Симметрии в природе

Симметрии в физике

Симметрия в физике		
Преобразование	Соответствующая инвариантность	Соответствующий закон сохранения
↕ Трансляции времени	Однородность времени	...энергии
↔ Трансляции пространства	Однородность пространства	...импульса
↻ Вращения пространства	Изотропность пространства	...момента импульса
⇆ Группа Лоренца	Относительность Лоренц-инвариантность	...4-импульса
~ Калибровочное преобразование	Калибровочная инвариантность	...заряда

Возможности применения групп симметрий к решению ДУ

С помощью найденной полной группы симметрий ДУ можно:

- Строить новые решения системы по уже известным
- Использовать группы симметрий для классификации семейств ДУ, зависящих от произвольных параметров или функций
- Определять, какие типы ДУ допускают данную группу симметрий.

Класс инвариантных относительно группы решений включает в себя:

- классические автомодельные течения
- бегущие волны
- другие точные решения, имеющие непосредственное математическое или физическое значение (для многих нелинейных систем это единственные явные точные решения)

Возможности применения групп симметрий к решению ДУ

С помощью найденной полной группы симметрий ДУ можно:

- Строить новые решения системы по уже известным
- Использовать группы симметрий для классификации семейств ДУ, зависящих от произвольных параметров или функций
- Определять, какие типы ДУ допускают данную группу симметрий.

Класс инвариантных относительно группы решений включает в себя:

- классические автомодельные течения
- бегущие волны
- другие точные решения, имеющие непосредственное математическое или физическое значение (для многих нелинейных систем это единственные явные точные решения)

Возможности применения групп симметрий к решению ДУ

С помощью найденной полной группы симметрий ДУ можно:

- Строить новые решения системы по уже известным
- Использовать группы симметрий для классификации семейств ДУ, зависящих от произвольных параметров или функций
- Определять, какие типы ДУ допускают данную группу симметрий.

Класс инвариантных относительно группы решений включает в себя:

- классические автомодельные течения
- бегущие волны
- другие точные решения, имеющие непосредственное математическое или физическое значение (для многих нелинейных систем это единственные явные точные решения)

Возможности применения групп симметрий к решению ДУ

С помощью найденной полной группы симметрий ДУ можно:

- Строить новые решения системы по уже известным
- Использовать группы симметрий для классификации семейств ДУ, зависящих от произвольных параметров или функций
- Определять, какие типы ДУ допускают данную группу симметрий.

Класс инвариантных относительно группы решений включает в себя:

- классические автомодельные течения
- бегущие волны
- другие точные решения, имеющие непосредственное математическое или физическое значение (для многих нелинейных систем это единственные явные точные решения)

Возможности применения групп симметрий к решению ДУ

С помощью найденной полной группы симметрий ДУ можно:

- Строить новые решения системы по уже известным
- Использовать группы симметрий для классификации семейств ДУ, зависящих от произвольных параметров или функций
- Определять, какие типы ДУ допускают данную группу симметрий.

Класс инвариантных относительно группы решений включает в себя:

- классические автомодельные течения
- бегущие волны
- другие точные решения, имеющие непосредственное математическое или физическое значение (для многих нелинейных систем это единственные явные точные решения)

Возможности применения групп симметрий к решению ДУ

С помощью найденной полной группы симметрий ДУ можно:

- Строить новые решения системы по уже известным
- Использовать группы симметрий для классификации семейств ДУ, зависящих от произвольных параметров или функций
- Определять, какие типы ДУ допускают данную группу симметрий.

Класс инвариантных относительно группы решений включает в себя:

- классические автомодельные течения
- бегущие волны
- другие точные решения, имеющие непосредственное математическое или физическое значение (для многих нелинейных систем это единственные явные точные решения)

Возможности применения групп симметрий к решению ДУ

С помощью найденной полной группы симметрий ДУ можно:

- Строить новые решения системы по уже известным
- Использовать группы симметрий для классификации семейств ДУ, зависящих от произвольных параметров или функций
- Определять, какие типы ДУ допускают данную группу симметрий.

Класс инвариантных относительно группы решений включает в себя:

- классические автомодельные течения
- бегущие волны
- другие точные решения, имеющие непосредственное математическое или физическое значение (для многих нелинейных систем это единственные явные точные решения)

Возможности применения групп симметрий к решению ДУ

С помощью найденной полной группы симметрий ДУ можно:

- Строить новые решения системы по уже известным
- Использовать группы симметрий для классификации семейств ДУ, зависящих от произвольных параметров или функций
- Определять, какие типы ДУ допускают данную группу симметрий.

Класс инвариантных относительно группы решений включает в себя:

- классические автомодельные течения
- бегущие волны
- другие точные решения, имеющие непосредственное математическое или физическое значение (для многих нелинейных систем это единственные явные точные решения)

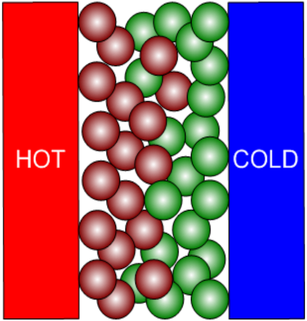
МОДЕЛИ ТЕРМОДИФФУЗИОННОЙ КОНВЕКЦИИ: СИММЕТРИИ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

И.В. Степанова

Институт вычислительного моделирования
СО РАН, г. Красноярск

Работа выполнена при финансовой поддержке Интеграционного проекта СО РАН №44

Типы конвекции



Конвекция – перемещение макроскопических частей среды (газа, жидкости), приводящее к переносу массы, теплоты и других физических величин.

Термодиффузия – перенос компонент газовых смесей или растворов под влиянием градиента температуры.

Модель вибрационной конвекции

Рассмотрим бинарную смесь с уравнением состояния

$$\rho = \rho_0(1 - \beta_T T - \beta_C C),$$

Осредненные уравнения движения в приближении Обербека–Буссинеска имеют вид

$$\begin{aligned}
&\partial_t \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\rho_0^{-1}\nabla p + \nu\nabla^2\boldsymbol{u} - (\beta_T T + \beta_C C)\,\mathbf{g} + \\
&\qquad + \frac{(A\omega)^2}{2}\big(((\beta_T T + \beta_C C)\,\mathbf{e} - \nabla\Phi) \cdot \nabla\big)\nabla\Phi, \\
&\partial_t T + \boldsymbol{u} \cdot \nabla T = \chi\nabla^2 T, \\
&\partial_t C + \boldsymbol{u} \cdot \nabla C = D\nabla^2 C + D^T\nabla^2 T, \\
&\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0, \\
&\nabla^2\Phi - (\beta_T\nabla T + \beta_C\nabla C) \cdot \mathbf{e} = 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

Результат групповой классификации уравнений (1)

Основная алгебра			$X_0,\ H_i,\ H_0,\ H_\Phi,\ U_T,\ U_C$			
D_T	β_T	β_C	$\mathbf{g}\times\mathbf{e}\neq 0$	$\mathbf{g}\times\mathbf{e}=0$, $\mathbf{g}\neq 0$	$\mathbf{g}=0$	Дополнительные операторы
0	0	$\neq 0$	T^1	$T^1,\ X_R$	$T^1,\ X_R,\ Z_C$	$T^2\ (D=\chi)$
0	$\neq 0$	0	C^1	$C^1,\ X_R$	$C^1,\ X_R,\ Z_T$	$C^2\ (D=\chi)$
0	$\neq 0$	$\neq 0$	—	X_R	$X_R,\ Z$	$R_1,\ R_2\ (D=\chi)$
$\neq 0$	0	$\neq 0$	—	X_R	$X_R,\ Z$	—
$\neq 0$	$\neq 0$	0	L	$L,\ X_R$	$L,\ X_R,$ $Z_T^*\ (D\neq\chi)$	$Z\ (D=\chi)$
$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	—	X_R	$X_R,$ $Z\ (D_T\neq D_T^*)$	$R_1,$ $Z_C^*\ (D_T=D_T^*)$

Обозначения операторов

$$H_\Phi(\varphi(t)) = \varphi(t)\frac{\partial}{\partial \Phi}, \qquad Z_0 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3}\left(x^i\frac{\partial}{\partial x^i} - u^i\frac{\partial}{\partial u^i}\right) - 2p\frac{\partial}{\partial p},$$

$$U_T = -\rho_0\beta_T\left(\mathrm{g}_1x^1 + \mathrm{g}_2x^2 + \mathrm{g}_3x^3\right)\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial T} + \beta_T\left(\mathrm{e}_1x^1 + \mathrm{e}_2x^2 + \mathrm{e}_3x^3\right)\frac{\partial}{\partial \Phi},$$

$$U_C = -\rho_0\beta_C\left(\mathrm{g}_1x^1 + \mathrm{g}_2x^2 + \mathrm{g}_3x^3\right)\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial C} + \beta_C\left(\mathrm{e}_1x^1 + \mathrm{e}_2x^2 + \mathrm{e}_3x^3\right)\frac{\partial}{\partial \Phi},$$

$$T^1 = T\frac{\partial}{\partial T}, \qquad T^2 = C\frac{\partial}{\partial T}, \qquad C^1 = C\frac{\partial}{\partial C}, \qquad C^2 = T\frac{\partial}{\partial C},$$

$$Z_T = Z_0 - T^1, \qquad Z_C = Z_0 - C^1, \qquad Z = Z_0 - T^1 - C^1,$$

$$Z_T^* = Z_T + \frac{D_T}{D-\chi}C^2, \quad Z_C^* = Z_C - \frac{D_T}{D-\chi}C^2, \quad L = (D_TT + (D-\chi)C)\frac{\partial}{\partial C},$$

$$R_1 = T^1 - \frac{\beta_T}{\beta_C}C^2, \quad R_2 = C^1 - \frac{\beta_C}{\beta_T}T^2, \quad X_R = \mathrm{e}_3X_{12} - \mathrm{e}_2X_{13} + \mathrm{e}_1X_{23}.$$

Вид инвариантного решения

Инвариантное решение осредненных уравнений строится относительно подалгебры

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad H_2(1) = \frac{\partial}{\partial x^2}, \qquad H_0(1) = \frac{\partial}{\partial p},$$

$$H_3(1) + \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{Gr\,Sc}} U_C = \frac{\partial}{\partial x^3} + \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{Gr\,Sc}} \left(-x^3 \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial C} + x^3 \frac{\partial}{\partial \Phi} \right).$$

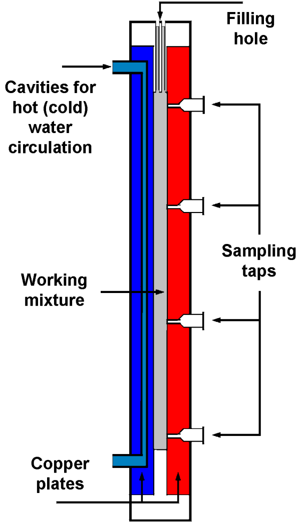
Операторы записаны в безразмерных переменных. Соответствующее решение имеет вид

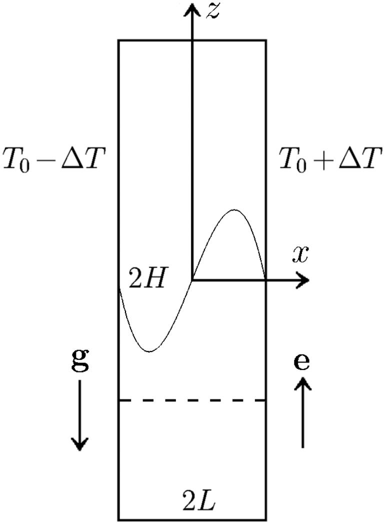
$$u^1 = u(x), \qquad u^2 = v(x), \qquad u^3 = w(x), \qquad p = p(x, z),$$

$$T = T(x), \qquad C = c(x) + \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{Gr\,Sc}}\, z, \qquad \Phi = \varphi(x) + \frac{\mathrm{R}}{2\mathrm{Gr\,Sc}}\, z^2,$$

где использованы стандартные обозначения координат $x^1 = x$, $x^3 = z$.

Термодиффузионная колонна





Граничные условия

Зададим граничные условия на боковых стенках колонны:

$$x = \pm 1: \qquad w = 0, \qquad \Theta = \pm 1, \qquad \frac{\partial c}{\partial x} - \psi \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

Расход жидкости через любое поперечное сечение колонны должны быть равны нулю, а средняя концентрация по колонне должна оставаться неизменной:

$$\int_{-1}^{1} w\,dx = 0, \qquad \int_{-1}^{1} c\,dx = 0.$$

Для определения градиента концентрации задается условие

$$\frac{\mathrm{Gr}^2}{2}\int_{-1}^{1} c\,w\,dx - \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{Sc}^2} = 0.$$

Безразмерные параметры

$\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\chi}$ — характеризует влияние свойств теплоносителя на теплоотдачу.

$\mathrm{Sc} = \frac{\nu}{D}$ — характеризует роль молекулярных переносов количества движения и переноса массы примеси диффузией.

$\mathrm{Gr} = \frac{g\beta_T \Delta T L^3}{\nu^2}$ — определяет процесс теплообмена при свободном движении в поле гравитации.

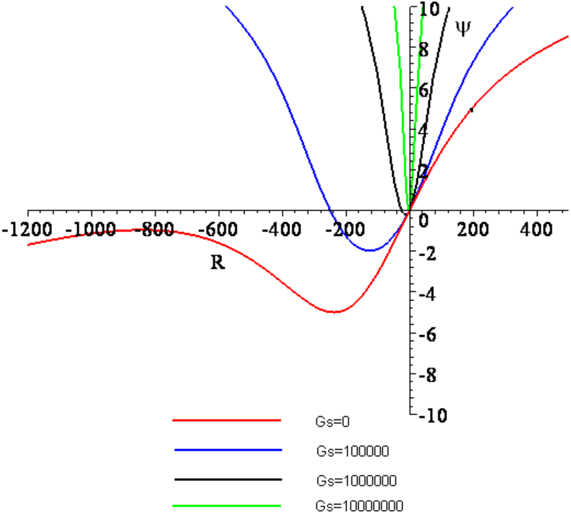
$\mathrm{Gs} = \frac{(A\omega\beta_T \Delta T L)^2}{2\nu\chi}$ — характеризует вибрационное воздействие.

$\psi = -\frac{D^T\beta_C}{D\beta_T}$— отношение разделения, описывает эффект термодиффузии.

$\mathrm{R} = g\beta_C B L^4/\nu D$ — концентрационное число Рэлея, определенное по постоянному вертикальному градиенту концентрации B.

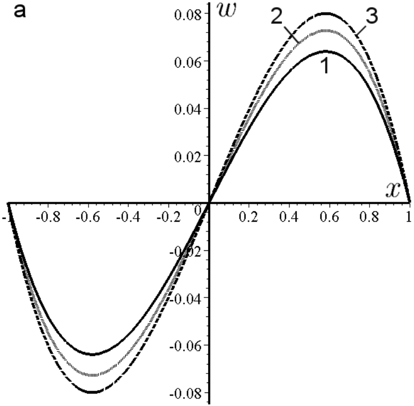
Зависимость между концентрационным числом Рэлея R и отношением разделения ψ

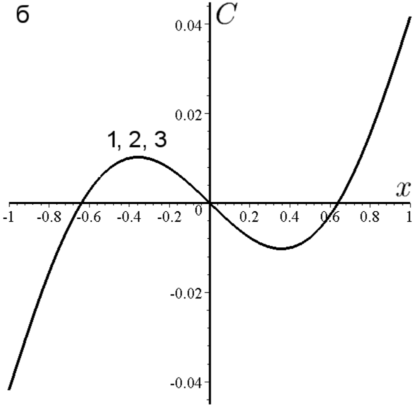
Параметры расчета Pr = 10, Sc = 1000, Gr = 50.



Скорость и концентрация при различных числах Gs

Параметры смеси вода (90%) – этанол (10%), $\psi = 0.14$, $\mathrm{Pr} = 22.53$, $\mathrm{Sc} = 2493$. C — концентрация этанола.





Математические модели конвекции

- Приближение Обербека–Буссинеска для однородной жидкости
  Уравнение состояния
  $$\rho = \rho_0(1 - \beta_T T)$$
- Приближение Обербека–Буссинеска для смеси
  Уравнение состояния
  $$\rho = \rho_0(1 - \beta_T T - \beta_C C)$$
- Модель микроконвекции
  Уравнение состояния
  $$\rho = \rho_0(1 - \beta_T T)^{-1}$$
- Уравнение состояния пресной воды вблизи температуры максимальной плотности
  $$\rho = 999.975[1 - 6.8 \times 10^{-6}(T - 3.98)^2]$$
- Уравнение состояния морской воды Гебхарта–Моллендорфа
  $$\rho = \rho_m(C,p)[1 - \alpha(C,p)(T - T_m(C,p))^{q(C,p)}]$$

Уравнения конвекции с произвольной силой плавучести

Уравнение состояния

$$\rho = \rho_0 F(T, C)$$

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = -\rho_0^{-1}\nabla p + \nu\triangle\boldsymbol{u} + F(T,\ C)\,\mathbf{g},\\
&T_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla T = \chi\triangle T,\\
&C_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla C = D\triangle C + D^T\triangle T,\\
&\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Пусть $\nu \neq 0,\ \chi \neq 0,\ \ D \neq 0,\ \ D^T \neq 0,\ \ \chi \neq D$, тогда имеет место замена переменных

$$p = \rho_0 u^4,\ \ T = \frac{\chi - D}{D^T}u^5,\ \ C = u^5 + u^6.$$

Результат групповой классификации системы (2)

Результат решения задачи групповой классификации для преобразованной системы (2): 43 представителя функции $F(u^5, u^6)$ и наборы соответствующих операторов:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial t}, \quad \varphi(t)\frac{\partial}{\partial u^4}, \quad x^1\frac{\partial}{\partial x^2} - x^2\frac{\partial}{\partial x^1} + u^1\frac{\partial}{\partial u^2} - u^2\frac{\partial}{\partial u^1}, \\
h^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i} + h^i_t(t)\frac{\partial}{\partial u^i} - x^i h^i_{tt}(t)\frac{\partial}{\partial u^4}, \ i = 1, 2, 3, \\
2t\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3}\left(x^i\frac{\partial}{\partial x^i} - u^i\frac{\partial}{\partial u^i}\right) - 2u^4\frac{\partial}{\partial u^4}, \\
x^3\frac{\partial}{\partial u^4}, \quad u^5\frac{\partial}{\partial u^5}, \quad \frac{\partial}{\partial u^5}, \quad u^6\frac{\partial}{\partial u^6}, \quad \frac{\partial}{\partial u^6}.
\end{gathered}
$$

Вид инвариантного решения

Для функции $F(u^5, u^6) = u^6 + f(u^5)$ решение, инвариантное относительно действия операторов

$$\partial_t, \quad \partial_{x^2}, \quad \partial_{x^3} + A(x^3\partial_{u^4} + \partial_{u^6}),$$

ищем в виде

$$u^1 = u^1(x^1),\ u^2 = u^2(x^1),\ u^3 = u^3(x^1),\ u^4 = P(x^1) + A(x^3)^2/2,$$

$$u^5 = \theta(x^1),\ u^6 = K(x^1) + Ax^3,$$

здесь A — постоянная.

Граничные условия

Граничные условия на стенках $x = \pm 1$ в безразмерных переменных

$$w = 0, \quad u^5 = \pm\bar{\theta},$$

$$\frac{\partial c}{\partial x} + \mathrm{Le}\frac{\partial u^5}{\partial x} = 0,$$

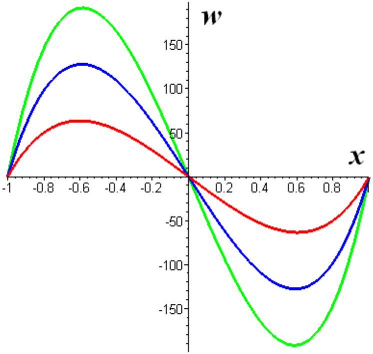
$\bar{\theta} = \frac{\theta D^T}{(\chi - D)}$ — безразмерная температура нагретой стенки,
$\mathrm{Le} = \frac{\chi}{D}$ — число Льюиса.
Исходные уравнения сводятся к системе

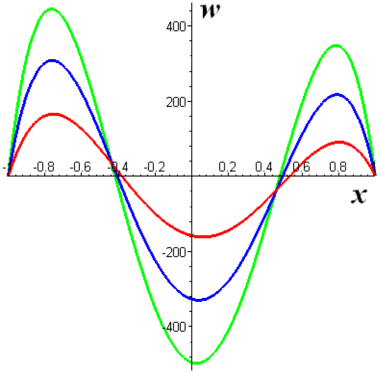
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - c - f(u^5), \quad \frac{\partial^2 u^5}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \mathrm{R}w = 0.$$

Кроме заданных граничных условий, считается, что выполнены соотношения

$$\int\limits_{-1}^{1} w\,dx = 0, \quad \int\limits_{-1}^{1} c\,dx = 2c_0, \quad \mathrm{Ga}^2\int\limits_{-1}^{1}(u^5 + c)w\,dx + \frac{2\mathrm{R}}{\mathrm{Sc}^2}dx = 0.$$

Функция скорости для линейного и квадратичного распределения плотности





Параметры задачи:
$\mathrm{Pr} = 10$, $\mathrm{Sc} = 10^3$, $\mathrm{Ga} = 10^4$, $\bar{\theta} = 10$, $T_0 = 100, 200, 300$.

Заключение

- С помощью методов группового анализа исследована система уравнений вибрационной конвекции, найдены группы преобразований в зависимости от физических параметров, входящих в систему.
- Построено точное решение, описывающее разделение бинарной смеси в термодиффузионной колонне под действием продольных вибраций и градиента концентрации.
- Решена задача групповой классификации для уравнений термодиффузии бинарной смеси относительно функции, отвечающей за силу плавучести.
- Построено точное решение, описывающее течение бинарной смеси с нелинейным уравнением состояния в вертикальном слое под действием градиента концентрации.

Спасибо за внимание