x_2, i, j}$$

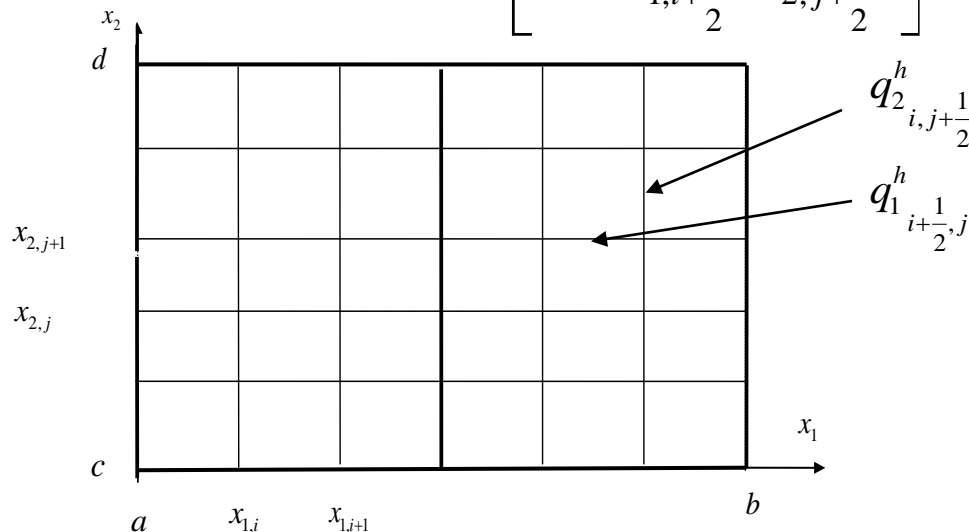
## ■ Важно !

- 1.  $R_h$  аппроксимирует оператор  $R$  со вторым порядком в точках

$$\left( x_{1,i+\frac{1}{2}}, x_{2,j+\frac{1}{2}} \right)$$

- 2. Компоненты  $w^h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \leftrightarrow q^h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$  - тензоров ранга 1 (векторов) определяются в одних и тех же точках

$$w^h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} w_1^h(x_{1,i+\frac{1}{2}}, x_{2,j+\frac{1}{2}}) \\ w_2^h(x_{1,i+\frac{1}{2}}, x_{2,j+\frac{1}{2}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} q_1^h(x_{1,i+\frac{1}{2}}, x_{2,j+\frac{1}{2}}) \\ q_2^h(x_{1,i+\frac{1}{2}}, x_{2,j+\frac{1}{2}}) \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} w_1^h(x_{1,i+\frac{1}{2}}, x_{2,j}) \\ w_2^h(x_{1,i}, x_{2,j+\frac{1}{2}}) \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} q_1^h(x_{1,i+\frac{1}{2}}, x_{2,j}) \\ q_2^h(x_{1,i}, x_{2,j+\frac{1}{2}}) \end{bmatrix}$$

$$\text{grad } q(M) = \lim_{D(M) \rightarrow 0} (D(M))^{-1} \int_{S(M)} \mathbf{n} q dS.$$

## ■ 5. Обоснование сходимости – 1D

### 5.1. Устойчивость

$$\begin{aligned}
 R_h^* w^h &= f^h, \\
 w^h &= K_h q^h, \implies \mathbf{A}_h Y^h \equiv \begin{bmatrix} -K_h^{-1} & R_h \\ R_h^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^h \\ u^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f^h \end{bmatrix} \equiv F^h = \begin{bmatrix} F_1^h \\ F_2^h \end{bmatrix}. \\
 q^h &= R_h u^h.
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}_h^* = \mathbf{A}_h : \mathbf{H}_h \rightarrow \mathbf{H}_h = H_h^* \times H_h$$

⇓

Тогда

$$\exists \Phi_i : \mathbf{A}_h \Phi_i = \lambda_i \Phi_i, \quad (\Phi_i, \Phi_j)_{\mathbf{H}_h} = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, \dim \mathbf{H}_h}.$$

Для «хороших» краевых условий

$$|\lambda_k| = \min_{i=1, \dim \mathbf{H}_h} \{ |\lambda_i| \} \geq c > 0, \quad |\lambda_k| \neq |\lambda_k(h)|$$

⇓

$$\mathbf{A}_h Y^h = F^h \implies \|Y^h\|_{\mathbf{H}_h} \leq \frac{1}{|\lambda_k|} \|F^h\|_{\mathbf{H}_h} \leq \frac{1}{c} \|F^h\|_{\mathbf{H}_h}$$

УСТОЙЧИВОСТЬ



## 5.2. Аппроксимация

### ■ Уравнение для погрешности

$$\mathbf{A}_h \mathbf{Y}^h = \mathbf{F}^h, \quad \mathbf{Z}^h = \mathbf{Y}^h - \mathbf{Y} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}_h \mathbf{Z}^h = \mathbf{\Psi}^h \equiv \mathbf{F}^h - \mathbf{A}_h \mathbf{Y}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Psi}^h = \begin{bmatrix} \Psi_1^h \\ \Psi_2^h \end{bmatrix}, \quad \Psi_1^h = K_h^{-1} w - R_h u, \quad \Psi_2^h = f^h - R_h^* w.$$

Оценка  $\|\mathbf{\Psi}^h\|_{\mathbf{H}_h}$

$$\Psi_1^h = K_h^{-1} w - R_h u, \quad \mathbf{0}$$

$$(\Psi_1^h)_{i+\frac{1}{2}} = (K_h^{-1} w)_{i+\frac{1}{2}} - (R_h u)_{i+\frac{1}{2}} = \frac{w_{i+\frac{1}{2}}}{a_i} - \frac{u_i - u_{i+1}}{h} = \frac{w_{i+\frac{1}{2}}}{k(x_{i+\frac{1}{2}})} - \left(-\frac{du}{dx}\right)_{i+\frac{1}{2}} + O(h^2) = \frac{w_{i+\frac{1}{2}}}{k(x_{i+\frac{1}{2}})} + \left(\frac{du}{dx}\right)_{i+\frac{1}{2}} + O(h^2)$$



$$\|\Psi_1^h\|_{H_h^*} = O(h^2)$$

$$\Psi_2^h = f^h - R_h^* w \in H_h,$$

- Выберем в качестве базиса в  $H_h$   $e_i(x_j) = \begin{cases} 0, & j \neq i, \\ 1, & j = i, \end{cases}$
- Вычислим  $(\Psi_2^h, e_j)_{H_h}$

$$(R_h^* w, e_j)_{H_h} = (w, R_h e_j)_{H_h^*} = \sum_{i=0}^N w_{i+\frac{1}{2}} [R_h e_j]_{i+\frac{1}{2}} h_{i+1} = w_{j-\frac{1}{2}} [R_h e_j]_{j-\frac{1}{2}} h_j + w_{j+\frac{1}{2}} [R_h e_j]_{j+\frac{1}{2}} h_{j+1}$$

■ Для

$$\tilde{e}_j(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{h_j} & x \in (x_{j-1}, x_j), \\ \frac{x_{j+1} - x}{h_{j+1}} & x \in (x_j, x_{j+1}), \\ 0, & x \notin (x_{j-1}, x_{j+1}) \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

- Верны равенства  $[R_h e_j]_{j-\frac{1}{2}} = [R \tilde{e}_j(x_{j-\frac{1}{2}})], \quad [R_h e_j]_{j+\frac{1}{2}} = [R \tilde{e}_j(x_{j+\frac{1}{2}})]$

Поэтому  $(R_h^* w, e_j)_{H_h} = w \Big|_{j-\frac{1}{2}} [R\tilde{e}_j]_{j-\frac{1}{2}} h_j + w \Big|_{j+\frac{1}{2}} [R\tilde{e}_j]_{j+\frac{1}{2}} h_{j+1} =$

А, используя формулу центральных прямоугольников:

$$= \int_{x_{j-1}}^{x_j} w(x)[R\tilde{e}_j(x)]dx + \frac{(w(x)[R\tilde{e}_j(x)])''(x_{j-\frac{1}{2}})}{24} h_j^3 + O(h_j^4) +$$

$$+ \int_{x_j}^{x_{j+1}} w(x)[R\tilde{e}_j(x)]dx + \frac{(w(x)[R\tilde{e}_j(x)])''(x_{j+\frac{1}{2}})}{24} h_{j+1}^3 + O(h_{j+1}^4)$$

Или, поскольку

$$(w(x)[R\tilde{e}_j(x)])'' \Big|_{(x_{j\pm\frac{1}{2}})} = w''(x)[R\tilde{e}_j(x)] \Big|_{(x_{j\pm\frac{1}{2}})} + 2w'(x)[R\tilde{e}_j(x)]' \Big|_{(x_{j\pm\frac{1}{2}})} + w(x)[R\tilde{e}_j(x)]'' \Big|_{(x_{j\pm\frac{1}{2}})}$$

$\begin{matrix} \parallel \\ 0 \end{matrix}$ 
 $\begin{matrix} \parallel \\ 0 \end{matrix}$

$$(R_h^* w, e_j)_{H_h} = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} w(x)[R\tilde{e}_j(x)]dx + \frac{w''(x_{j-\frac{1}{2}})[R\tilde{e}_j(x_{j-\frac{1}{2}})]}{24} h_j^3 + \frac{w''(x_{j+\frac{1}{2}})[R\tilde{e}_j(x_{j+\frac{1}{2}})]}{24} h_{j+1}^3 + O(h^4)$$

■ Опять используя  $[R_h e_j]_{j \pm \frac{1}{2}} = [R \tilde{e}_j(x_{j \pm \frac{1}{2}})]$  и финитность  $\tilde{e}_j(x)$

$$(R_h^* w, e_j)_{H_h} = \int_a^b w(x) [R \tilde{e}_j(x)] dx + \frac{h_j^2 w''(x_{j-\frac{1}{2}}) [R_h e_j]_{j-\frac{1}{2}}}{24} h_j + \frac{h_{j+1}^2 w''(x_{j+\frac{1}{2}}) [R_h e_j]_{j+\frac{1}{2}}}{24} h_{j+1} + O(h^4) =$$

■ А значит

$$= (w, R \tilde{e}_j)_H + \frac{1}{24} (\eta, R_h e_j)_{H_h^*} = (R^* w, \tilde{e}_j)_H + \frac{1}{24} (R_h^* \eta, e_j)_{H_h}$$

$$\eta = \{ \eta_{j-\frac{1}{2}} = h_j^2 w''(x_{j-\frac{1}{2}}) \}_{j=1, \overline{N+1}}$$

■ Выберем в качестве  $f^h$  следующую сеточную функцию

$$f^h(x_j) = (f^h)_j = \frac{1}{\frac{h_j}{2} + \frac{h_{j+1}}{2}} \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f(x) \tilde{e}_j(x) dx$$

■ Тогда

$$(f^h, e_j)_{H_h} = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f(x) \tilde{e}_j(x) dx = \int_a^b f(x) \tilde{e}_j(x) dx = (f, \tilde{e}_j)_H$$

## И ПОЭТОМУ

$$(\Psi_2^h, e_j)_{H_h} = (f^h - R_h^* w, e_j)_{H_h} = \underbrace{(f, \tilde{e}_j)_H - (R^* w, \tilde{e}_j)_H}_{=0} - (R_h^* \eta, e_j)_{H_h^*} = -(R_h^* \eta, e_j)_{H_h^*}$$

$$\Downarrow$$

$$\Psi_2^h = R_h^* \eta \quad \eta = \left\{ \eta_{j-\frac{1}{2}} = -h_j^2 w''(x_{j-\frac{1}{2}}) \right\}_{j=1, \overline{N+1}}$$

## Окончательно

$$\mathbf{A}_h \mathbf{Z}^h = \Psi^h, \quad \mathbf{Z}^h = \mathbf{Y}^h - \mathbf{Y}, \quad \Psi^h = \begin{bmatrix} \Psi_1^h \\ \Psi_2^h \end{bmatrix},$$

$$\|\Psi_1^h\|_{H_h^*} = O(h^2), \quad \Psi_2^h(x_j) = R_h^* \eta(x_j)$$

$$\eta = \left\{ \eta_{j-\frac{1}{2}} = -h_j^2 w''(x_{j-\frac{1}{2}}) \right\}_{j=1, \overline{N+1}}$$



## 5.3. Сходимость

Рассмотрим две задачи

■ 1.  $\mathbf{A}_h \bar{\mathbf{Z}}^h = \bar{\Psi}^h, \quad \bar{\Psi}^h = \begin{bmatrix} \Psi_1^h \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \|\Psi_1^h\|_{H_h^*} = O(h^2)$

■ 2.  $\mathbf{A}_h \bar{\bar{\mathbf{Z}}}^h = \bar{\bar{\Psi}}^h, \quad \bar{\bar{\Psi}}^h = \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi_2^h \end{bmatrix}, \quad \Psi_2^h(x_j) = R_h^* \eta(x_j), \quad \eta = \{\eta_{j-\frac{1}{2}} = -h_j^2 w''(x_{j-\frac{1}{2}})\}_{j=1, \overline{N+1}}.$

■ Ясно, что  $\mathbf{Z}^h = \bar{\mathbf{Z}}^h + \bar{\bar{\mathbf{Z}}}^h$

Для  $\bar{\mathbf{Z}}^h$  справедлива оценка (**устойчивость**)

$$\|\bar{\mathbf{Z}}^h\|_{\mathbf{H}_h} \leq \frac{1}{c} \|\bar{\Psi}^h\|_{H_h^*} = \frac{1}{c} \|\Psi_1^h\|_{H_h^*} = O(h^2)$$

Получим оценку для  $\bar{\bar{\mathbf{Z}}}^h$

■ Умножим первую строку уравнения  $A_h \bar{Z}^h = \bar{\Psi}^h$  на (-1):

$$\begin{bmatrix} -K_h^{-1} & R_h \\ R_h^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Z}_1^h \\ \bar{Z}_2^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi_2^h \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} K_h^{-1} & -R_h \\ R_h^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Z}_1^h \\ \bar{Z}_2^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0 \\ \Psi_2^h \end{bmatrix},$$

■ Далее, скалярно умножим обе части  $\bar{Z}^h = \begin{bmatrix} \bar{Z}_1^h \\ \bar{Z}_2^h \end{bmatrix}$

■ Получим:

■ Левая часть

$$\left( \begin{bmatrix} K_h^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -R_h \\ R_h^* & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \bar{Z}_1^h \\ \bar{Z}_2^h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{Z}_1^h \\ \bar{Z}_2^h \end{bmatrix} \Bigg)_{\mathbb{H}_h} = \left( \begin{bmatrix} K_h^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Z}_1^h \\ \bar{Z}_2^h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{Z}_1^h \\ \bar{Z}_2^h \end{bmatrix} \right)_{\mathbb{H}_h} + \underbrace{\left( \begin{bmatrix} 0 & -R_h \\ R_h^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Z}_1^h \\ \bar{Z}_2^h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{Z}_1^h \\ \bar{Z}_2^h \end{bmatrix} \right)_{\mathbb{H}_h}}_{= 0} = (K_h^{-1} \bar{Z}_1^h, \bar{Z}_1^h)_{\mathbb{H}_h^*}$$

■ Правая часть

$$\left( \begin{bmatrix} -0 \\ \Psi_2^h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{Z}_1^h \\ \bar{Z}_2^h \end{bmatrix} \right)_{\mathbb{H}_h} = (\Psi_2^h, \bar{Z}_2^h)_{\mathbb{H}_h} = (R_h^* \eta, \bar{Z}_2^h)_{\mathbb{H}_h} = (\eta, R_h \bar{Z}_2^h)_{\mathbb{H}_h^*} = (\eta, K_h^{-1} \bar{Z}_1^h)_{\mathbb{H}_h^*}$$

$R_h \bar{Z}_2^h = K_h^{-1} \bar{Z}_1^h$

■ Таким образом

$$(K_h^{-1} \bar{\bar{Z}}_1^h, \bar{\bar{Z}}_1^h)_{H_h^*} = (\eta, K_h^{-1} \bar{\bar{Z}}_1^h)_{H_h^*}$$

■ А значит

$$\lambda_{\min}(K_h^{-1})(\bar{\bar{Z}}_1^h, \bar{\bar{Z}}_1^h)_{H_h^*} \leq |(K_h^{-1} \bar{\bar{Z}}_1^h, \bar{\bar{Z}}_1^h)_{H_h^*}| = |(\eta, K_h^{-1} \bar{\bar{Z}}_1^h)_{H_h^*}| \leq \|\eta\|_{H_h^*} \lambda_{\max}(K_h^{-1}) \|\bar{\bar{Z}}_1^h\|_{H_h^*}$$

⇓

$$\lambda_{\min}(K_h^{-1}) \|\bar{\bar{Z}}_1^h\|_{H_h^*}^2 \leq \|\eta\|_{H_h^*} \lambda_{\max}(K_h^{-1}) \|\bar{\bar{Z}}_1^h\|_{H_h^*}$$

⇓

$$\|\bar{\bar{Z}}_1^h\|_{H_h^*} \leq \frac{\lambda_{\max}(K_h^{-1})}{\lambda_{\min}(K_h^{-1})} \|\eta\|_{H_h^*} = O(h^2)$$

■ Справедливо неравенство (Фридрикса)

$$R_h \bar{\bar{Z}}_2^h = K_h^{-1} \bar{\bar{Z}}_1^h$$

$$\|\bar{\bar{Z}}_2^h\|_{H_h} \leq c_1 \|R_h \bar{\bar{Z}}_2^h\|_{H_h^*} = \|K_h^{-1} \bar{\bar{Z}}_1^h\|_{H_h^*} \leq \|K_h^{-1}\|_{H_h^*} \|\bar{\bar{Z}}_1^h\|_{H_h^*} = O(h^2)$$

■ И, следовательно,

$$\|\bar{\bar{Z}}^h\|_{\mathbf{H}_h} = \sqrt{\|\bar{\bar{Z}}_1^h\|_{H_h^*}^2 + \|\bar{\bar{Z}}_2^h\|_{H_h}^2} \leq \|\bar{\bar{Z}}_1^h\|_{H_h^*} + \|\bar{\bar{Z}}_2^h\|_{H_h} = O(h^2) + O(h^2) = O(h^2)$$

■ Окончательно

$$\|\mathbf{Z}^h\|_{\mathbf{H}_h} = \|\bar{\bar{Z}}^h + \bar{\bar{Z}}^h\|_{\mathbf{H}_h} \leq \|\bar{\bar{Z}}^h\|_{\mathbf{H}_h} + \|\bar{\bar{Z}}^h\|_{\mathbf{H}_h} = O(h^2)$$



## ■ Точная схема с кусочно-постоянным коэффициентом на неравномерной сетке

■ Легко проверяется, что в случае кусочно-постоянного коэффициента  $k(x)$ , точным решением построенной схемы

$$\frac{w_{i+\frac{1}{2}}^h}{k_{i+\frac{1}{2}}} = \frac{u_i^h - u_{i+1}^h}{h_{i+1}} \equiv (R_h u^h)_{i+\frac{1}{2}},$$

$$(R_h^* w^h)_i \equiv \frac{w_{i+\frac{1}{2}}^h - w_{i-\frac{1}{2}}^h}{\frac{h_i + h_{i+1}}{2}} = f_i, \quad f_i \equiv \frac{1}{\frac{h_i + h_{i+1}}{2}} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \tilde{e}_i(x) dx,$$

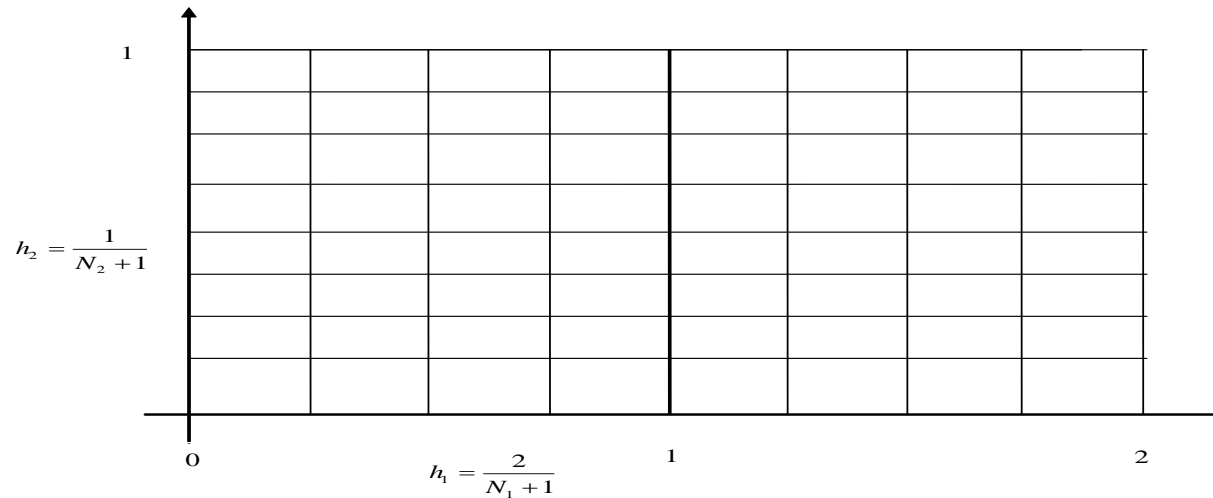
$$u_0 = 0, \quad u_{N+1} = 0.$$

■ является  $u_i = u(x_i), \quad \tilde{w}_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} w(x) dx,$

■ Здесь  $u(x), w(x)$  точное решение дифференциальной задачи

## 6. Тесты

Область  $\Omega = (0,2) \times (0,1)$



## Задача

$$R^* w \equiv \operatorname{div} w = \frac{dw_1}{dx_1} + \frac{dw_2}{dx_2} = f,$$

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = Kq = \begin{bmatrix} k_{11}(x_1, x_2) & k_{12}(x_1, x_2) \\ k_{21}(x_1, x_2) & k_{22}(x_1, x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix},$$

$$q = Ru \equiv -\operatorname{grad} u = - \begin{bmatrix} \frac{du}{dx_1} \\ \frac{du}{dx_2} \end{bmatrix},$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0.$$

■ В таблицах используются обозначения:

$$\max = \max_{(x_{1i}, x_{2j}) \in \omega} |u(x_{1i}, x_{2j}) - u^h(x_{1i}, x_{2j})|, \quad L_2 = \left[ \sum_{(x_{1i}, x_{2j}) \in \omega} (u(x_{1i}, x_{2j}) - u^h(x_{1i}, x_{2j}))^2 h_{1i} h_{2j} \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$H_h \otimes H_h^* = \left[ \sum_{(x_{1i}, x_{2j}) \in \omega} (u(x_{1i}, x_{2j}) - u^h(x_{1i}, x_{2j}))^2 h_{1i} h_{2j} + \right.$$

$$\left. + \sum_{(x_{1,i-\frac{1}{2}}, x_{2,j-\frac{1}{2}}) \in \omega_{\frac{1}{2}}} (w_1(x_{1,i-\frac{1}{2}}, x_{2,j-\frac{1}{2}}) - w_1^h(x_{1,i-\frac{1}{2}}, x_{2,j-\frac{1}{2}}))^2 h_{1i} h_{2j} + \sum_{(x_{1,i-\frac{1}{2}}, x_{2,j-\frac{1}{2}}) \in \omega_{\frac{1}{2}}} (w_2(x_{1,i-\frac{1}{2}}, x_{2,j-\frac{1}{2}}) - w_2^h(x_{1,i-\frac{1}{2}}, x_{2,j-\frac{1}{2}}))^2 h_{1i} h_{2j} \right]^{\frac{1}{2}}$$

- $u(x_{1i}, x_{2j})$  - проекция точного решения на сетку  $\omega$ ,
- $w(x_{1,i-\frac{1}{2}}, x_{2,j-\frac{1}{2}})$  - проекция потока от точного решения на сетку  $\omega_{\frac{1}{2}}$ ,
- $u^h(x_{1i}, x_{2j})$  - решение дискретной задачи на сетке  $\omega$ ,
- $w^h(x_{1,i-\frac{1}{2}}, x_{2,j-\frac{1}{2}})$  - решение дискретной задачи (дискретный поток) на сетке  $\omega_{\frac{1}{2}}$ ,

## ■ Равномерная сетка

## ■ Смешанные производные

$$K(x_{1,i-\frac{1}{2}}, x_{2,j-\frac{1}{2}}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Решение  $u(x_1, x_2) = x_1(2 - x_1)x_2(1 - x_1)$

## ■ Таблица 1

$h_1 \quad h_2 \quad / \quad \varepsilon$	max	$L_2$	$H_h \otimes H_h^*$
$10^{-1} \quad 10^{-1}$	0.2348E-02	0.1932E-02	0.1012E-01
$\frac{1}{2}10^{-1} \quad \frac{1}{2}10^{-1}$	0.5853E-03	0.4807E-03	0.2532E-02
$\frac{1}{4}10^{-1} \quad \frac{1}{4}10^{-1}$	0.1462E-03	0.1200E-03	0.6331E-03
$\frac{1}{8}10^{-1} \quad \frac{1}{8}10^{-1}$	0.3654E-04	0.3000E-04	0.1583E-03
$\frac{1}{16}10^{-1} \quad \frac{1}{16}10^{-1}$	0.9135E-05	0.7498E-05	0.3957E-04

## ■ Неравномерная сетка

$$K(x_{1,i-\frac{1}{2}}, x_{2,j-\frac{1}{2}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Решение**  $u(x_1, x_2) = x_1(2 - x_1) x_2(1 - x_1)$

## ■ Таблица 2

$h_{11}$ $h_{12}$ $h_2$ / $\varepsilon$	max	$L_2$	$H_h \otimes H_h^*$
$10^{-1}$ $\frac{1}{2}10^{-1}$ $10^{-1}$	0.2016E-02	0.1550E-02	0.4608E-02
$\frac{1}{2}10^{-1}$ $\frac{1}{4}10^{-1}$ $\frac{1}{2}10^{-1}$	0.5025E-03	0.3858E-03	0.1152E-02
$\frac{1}{4}10^{-1}$ $\frac{1}{8}10^{-1}$ $\frac{1}{4}10^{-1}$	0.1255E-03	0.9633E-04	0.2881E-03
$10^{-1}$ $\frac{1}{10}10^{-1}$ $10^{-1}$	0.1962E-02	0.1450E-02	0.4562E-02
$\frac{1}{2}10^{-1}$ $\frac{1}{20}10^{-1}$ $\frac{1}{2}10^{-1}$	0.4878E-03	0.3610E-03	0.1141E-02
$\frac{1}{4}10^{-1}$ $\frac{1}{40}10^{-1}$ $\frac{1}{4}10^{-1}$	0.1218E-03	0.9014E-04	0.2852E-03



## ■ Неравномерная сетка + Разрывные коэффициенты

$$K(x_{1,i-\frac{1}{2}}, x_{2,j-\frac{1}{2}}) = \begin{bmatrix} p1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad K(x_{1,i-\frac{1}{2}}, x_{2,j-\frac{1}{2}}) = \begin{bmatrix} p2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Решение**  $u(x_1, x_2) = \left[-\frac{p2}{p1+p2}x_1 + 1\right] x_2^4(1-x_2^4)$        $u(x_1, x_2) = \left[\frac{p1}{p1+p2}(2-x_1)\right] x_2^4(1-x_2^4)$

### ■ Таблица 3 $p1=10$ , $p2=1000$

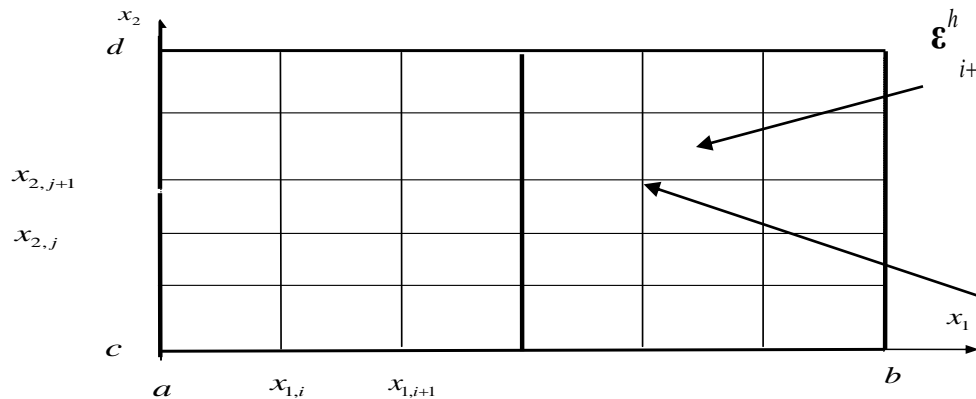
$h_{11}$	$h_{12}$	$h_2$	/ $\varepsilon$	max	$L_2$	$H_h \otimes H_h^*$
$\frac{1}{2}10^{-1}$	$10^{-1}$	$10^{-1}$	$10^{-1}$	0.3316E-02	0.1185E-02	0.2096E+00
$\frac{1}{4}10^{-1}$	$\frac{1}{2}10^{-1}$	$\frac{1}{2}10^{-1}$	$\frac{1}{2}10^{-1}$	0.8115E-03	0.2891E-03	0.5388E-01
$\frac{1}{8}10^{-1}$	$\frac{1}{4}10^{-1}$	$\frac{1}{4}10^{-1}$	$\frac{1}{4}10^{-1}$	0.2008E-03	0.7176E-04	0.1357E-01
$\frac{1}{10}10^{-1}$	$10^{-1}$	$10^{-1}$	$10^{-1}$	0.3309E-02	0.1183E-02	0.2063E+00
$\frac{1}{20}10^{-1}$	$\frac{1}{2}10^{-1}$	$\frac{1}{2}10^{-1}$	$\frac{1}{2}10^{-1}$	0.8110E-03	0.2888E-03	0.5300E-01
$\frac{1}{40}10^{-1}$	$\frac{1}{4}10^{-1}$	$\frac{1}{4}10^{-1}$	$\frac{1}{4}10^{-1}$	0.2007E-03	0.7171E-04	0.1334E-01

# 7. Дальнейшие возможности

## 1. Теория упругости;

$$R^* \boldsymbol{\sigma} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad R \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u} = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$



$$\boldsymbol{\varepsilon}^h_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} = (R \mathbf{u}^h)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(u_{1,x_1,i,j}^h + u_{1,x_1,i,j+1}^h) \\ \frac{1}{2}(u_{2,x_2,i,j}^h + u_{2,x_2,i+1,j}^h) \\ \frac{1}{2}(u_{1,x_2,i,j}^h + u_{1,x_2,i+1,j}^h) + \frac{1}{2}(u_{2,x_1,i,j}^h + u_{2,x_1,i,j+1}^h) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}^h_{i,j} = \begin{bmatrix} u_{1,i,j}^h \\ u_{2,i,j}^h \end{bmatrix}$$

## 2. Криволинейные координаты;

$$y_j = y_j(x_1, x_2, x_3), \quad j = 1, 2, 3$$

$$Ru = -grad u(\mathbf{y}) = -\frac{\partial u}{\partial y_i} \mathbf{e}^i$$

$$R^* \mathbf{w} = \operatorname{div} \mathbf{w} = \operatorname{tr}(\nabla \mathbf{w}) = \nabla_m w^m$$

$$\nabla_j u^m = \left( \frac{\partial u^m}{\partial y_j} + u^i \Gamma_{ij}^m \right), \quad \Gamma_{ij}^m = \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial y_j} \cdot \mathbf{e}^m.$$

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_1}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_2}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_3}$$

$$\mathbf{r} = x_1 \mathbf{q}_1 + x_2 \mathbf{q}_2 + x_3 \mathbf{q}_3 = x_i \mathbf{q}_i.$$

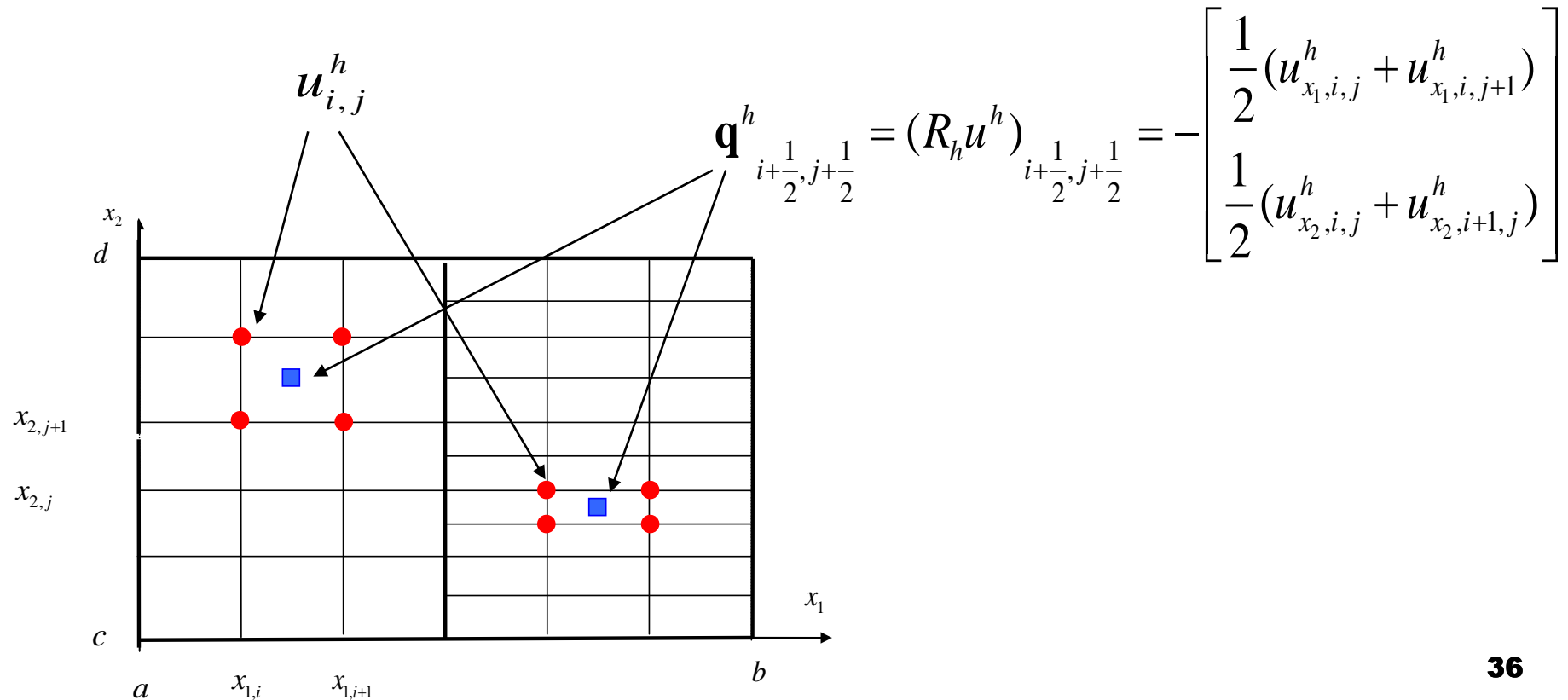
$$R_h : H_h \rightarrow H_h^*, \quad R_h^* : H_h^* \rightarrow H_h,$$

$$(R_h u^h, \mathbf{w}^h)_{H_h^*} = (u^h, R_h^* \mathbf{w}^h)_{H_h}.$$

### 3. Не стыкующиеся сетки;

$$R^* \mathbf{w} \equiv \operatorname{div} \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \\ & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = f, \quad x \in \Omega, \quad \mathbf{w} = \mathbf{K} \mathbf{q}, \quad Ru = -\operatorname{grad} u \equiv - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} u,$$

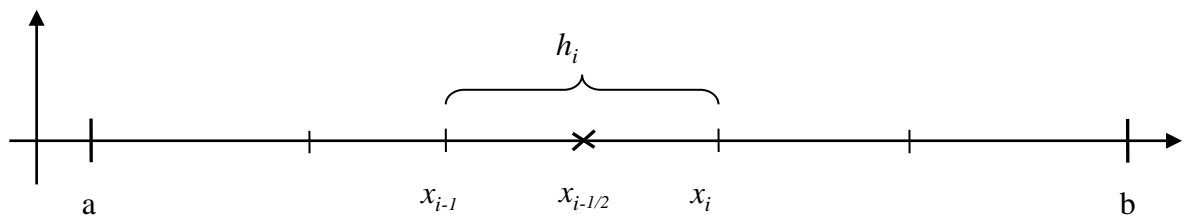
$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$



## 4. Краевые условия.

$$R^* w \equiv \frac{dw}{dx} = f, \quad x \in (a, b), \quad w = k(x)q, \quad q = Ru \equiv -\frac{du}{dx},$$

$$u(a) = \frac{du}{dx}(b) = 0.$$



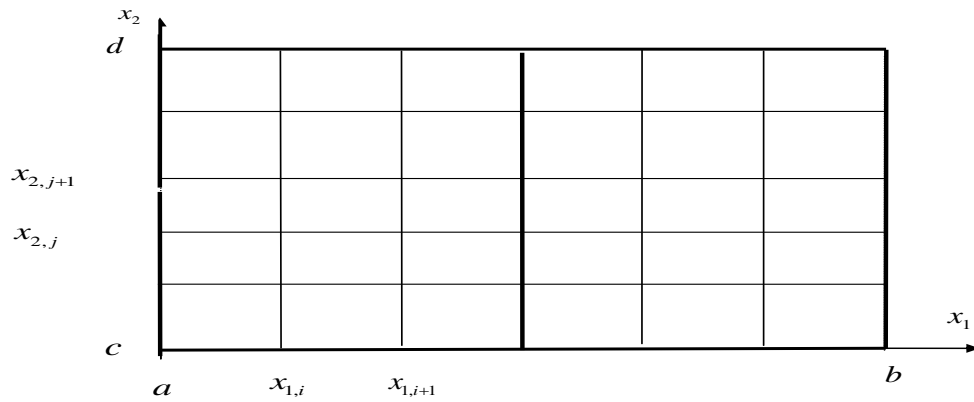
$$\begin{aligned}
 R_h : H_h &\rightarrow H_h^*, \\
 (R_h u^h)(x_{i+\frac{1}{2}}) &= \begin{cases} \frac{-u_1^h}{h_1}, & i=0, \\ \frac{u_i^h - u_{i+1}^h}{h_{i+1}}, & 1 \leq i \leq N, \end{cases} \\
 \Rightarrow \\
 R_h^* w^h(x_i) &= \begin{cases} \frac{w_{i+\frac{1}{2}}^h - w_{i-\frac{1}{2}}^h}{\frac{h_i}{2} + \frac{h_{i+1}}{2}}, & 1 \leq i \leq N-1, \\ -\frac{w_{N+\frac{1}{2}}^h}{\frac{h_N}{2} + \frac{h_{N+1}}{2}}, & i=N. \end{cases}
 \end{aligned}$$

■ **Спасибо за внимание**









$$(R_h u^h)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} = - \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{2} \left( \frac{u_{i+1, j}^h - u_{i, j}^h}{h_1} + \frac{u_{i+1, j+1}^h - u_{i, j+1}^h}{h_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{u_{i, j+1}^h - u_{i, j}^h}{h_2} + \frac{u_{i+1, j+1}^h - u_{i+1, j}^h}{h_2} \right) \end{array} \right], \quad 0 \leq i \leq N_1, 0 \leq j \leq N_2,$$

$$u_{i, j}^h = u^h(x_{1, i}, x_{2, j}) = 0, \quad (x_{1, i}, x_{2, j}) \in \partial\Omega.$$



$$(R_h^* \begin{bmatrix} w_1^h \\ w_2^h \end{bmatrix})_{i, j} = \frac{1}{2} \left[ \frac{w_1^h(x_{1, i+\frac{1}{2}}, x_{2, j+\frac{1}{2}}) - w_1^h(x_{1, i-\frac{1}{2}}, x_{2, j+\frac{1}{2}})}{h_1} + \frac{w_1^h(x_{1, i+\frac{1}{2}}, x_{2, j-\frac{1}{2}}) - w_1^h(x_{1, i-\frac{1}{2}}, x_{2, j-\frac{1}{2}})}{h_1} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[ \frac{w_2^h(x_{1, i+\frac{1}{2}}, x_{2, j+\frac{1}{2}}) - w_2^h(x_{1, i+\frac{1}{2}}, x_{2, j-\frac{1}{2}})}{h_2} + \frac{w_2^h(x_{1, i-\frac{1}{2}}, x_{2, j+\frac{1}{2}}) - w_2^h(x_{1, i-\frac{1}{2}}, x_{2, j-\frac{1}{2}})}{h_2} \right], \quad 1 \leq i \leq N_1, 1 \leq j \leq N_2,$$

$$[w^h]_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} = [K_h R_h u^h]_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} (R_h u^h)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}$$

**K = E**    ⇓

## ■ Литература

- Лебедев В.И. Разностные аналоги ортогональных разложений основных дифференциальных операторов и некоторых краевых задач математической физики. I.- Журнал вычислительной математики и математической физики, 1964, т. 4, № 3, стр. 449-465.
- Лебедев В.И. Разностные аналоги ортогональных разложений основных дифференциальных операторов и некоторых краевых задач математической физики. II.- Журнал вычислительной математики и математической физики, 1964, т. 4, № 4, стр. 649-659.
- Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. О представлении разностных схем математической физики в операторной форме. Доклады АН СССР,  
■ 1981, т. 258, № 5, стр. 1092-1096.
- Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. . Операторные разностные схемы. Препринт № 9. - Москва, 1981. - 32 стр. - В надзаг.: ИПМ АН СССР.
- Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. . Операторные разностные схемы. Дифференциальные уравнения. 1981, т. 17, № 7. стр. 1317-1327.

- Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. Использование метода опорных операторов для построения разностных аналогов операций тензорного анализа. Препринт № 97. - Москва, 1981. - 16 стр. - В надзаг.: ИПМ АН СССР.
- Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. Использование метода опорных операторов для построения разностных аналогов операций тензорного анализа. Дифференциальные уравнения. 1982, т. 18, № 7. стр. 1251-1256.
- Самарский А.А., Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П. Разностные схемы на нерегулярных сетках. Минск, 1996.

- Sorokin S.B. Conjugate-factorized models in plate theory. Сибирский журнал вычислительной математики РАН СО, т. 2, № 1, Новосибирск, 1999, стр. 81-88.
- Sorokin S.B. Efficient direct methods for discrete conjugate-operator models. The Far-Eastern School - seminar on mathematical modeling and numerical analysis. The proceeding and abstracts, Khabarovsk, 1999, pp. 99-107.
- Сорокин С.Б. Оценка точности двусторонних приближений для задачи Штурма - Лиувилля. Сибирский журнал вычислительной математики РАН СО, т. 3, № 1, Новосибирск, 2000, стр. 77-94.
- Сорокин С.Б. Обоснование метода двусторонних приближений для собственных чисел эллиптического оператора второго порядка. Сибирский журнал вычислительной математики РАН СО, т. 4, № 1, Новосибирск, 2001 г., стр. 61-84.
- Сорокин С.Б. Обоснование асимптотического разложения для спектральных задач в методе фиктивных областей. Тезисы докладов Третьего Сибирского конгресса по прикладной и индустриальной математике (INPRIM-98), Часть III, Новосибирск, Изд. ИМ СО РАН 1998, стр. 23.

$$\frac{h_{12}h_{22}}{\left(\frac{h_{11}}{2} + \frac{h_{12}}{2}\right)h_{22}} (-u^h)_{\Gamma, x_2, \bar{x}_2} + \left[ \frac{h_{12}h_{22}}{\left(\frac{h_{11}}{2} + \frac{h_{12}}{2}\right)h_{22}} \frac{(u^h)_{\Gamma} - (u^h)_{\Gamma+h_{12}}}{h_{12}^2} + \frac{h_{11}h_{21}}{\left(\frac{h_{11}}{2} + \frac{h_{12}}{2}\right)h_{22}} \frac{(u^h)_{\Gamma} - (u^h)_{\Gamma-h_{11}}}{h_{11}^2} \right]$$

$$\frac{h_{12}h_{22}}{\left(\frac{h_{11}}{2} + \frac{h_{12}}{2}\right)h_{22}} (-u^h)_{\Gamma, x_2, \bar{x}_2} + \left[ \frac{h_{12}h_{22}}{\left(\frac{h_{11}}{2} + \frac{h_{12}}{2}\right)h_{22}} \frac{(u^h)_{\Gamma} - (u^h)_{\Gamma+h_{12}}}{h_{12}^2} + \frac{h_{11}h_{21}}{\left(\frac{h_{11}}{2} + \frac{h_{12}}{2}\right)h_{22}} \frac{(u^h)_{\Gamma} - (u^h)_{\Gamma-h_{11}}}{h_{11}^2} \right]$$



# ■ Аппроксимация на стыкующихся сетках 1D

$$R^* w \equiv \frac{dw}{dx} = f, \quad x \in (0,1), \quad w = k(x)q, \quad q = Ru \equiv -\frac{du}{dx}.$$

интегрировать  
от  $x_{i-1/2}$  до  $x_{i+1/2}$

$$\mathbf{A}_h Y^h = F^h, \quad Z^h = Y^h - Y \implies \mathbf{A}_h Z^h = \Psi^h \equiv F^h - \mathbf{A}_h Y$$

$$\Psi_1^h = K_h^{-1} w - R_h u, \implies$$

$$(\Psi_1^h)_{i+1/2} = (K_h^{-1} w)_{i+1/2} - (R_h u)_{i+1/2} = \frac{w_{i+1/2}}{a_i} - \frac{u_i - u_{i+1}}{h} = \frac{w_{i+1/2}}{k(x_{i+1/2})} - \left(-\frac{du}{dx}\right)_{i+1/2} + O(h^2) = \frac{w_{i+1/2}}{k(x_{i+1/2})} + \left(\frac{du}{dx}\right)_{i+1/2} + O(h^2) = O(h^2),$$

$$\Psi_2^h = f^h - R_h^* w \implies$$

$$(\Psi_2^h)_i = (f^h)_i - (R_h^* w)_i = (f^h)_i - \frac{w_{i+1/2} - w_{i-1/2}}{h} = (f^h)_i - \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f dx = \begin{cases} 0, & (f^h)_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f dx, \\ O(h^2), & (f^h)_i = f\left(\frac{x_{i-1/2} + x_{i+1/2}}{2}\right) = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f dx + O(h^2). \end{cases}$$

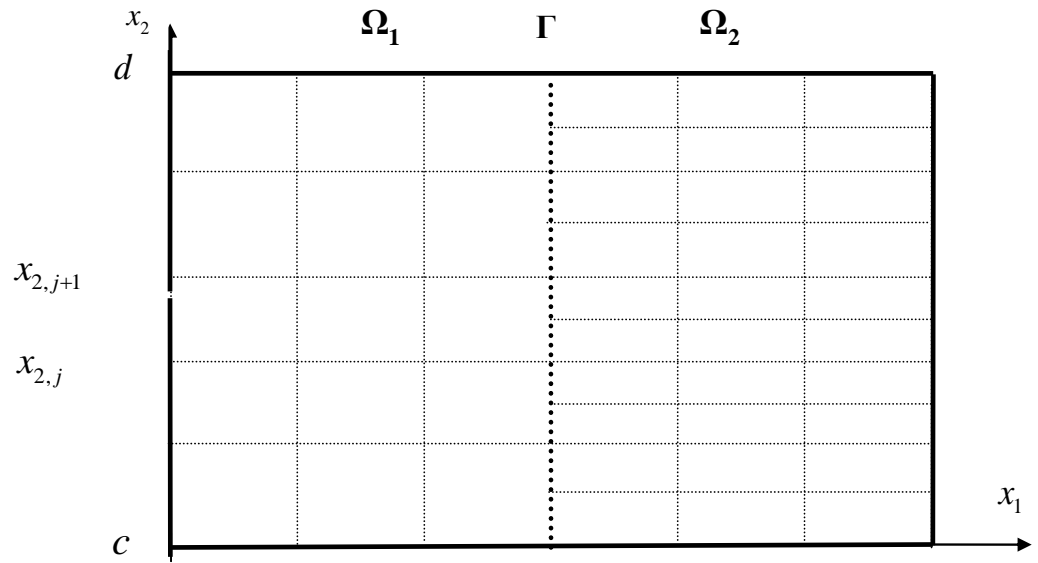
$$\|Y^h\|_{\mathbf{H}_h} \leq \frac{1}{c} O(h^2)$$

■ Самарский А.А. Теория разностных схем. Москва, Наука, 1983.

Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. Учеб. Пособие для ун-тов.- М.: Высш. Шк., 1987-296 **48**



# ■ Тест



## ■ Решение $U(x)=x$

Погрешность максимум								
$h_{x_1}$	$h_{x_2}$	$h_{y_1}$	$h_{y_2}$	$\max \Omega_1$	$\max \frac{1}{2} \Omega_1$	$\max \Omega_2$	$\max \frac{1}{2} \Omega_2$	$\max \Gamma$
0.1	0.1	0.1	0.05	0.2037E-02	0.6160E-03	0.2988E-02	0.8632E-03	0.1050E-01
0.05	0.05	0.05	0.025	0.1242E-02	0.3371E-03	0.1568E-02	0.3994E-03	0.5245E-02
0.025	0.025	0.025	0.0125	0.6791E-03	0.1763E-03	0.8020E-03	0.1920E-03	0.2622E-02

Погрешность $L_2$								
$h_{x_1}$	$h_{x_2}$	$h_{y_1}$	$h_{y_2}$	$L_2 (\Omega_1)$	$L_2 (\frac{1}{2} \Omega_1)$	$L_2 (\Omega_2)$	$L_2 (\frac{1}{2} \Omega_2)$	$L_2 (\Gamma) ^*$
0.1	0.1	0.1	0.05	0.2215E-02	0.1885E-03	0.1067E-02	0.2666E-03	0.2191E-02
0.05	0.05	0.05	0.025	0.7731E-03	0.9443E-04	0.5382E-03	0.1124E-03	0.7591E-03
0.025	0.025	0.025	0.0125	0.2741E-03	0.4717E-04	0.2695E-03	0.5147E-04	0.2651E-03

# 1. Обсуждение задачи

