

Автоматизированные технологии построения неструктурированных расчетных сеток

Ю.В.Василевский

ИВМ РАН

18 сентября, 2013

Автоматизированные технологии построения неструктурированных расчетных сеток

Ю.В.Василевский, А.А.Данилов, К.Н.Липников, В.Н.Чугунов

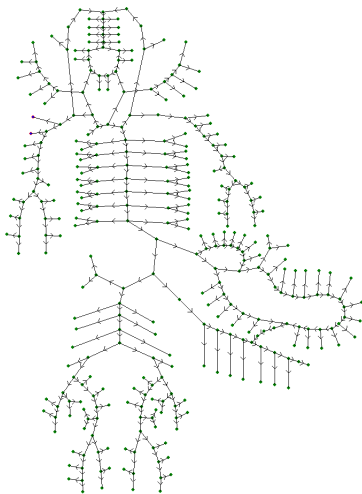
М.:Физматлит, 2013

опыт создания и использования пакетов Ani2D, Ani3D

Введение и основные понятия

Примеры неструктурированных сеток

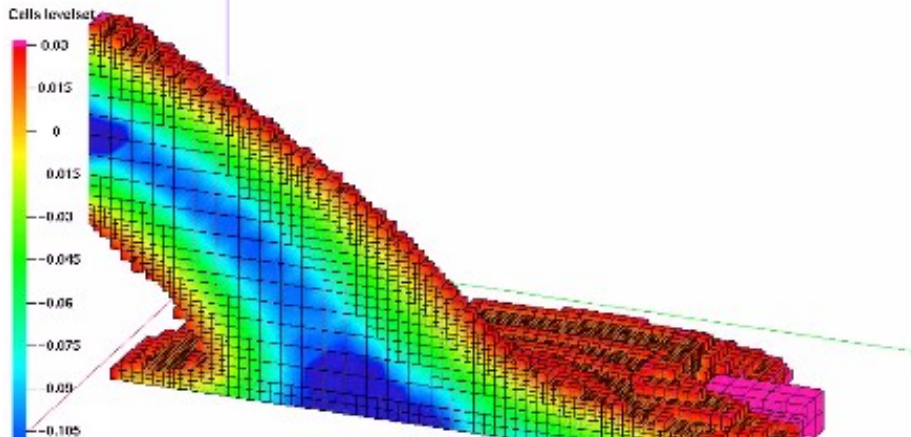
Сетки на графе



Т.Добросердова

Примеры неструктурированных сеток

Сетки типа восьмеричное дерево



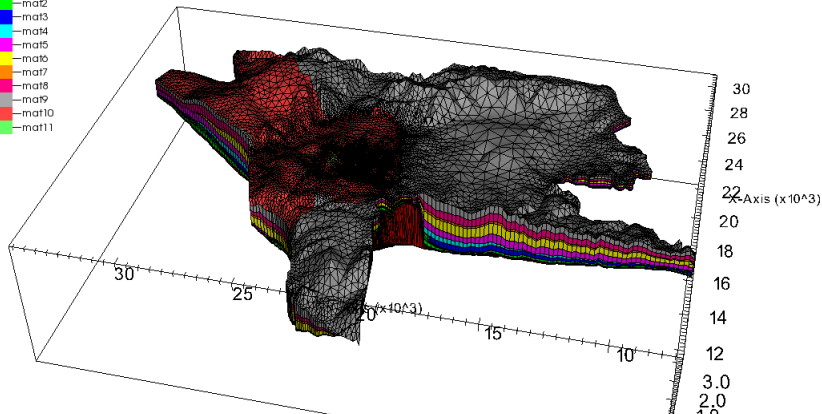
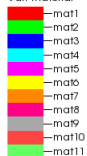
Примеры неструктурированных сеток

Треугольно-призматические сетки

DB: mesh.gmv
Cycle: 0 Time:0

Mesh
Var: mesh

Filled Boundary
Var: material



Примеры неструктурированных сеток

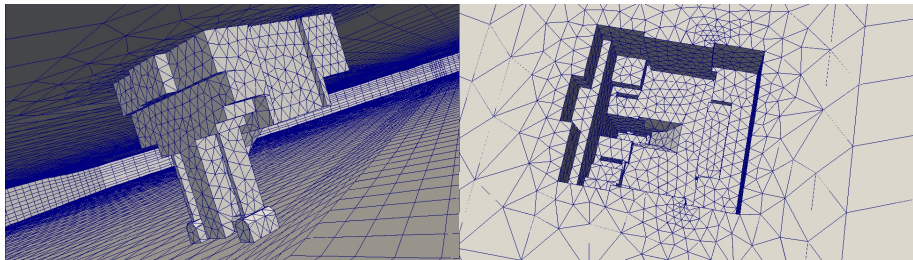
Тетраэдральные (симплициальные) сетки



А.Данилов

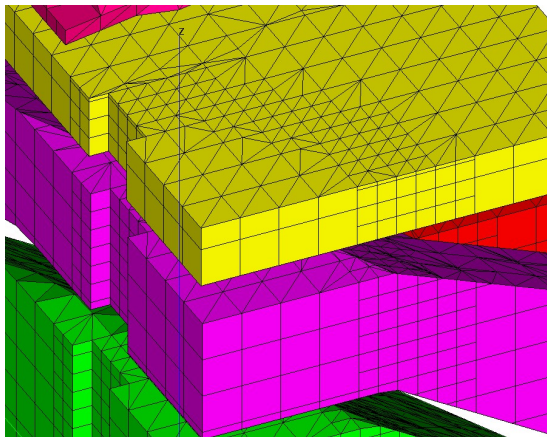
Примеры неструктурированных сеток

Гибридные (смешанные) сетки



Примеры неструктурированных сеток

Сетки со сколотыми ячейками (многогранные сетки)



О чем и для кого эта книга?

О чем:

- набор алгоритмов для надежного построения 2D и 3D симплициальных сеток в областях сложной формы

О чем и для кого эта книга?

О чем:

- набор алгоритмов для надежного построения 2D и 3D симплициальных сеток в областях сложной формы

Аудитория:

- разработчики СИА
- инженеры
- специалисты по построению расчетных сеток

- представлены все этапы технологической цепочки построения СЕТКИ (задание области, ..., улучшение, адаптация)
- рассматриваются автоматизированные технологии надежной генерации сеток
- детальное описание используемых алгоритмов
- удобное пособие для пользователей нашего программного обеспечения и для разработчиков новых библиотек

- представлены все этапы технологической цепочки построения СЕТКИ (задание области, ..., улучшение, адаптация)
- рассматриваются автоматизированные технологии надежной генерации сеток
- детальное описание используемых алгоритмов
- удобное пособие для пользователей нашего программного обеспечения и для разработчиков новых библиотек

- представлены все этапы технологической цепочки построения СЕТКИ (задание области, ..., улучшение, адаптация)
- рассматриваются автоматизированные технологии надежной генерации сеток
- детальное описание используемых алгоритмов
- удобное пособие для пользователей нашего программного обеспечения и для разработчиков новых библиотек

- представлены все этапы технологической цепочки построения СЕТКИ (задание области, ..., улучшение, адаптация)
- рассматриваются автоматизированные технологии надежной генерации сеток
- детальное описание используемых алгоритмов
- удобное пособие для пользователей нашего программного обеспечения и для разработчиков новых библиотек

Ani2D

www.sf.net/projects/ani2d

5600 закачек

Ani3D

www.sf.net/projects/ani3d

3400 закачек

К.Липников, ЮВ, А.Данилов, В.Чугунов, С.Горейнов, К.Никитин, А.Вершинин, А.Пленкин,
А.Чернышенко

Альтернатива: FreeFEM (F.Hecht)

- области могут быть заданы различными способами
- методы локального многоуровневого измельчения сетки
- многоуровневое локальное разгрубление обеспечивает динамически адаптируемые сетки
- перестроение последовательностью локальных модификаций сетки (анизотропия, исправление и распутывание)
- управление свойствами сеток (тензорные и скалярные функции, апостериорные оценки ошибки)

- области могут быть заданы различными способами
- методы локального многоуровневого измельчения сетки
- многоуровневое локальное разгрубление обеспечивает динамически адаптируемые сетки
- перестроение последовательностью локальных модификаций сетки (анизотропия, исправление и распутывание)
- управление свойствами сеток (тензорные и скалярные функции, апостериорные оценки ошибки)

- области могут быть заданы различными способами
- методы локального многоуровневого измельчения сетки
- многоуровневое локальное разгрубление обеспечивает динамически адаптируемые сетки
- перестроение последовательностью локальных модификаций сетки (анизотропия, исправление и распутывание)
- управление свойствами сеток (тензорные и скалярные функции, апостериорные оценки ошибки)

- области могут быть заданы различными способами
- методы локального многоуровневого измельчения сетки
- многоуровневое локальное разгрубление обеспечивает динамически адаптируемые сетки
- перестроение последовательностью локальных модификаций сетки (анизотропия, исправление и распутывание)
- управление свойствами сеток (тензорные и скалярные функции, апостериорные оценки ошибки)

- области могут быть заданы различными способами
- методы локального многоуровневого измельчения сетки
- многоуровневое локальное разгрубление обеспечивает динамически адаптируемые сетки
- перестроение последовательностью локальных модификаций сетки (анизотропия, исправление и распутывание)
- управление свойствами сеток (тензорные и скалярные функции, апостериорные оценки ошибки)

Примеры расчетных сеток

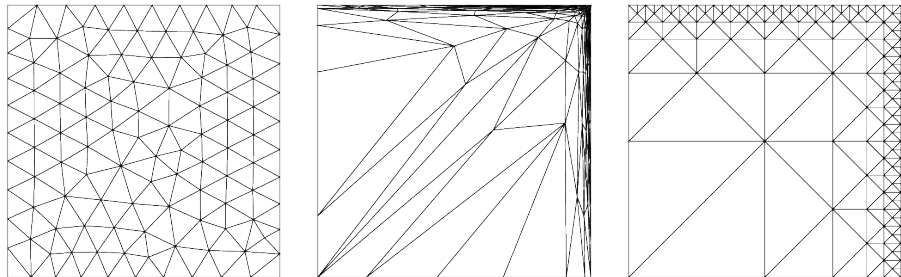
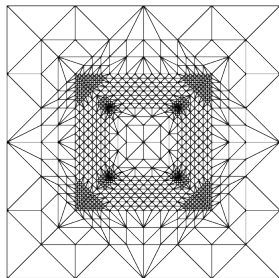


Рис.: регулярная неструктурированная, анизотропная, иерархическая сетки.

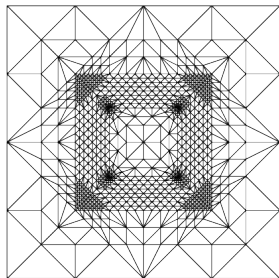
Типы адаптации для симплициальных сеток

Типы адаптации для симплицальных сеток

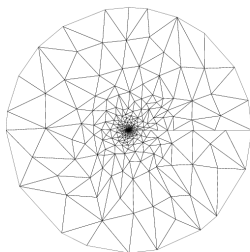


иерархическая

Типы адаптации для симплициальных сеток

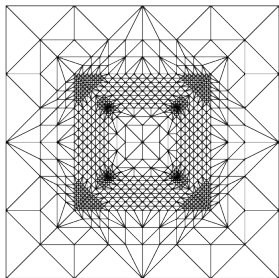


иерархическая

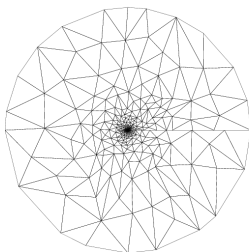


регулярная

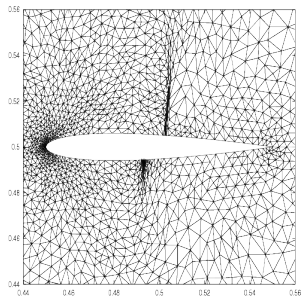
Типы адаптации для симплиціальных сеток



иерархическая



регулярная



анизотропная

- Структурированные / неструктурированные / упорядоченные / связные списки
- Алгоритмы быстрого поиска / вставки / удаления в связных списках
- Алгоритмы быстрой локализации элементов сетки с помощью деревьев

- Структурированные / неструктурированные / упорядоченные / связные списки
- Алгоритмы быстрого поиска / вставки / удаления в связных списках
- Алгоритмы быстрой локализации элементов сетки с помощью деревьев

- Структурированные / неструктурированные / упорядоченные / связные списки
- Алгоритмы быстрого поиска / вставки / удаления в связных списках
- Алгоритмы быстрой локализации элементов сетки с помощью деревьев

Построение неструктурированных сеток в произвольных областях

Построение неструктурированных сеток в произвольных областях

- метод продвигаемого фронта / метод триангуляции Делоне / их комбинация
- сетки на плоскости, на поверхности, в пространстве
- вычислительная сложность и надежность алгоритмов
- постпроцессирование: улучшение качества поверхностной/пространственной сетки

Построение неструктурированных сеток в произвольных областях

- метод продвигаемого фронта / метод триангуляции Делоне / их комбинация
- сетки на плоскости, на поверхности, в пространстве
- вычислительная сложность и надежность алгоритмов
- постпроцессирование: улучшение качества поверхностной/пространственной сетки

Построение неструктурированных сеток в произвольных областях

- метод продвигаемого фронта / метод триангуляции Делоне / их комбинация
- сетки на плоскости, на поверхности, в пространстве
- вычислительная сложность и надежность алгоритмов
- постпроцессирование: улучшение качества поверхностной/пространственной сетки

Построение неструктурированных сеток в произвольных областях

- метод продвигаемого фронта / метод триангуляции Делоне / их комбинация
- сетки на плоскости, на поверхности, в пространстве
- вычислительная сложность и надежность алгоритмов
- постпроцессирование: улучшение качества поверхностной/пространственной сетки

Перестроение поверхностной сетки

Выделенный полигон

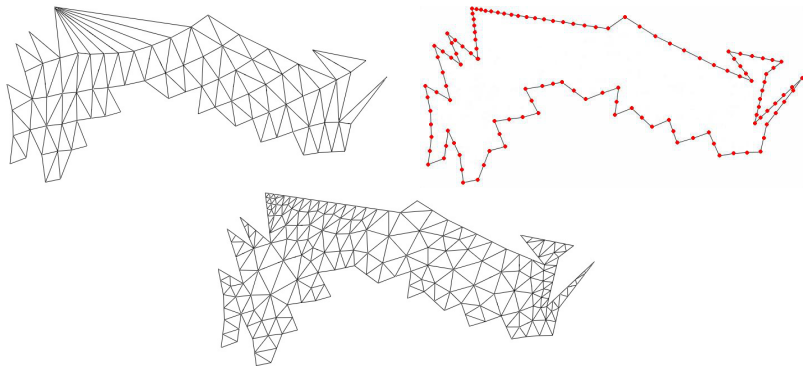


Рис.: исходная сетка в полигоне, новое разбиение границы полигона, новая сетка в полигоне.

Перестроение поверхностной сетки

Результат

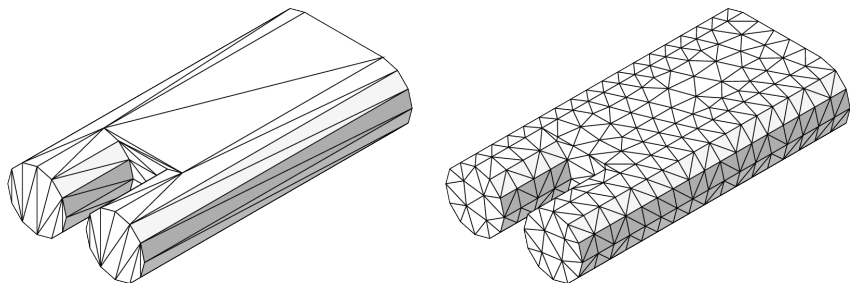
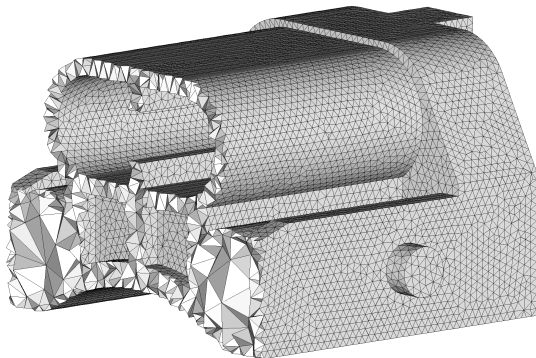


Рис.: Поверхностная сетка, экспортированная из САПР, (слева) и улучшенная поверхностная сетка (справа).

Построение сетки для области, заданной в САПР

Разрез тетраэдральной сетки



Построение сетки для области, заданной в САПР

Распределение качества тетраэдров

Таблица: (Ф) алгоритм продвигаемого фронта; (Д) устойчивый алгоритм на основе тетраэдризации Делоне; (ПС) улучшение сетки путем ее перестроения с сохранением заданного следа на границе.

	$Q(\Omega^h)$	N_t	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
Ф	$7.03 \cdot 10^{-4}$	158548	157091	1430	26	1	0	0
Ф+Д	$1.12 \cdot 10^{-6}$	159828	157693	1821	244	36	28	6
Ф+Д+ПС	$1.10 \cdot 10^{-2}$	176764	177690	74	0	0	0	0

Общее время работы (мин.) 5.53

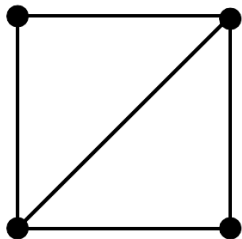
Построение поверхностной сетки — 3.23

Построение объемной сетки — 1.37

Улучшение сетки — 0.08

Многоуровневое иерархическое измельчение и разгрубление сетки

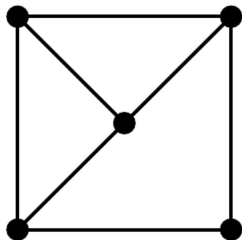
Измельчение бисекцией по помеченному ребру обеспечение конформности сетки



- Начальная сетка
- Бисекция треугольника
- Восстановление конформности
(разбить те треугольники, где она потеряна)

E. Bänsh, Local mesh refinement in 2 and 3 dimensions. IMPACT of Computing in Science and Engrg., 1991, V.3, p.181–191.

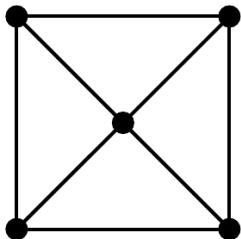
Измельчение бисекцией по помеченному ребру обеспечение конформности сетки



- Начальная сетка
- **Бисекция треугольника**
- Восстановление конформности
(разбить те треугольники, где она потеряна)

E. Bänsh, Local mesh refinement in 2 and 3 dimensions. IMPACT of Computing in Science and Engrg., 1991, V.3, p.181–191.

Измельчение бисекцией по помеченному ребру обеспечение конформности сетки

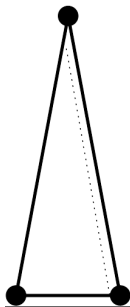


- Начальная сетка
- Бисекция треугольника
- Восстановление конформности
(разбить те треугольники, где она потеряна)

E. Bänsh, Local mesh refinement in 2 and 3 dimensions. IMPACT of Computing in Science and Engrg., 1991, V.3, p.181–191.

Измельчение бисекцией по помеченному ребру

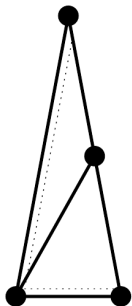
Метод Бэнша



- Треугольник и помеченное ребро
- Первая бисекция и новые помеченные ребра
- Вторая бисекция и новые помеченные ребра

Измельчение бисекцией по помеченному ребру

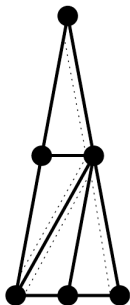
Метод Бэнша



- Треугольник и помеченное ребро
- Первая бисекция и новые помеченные ребра
- Вторая бисекция и новые помеченные ребра

Измельчение бисекцией по помеченному ребру

Метод Бэнша



- Треугольник и помеченное ребро
- Первая бисекция и новые помеченные ребра
- **Вторая бисекция и новые помеченные ребра**

Измельчение бисекцией по помеченному ребру

Последовательность измельченных триангуляций



- Регулярность сохранена: минимальный угол уменьшается не более чем в 2 раза
- Многоуровневая бисекция тетраэдральных сеток (ani3D)

Измельчение бисекцией по помеченному ребру

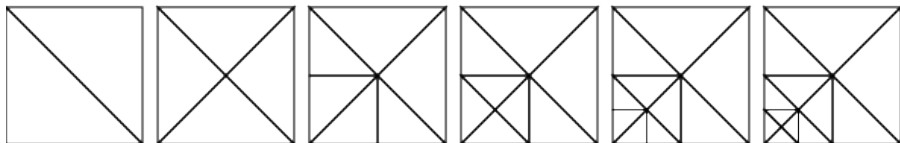
Последовательность измельченных триангуляций



- Регулярность сохранена: минимальный угол уменьшается не более чем в 2 раза
- Многоуровневая бисекция тетраэдральных сеток (ani3D)

Измельчение бисекцией по помеченному ребру

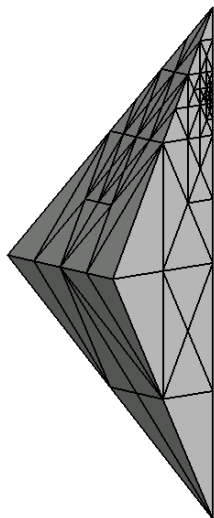
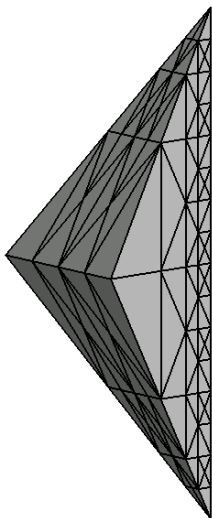
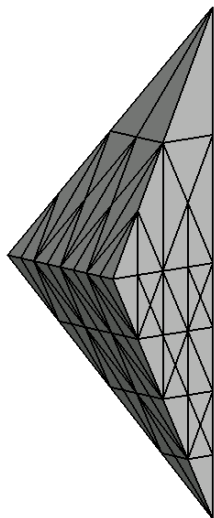
Последовательность измельченных триангуляций



- Регулярность сохранена: минимальный угол уменьшается не более чем в 2 раза
- Многоуровневая бисекция тетраэдральных сеток (ani3D)

Измельчение бисекцией по помеченному ребру

Примеры измельченных тетраэдризаций



Разгрубление измельченных триангуляций

- Только измельченная ячейка может быть огрублена
- Только ячейки одного уровня измельчения могут быть объединены
- После огрубления должна быть обеспечена конформность
- Должна храниться история измельчений

Разгрубление измельченных триангуляций

- Только измельченная ячейка может быть огрублена
- Только ячейки одного уровня измельчения могут быть объединены
- После огрубления должна быть обеспечена конформность
- Должна храниться история измельчений

Разгрубление измельченных триангуляций

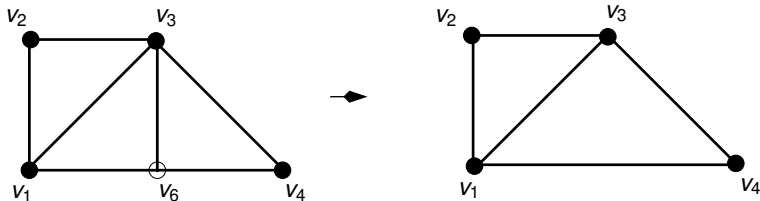
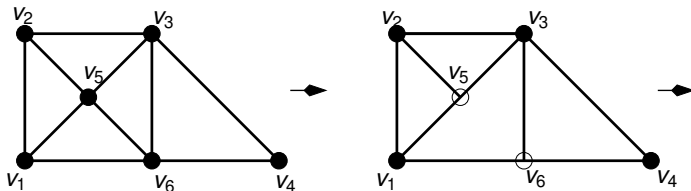
- Только измельченная ячейка может быть огрублена
- Только ячейки одного уровня измельчения могут быть объединены
- После огрубления должна быть обеспечена конформность
- Должна храниться история измельчений

Разгрубление измельченных триангуляций

- Только измельченная ячейка может быть огрублена
- Только ячейки одного уровня измельчения могут быть объединены
- После огрубления должна быть обеспечена конформность
- Должна храниться история измельчений

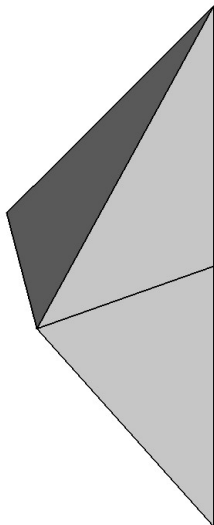
- Только измельченная ячейка может быть огрублена
- Только ячейки одного уровня измельчения могут быть объединены
- После огрубления должна быть обеспечена конформность
- Должна храниться история измельчений

Разгружение измельченных триангуляций



Генерация динамических сеток

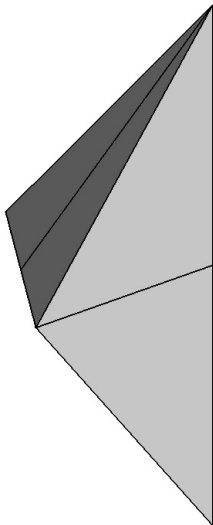
Алгоритм бисекции помеченного ребра



библиотека AniRCB из пакета Ani3D

Генерация динамических сеток

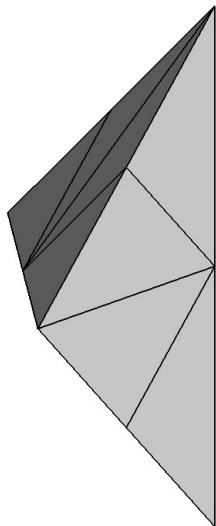
Алгоритм бисекции помеченного ребра



библиотека AniRCB из пакета Ani3D

Генерация динамических сеток

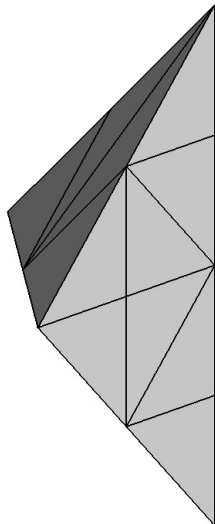
Алгоритм бисекции помеченного ребра



библиотека AniRCB из пакета Ani3D

Генерация динамических сеток

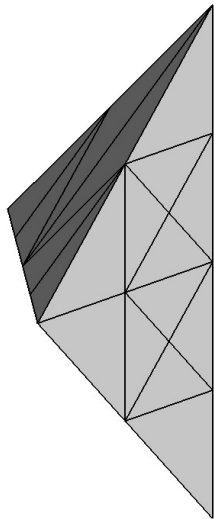
Алгоритм бисекции помеченного ребра



библиотека AniRCB из пакета Ani3D

Генерация динамических сеток

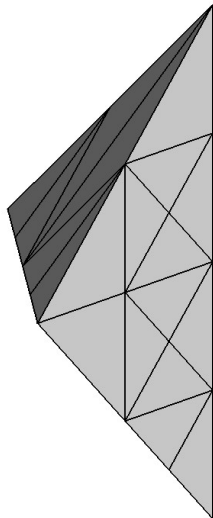
Алгоритм бисекции помеченного ребра



библиотека [AniRCSB](#) из пакета [Ani3D](#)

Генерация динамических сеток

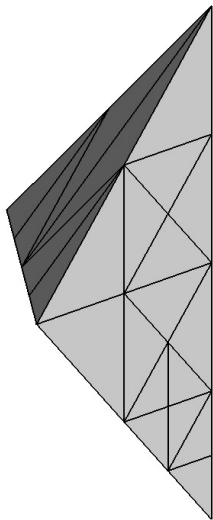
Алгоритм бисекции помеченного ребра



библиотека AniRCSB из пакета Ani3D

Генерация динамических сеток

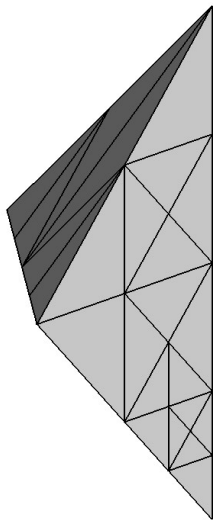
Алгоритм бисекции помеченного ребра



библиотека AniRCSB из пакета Ani3D

Генерация динамических сеток

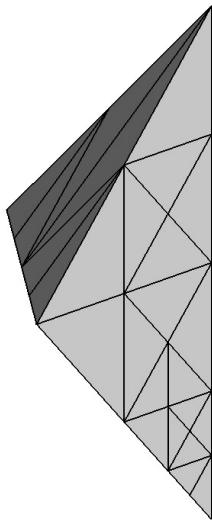
Алгоритм бисекции помеченного ребра



библиотека [AniRCSB](#) из пакета [Ani3D](#)

Генерация динамических сеток

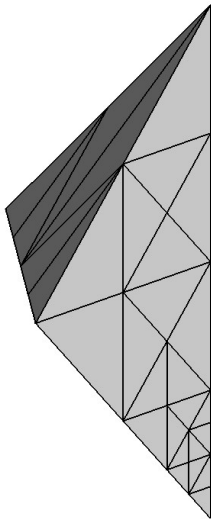
Алгоритм бисекции помеченного ребра



библиотека AniRCB из пакета Ani3D

Генерация динамических сеток

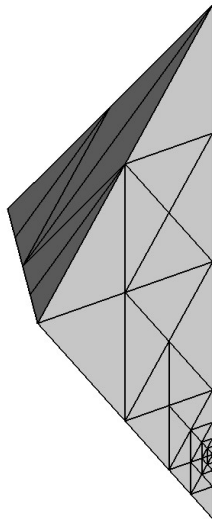
Алгоритм бисекции помеченного ребра



библиотека AniRCSB из пакета Ani3D

Генерация динамических сеток

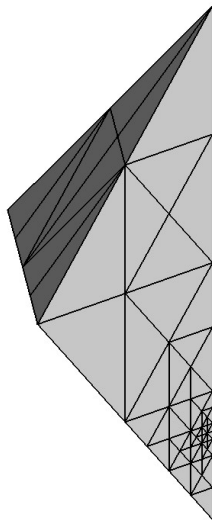
Алгоритм бисекции помеченного ребра



библиотека AniRCSB из пакета Ani3D

Генерация динамических сеток

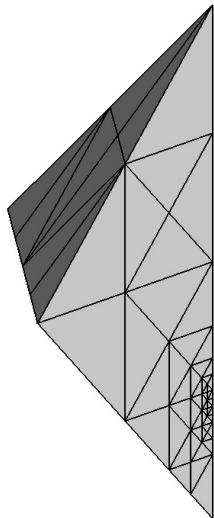
Алгоритм бисекции помеченного ребра



библиотека [AniRCSB](#) из пакета [Ani3D](#)

Генерация динамических сеток

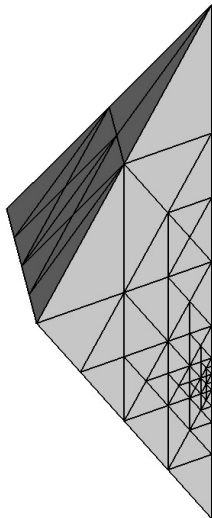
Алгоритм бисекции помеченного ребра



библиотека [AniRCSB](#) из пакета [Ani3D](#)

Генерация динамических сеток

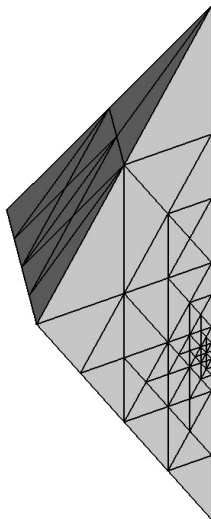
Алгоритм бисекции помеченного ребра



библиотека [AniRCSB](#) из пакета [Ani3D](#)

Генерация динамических сеток

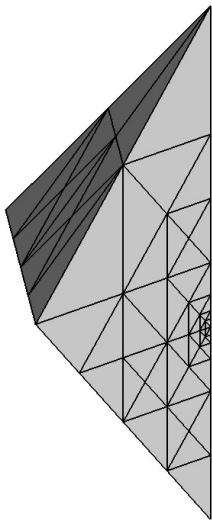
Алгоритм бисекции помеченного ребра



библиотека [AniRCSB](#) из пакета [Ani3D](#)

Генерация динамических сеток

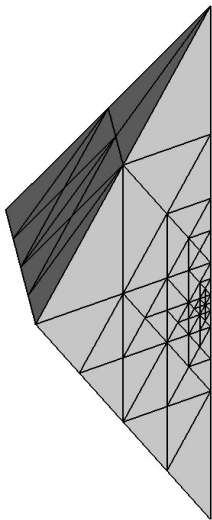
Алгоритм бисекции помеченного ребра



библиотека AniRCSB из пакета Ani3D

Генерация динамических сеток

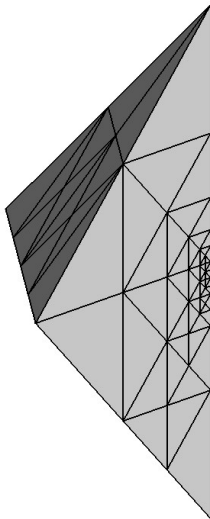
Алгоритм бисекции помеченного ребра



библиотека AniRCB из пакета Ani3D

Генерация динамических сеток

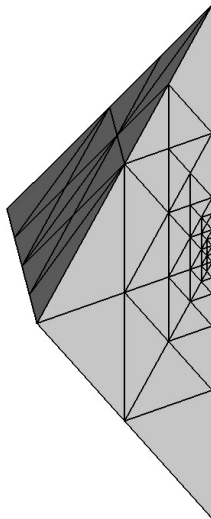
Алгоритм бисекции помеченного ребра



библиотека [AniRCSB](#) из пакета [Ani3D](#)

Генерация динамических сеток

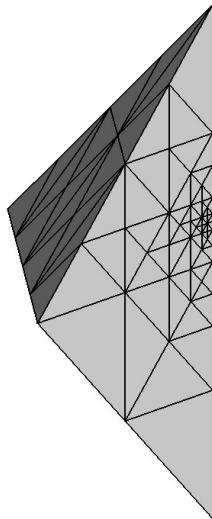
Алгоритм бисекции помеченного ребра



библиотека AniRCB из пакета Ani3D

Генерация динамических сеток

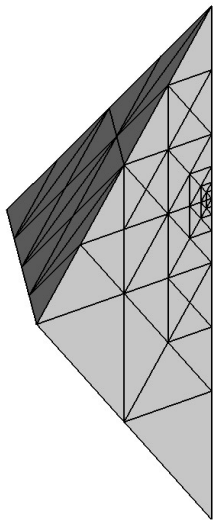
Алгоритм бисекции помеченного ребра



библиотека AniRCB из пакета Ani3D

Генерация динамических сеток

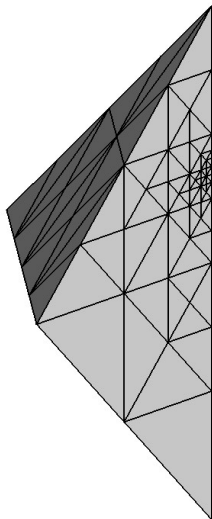
Алгоритм бисекции помеченного ребра



библиотека AniRCSB из пакета Ani3D

Генерация динамических сеток

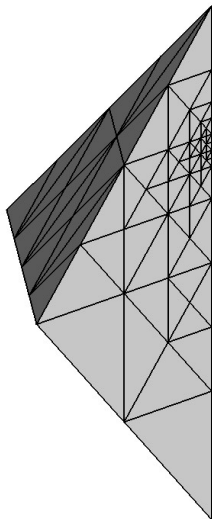
Алгоритм бисекции помеченного ребра



библиотека AniRCSB из пакета Ani3D

Генерация динамических сеток

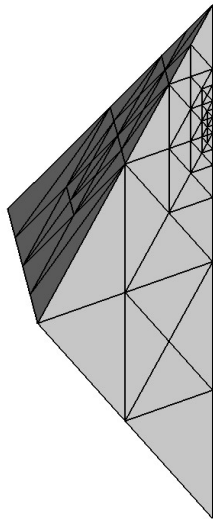
Алгоритм бисекции помеченного ребра



библиотека AniRCSB из пакета Ani3D

Генерация динамических сеток

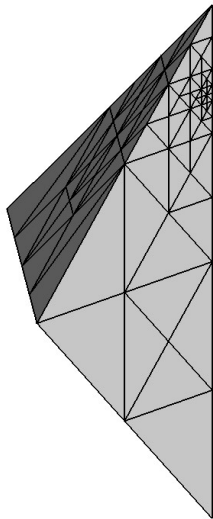
Алгоритм бисекции помеченного ребра



библиотека AniRCSB из пакета Ani3D

Генерация динамических сеток

Алгоритм бисекции помеченного ребра



библиотека [AniRCSB](#) из пакета [Ani3D](#)

Перестроение симплициальных сеток посредством локальных модификаций

Перестроение сеток посредством локальных модификаций

- Локальность — ключ к разработке надежных и эффективных алгоритмов:
 - можно выбрать лучший из нескольких вариантов изменения топологии
 - изменение сетки в пространственно несвязных местах требует меньшего числа локальных модификаций
- Выбор следующего модифицируемого элемента с целью монотонного увеличения качества сетки
- Дополнительные функции:
 - построение треугольных и тетраэдральных сеток,
 - распутывание сетки,
 - построение сетки с заданными свойствами,
 - адаптация (включая анизотропную) сетки

Перестроение сеток посредством локальных модификаций

- Локальность — ключ к разработке надежных и эффективных алгоритмов:
 - можно выбрать лучший из нескольких вариантов изменения топологии
 - изменение сетки в пространственно несвязных местах требует меньшего числа локальных модификаций
- Выбор следующего модифицируемого элемента с целью монотонного увеличения качества сетки
- Дополнительные функции:
 - построение треугольных и тетраэдральных сеток,
 - распутывание сетки,
 - построение сетки с заданными свойствами,
 - адаптация (включая анизотропную) сетки

Перестроение сеток посредством локальных модификаций

- Локальность — ключ к разработке надежных и эффективных алгоритмов:
 - можно выбрать лучший из нескольких вариантов изменения топологии
 - изменение сетки в пространственно несвязных местах требует меньшего числа локальных модификаций
- Выбор следующего модифицируемого элемента с целью монотонного увеличения качества сетки
- Дополнительные функции:
 - построение треугольных и тетраэдральных сеток,
 - распутывание сетки,
 - построение сетки с заданными свойствами,
 - адаптация (включая анизотропную) сетки

Перестроение сеток посредством локальных модификаций

- Локальность — ключ к разработке надежных и эффективных алгоритмов:
 - можно выбрать лучший из нескольких вариантов изменения топологии
 - изменение сетки в пространственно несвязных местах требует меньшего числа локальных модификаций
- Выбор следующего модифицируемого элемента с целью монотонного увеличения качества сетки
- Дополнительные функции:
 - построение треугольных и тетраэдральных сеток,
 - распутывание сетки,
 - построение сетки с заданными свойствами,
 - адаптация (включая анизотропную) сетки

Перестроение сеток посредством локальных модификаций

- Локальность — ключ к разработке надежных и эффективных алгоритмов:
 - можно выбрать лучший из нескольких вариантов изменения топологии
 - изменение сетки в пространственно несвязных местах требует меньшего числа локальных модификаций
- Выбор следующего модифицируемого элемента с целью монотонного увеличения качества сетки
- Дополнительные функции:
 - построение треугольных и тетраэдральных сеток,
 - распутывание сетки,
 - построение сетки с заданными свойствами,
 - адаптация (включая анизотропную) сетки

Перестроение сеток посредством локальных модификаций

- Локальность — ключ к разработке надежных и эффективных алгоритмов:
 - можно выбрать лучший из нескольких вариантов изменения топологии
 - изменение сетки в пространственно несвязных местах требует меньшего числа локальных модификаций
- Выбор следующего модифицируемого элемента с целью монотонного увеличения качества сетки
- Дополнительные функции:
 - построение треугольных и тетраэдральных сеток,
 - распутывание сетки,
 - построение сетки с заданными свойствами,
 - адаптация (включая анизотропную) сетки

Перестроение сеток посредством локальных модификаций

- Локальность — ключ к разработке надежных и эффективных алгоритмов:
 - можно выбрать лучший из нескольких вариантов изменения топологии
 - изменение сетки в пространственно несвязных местах требует меньшего числа локальных модификаций
- Выбор следующего модифицируемого элемента с целью монотонного увеличения качества сетки
- Дополнительные функции:
 - построение треугольных и тетраэдральных сеток,
 - распутывание сетки,
 - построение сетки с заданными свойствами,
 - адаптация (включая анизотропную) сетки

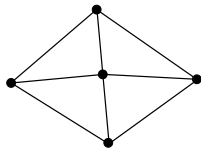
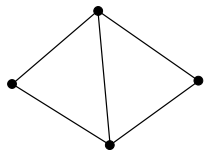
Перестроение сеток посредством локальных модификаций

- Локальность — ключ к разработке надежных и эффективных алгоритмов:
 - можно выбрать лучший из нескольких вариантов изменения топологии
 - изменение сетки в пространственно несвязных местах требует меньшего числа локальных модификаций
- Выбор следующего модифицируемого элемента с целью монотонного увеличения качества сетки
- Дополнительные функции:
 - построение треугольных и тетраэдральных сеток,
 - распутывание сетки,
 - построение сетки с заданными свойствами,
 - адаптация (включая анизотропную) сетки

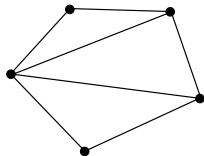
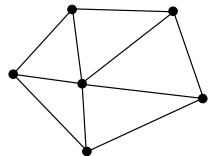
Перестроение сеток посредством локальных модификаций

- Локальность — ключ к разработке надежных и эффективных алгоритмов:
 - можно выбрать лучший из нескольких вариантов изменения топологии
 - изменение сетки в пространственно несвязных местах требует меньшего числа локальных модификаций
- Выбор следующего модифицируемого элемента с целью монотонного увеличения качества сетки
- Дополнительные функции:
 - построение треугольных и тетраэдральных сеток,
 - распутывание сетки,
 - построение сетки с заданными свойствами,
 - адаптация (включая анизотропную) сетки

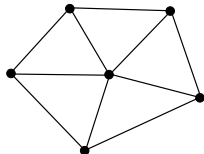
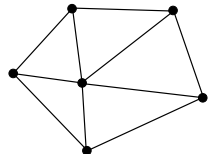
Локальные модификации в 2D



Op 1: вставка узла

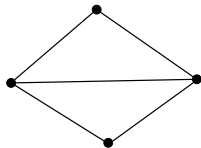
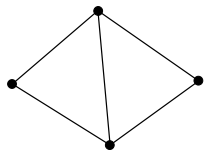


Op 2: удаление узла

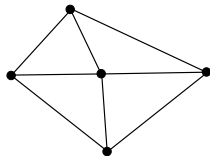
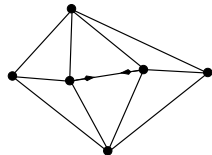


Op 3: сдвиг узла

Локальные модификации в 2D



Op 4: переброс ребра



Op 5: удаление ребра

Управление свойствами сеток

Что можно контролировать

- локальный размер симплексов (треугольников или тетраэдров),
- вытягивание симплексов в заданном направлении,
- контроль числа симплексов в сетке.

Что можно контролировать

- локальный размер симплексов (треугольников или тетраэдров),
- вытягивание симплексов в заданном направлении,
- контроль числа симплексов в сетке.

Что можно контролировать

- локальный размер симплексов (треугольников или тетраэдров),
- вытягивание симплексов в заданном направлении,
- контроль числа симплексов в сетке.

$$\mathfrak{M} = \begin{bmatrix} M_{xx} & M_{xy} \\ M_{yx} & M_{yy} \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{M}^T > 0$$

- площадь/объем области D :

$$|D|_{\mathfrak{M}} = \int_D \sqrt{\det \mathfrak{M}(x)} dx$$

- длина кривой ℓ :

$$|\ell|_{\mathfrak{M}} = \int_0^1 \sqrt{\gamma'(t)^T \mathfrak{M}(\gamma(t)) \gamma'(t)} dt$$

- для параметризованного ребра $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$:

$$|\mathbf{e}|_{\mathfrak{M}} = \int_0^1 \sqrt{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^T \mathfrak{M}(\gamma(t)) (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} dt$$

- “периметр”: $\rho_{\mathfrak{M}}(\Delta) = \sum_{k=1}^{n_{edges}} |\mathbf{e}_k|_{\mathfrak{M}}$

$$\mathfrak{M} = \begin{bmatrix} M_{xx} & M_{xy} \\ M_{yx} & M_{yy} \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{M}^T > 0$$

- площадь/объем области D :

$$|D|_{\mathfrak{M}} = \int_D \sqrt{\det \mathfrak{M}(x)} \, dx$$

- длина кривой ℓ :

$$|\ell|_{\mathfrak{M}} = \int_0^1 \sqrt{\gamma'(t)^T \mathfrak{M}(\gamma(t)) \gamma'(t)} \, dt$$

- для параметризованного ребра $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$:

$$|\mathbf{e}|_{\mathfrak{M}} = \int_0^1 \sqrt{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^T \mathfrak{M}(\gamma(t)) (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} \, dt$$

- “периметр”: $\rho_{\mathfrak{M}}(\Delta) = \sum_{k=1}^{n_{edges}} |\mathbf{e}_k|_{\mathfrak{M}}$

$$\mathfrak{M} = \begin{bmatrix} M_{xx} & M_{xy} \\ M_{yx} & M_{yy} \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{M}^T > 0$$

- площадь/объем области D :

$$|D|_{\mathfrak{M}} = \int_D \sqrt{\det \mathfrak{M}(x)} dx$$

- длина кривой ℓ :

$$|\ell|_{\mathfrak{M}} = \int_0^1 \sqrt{\gamma'(t)^T \mathfrak{M}(\gamma(t)) \gamma'(t)} dt$$

- для параметризованного ребра $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$:

$$|\mathbf{e}|_{\mathfrak{M}} = \int_0^1 \sqrt{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^T \mathfrak{M}(\gamma(t)) (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} dt$$

- “периметр”: $\rho_{\mathfrak{M}}(\Delta) = \sum_{k=1}^{n_{edges}} |\mathbf{e}_k|_{\mathfrak{M}}$

$$\mathfrak{M} = \begin{bmatrix} M_{xx} & M_{xy} \\ M_{yx} & M_{yy} \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{M}^T > 0$$

- площадь/объем области D :

$$|D|_{\mathfrak{M}} = \int_D \sqrt{\det \mathfrak{M}(x)} dx$$

- длина кривой ℓ :

$$|\ell|_{\mathfrak{M}} = \int_0^1 \sqrt{\gamma'(t)^T \mathfrak{M}(\gamma(t)) \gamma'(t)} dt$$

- для параметризованного ребра $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$:

$$|\mathbf{e}|_{\mathfrak{M}} = \int_0^1 \sqrt{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^T \mathfrak{M}(\gamma(t)) (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} dt$$

- “периметр”: $\rho_{\mathfrak{M}}(\Delta) = \sum_{k=1}^{n_{edges}} |\mathbf{e}_k|_{\mathfrak{M}}$

Идея: при заданном тензорном метрическом поле $\mathfrak{M}(\mathbf{x})$ и желаемом числе ячеек N_* мы строим \mathfrak{M} -квазиравномерную сетку с N_* ячейками посредством локальных модификаций.

- h_* — параметр шага \mathfrak{M} -квазиравномерной сетки с N_* ячейками:

$$h_* = \left(\frac{1}{N_* V_d} \int_{\Omega} \sqrt{\det(\mathfrak{M}(\mathbf{x}))} dV \right)^{1/d}.$$

- $F(\cdot)$ — гладкая положительная функция с единственным максимумом $F(1) = 1$

Качество сетки:

$$Q_{\mathfrak{M}, N_\star}(\Omega_h) = \min_{\Delta \in \Omega_h} Q_{\mathfrak{M}, N_\star}(\Delta)$$

- h_\star — параметр шага \mathfrak{M} -квазиравномерной сетки с N_\star ячейками:

$$h_\star = \left(\frac{1}{N_\star V_d} \int_{\Omega} \sqrt{\det(\mathfrak{M}(\mathbf{x}))} dV \right)^{1/d}.$$

- $F(\cdot)$ — гладкая положительная функция с единственным максимумом $F(1) = 1$

Качество сетки:

$$Q_{\mathfrak{M}, N_*}(\Omega_h) = \min_{\Delta \in \Omega_h} Q_{\mathfrak{M}, N_*}(\Delta)$$

Качество треугольника Δ в метрике \mathfrak{M} :

$$Q_{\mathfrak{M}, N_*}(\Delta) = 12\sqrt{3} \frac{\overset{\text{shape}}{|\Delta|_{\mathfrak{M}}}}{\rho_{\mathfrak{M}}(\Delta)^2} F\left(\overset{\text{size}}{\frac{\rho_{\mathfrak{M}}(\Delta)}{3h_*}}\right)$$

- h_* — параметр шага \mathfrak{M} -квазиравномерной сетки с N_* ячейками:

$$h_* = \left(\frac{1}{N_* V_d} \int_{\Omega} \sqrt{\det(\mathfrak{M}(\mathbf{x}))} dV \right)^{1/d}.$$

- $F(\cdot)$ — гладкая положительная функция с единственным максимумом $F(1) = 1$

Качество сетки:

$$Q_{\mathfrak{M}, N_\star}(\Omega_h) = \min_{\Delta \in \Omega_h} Q_{\mathfrak{M}, N_\star}(\Delta)$$

Качество тетраэдра Δ в метрике \mathfrak{M} :

$$Q_{\mathfrak{M}, N_\star}(\Delta) = 6^4 \sqrt{2} \frac{\overset{\text{shape}}{|\Delta|_{\mathfrak{M}}}}{\underset{\text{size}}{\rho_{\mathfrak{M}}(\Delta)^3}} F\left(\frac{\rho_{\mathfrak{M}}(\Delta)}{6h_\star}\right)$$

- h_\star — параметр шага \mathfrak{M} -квазиравномерной сетки с N_\star ячейками:

$$h_\star = \left(\frac{1}{N_\star V_d} \int_{\Omega} \sqrt{\det(\mathfrak{M}(\mathbf{x}))} dV \right)^{1/d}.$$

- $F(\cdot)$ — гладкая положительная функция с единственным максимумом $F(1) = 1$

\mathfrak{M} -квазиравномерная сетка

Определение. \mathfrak{M} -квазиравномерная сетка — сетка с N_* ячейками, с качеством $Q_{\mathfrak{M}, N_*}(\Omega_h) \geq Q_0 > 0$

\mathfrak{M} -квазиравномерная сетка

Определение. \mathfrak{M} -квазиравномерная сетка — сетка с N_* ячейками, с качеством $Q_{\mathfrak{M}, N_*}(\Omega_h) \geq Q_0 > 0$

$$\rho_{\mathfrak{M}}(\Delta) \sim |\Delta|_{\mathfrak{M}}^{1/d} \quad \forall \Delta \in \Omega_h$$

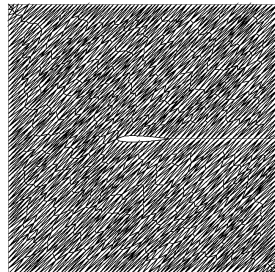
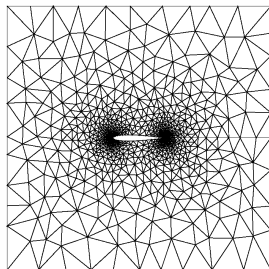
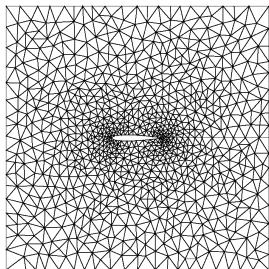
\mathfrak{M} -квазиравномерная сетка

Определение. \mathfrak{M} -квазиравномерная сетка — сетка с N_* ячейками, с качеством $Q_{\mathfrak{M}, N_*}(\Omega_h) \geq Q_0 > 0$

$$\rho_{\mathfrak{M}}(\Delta) \sim |\Delta|_{\mathfrak{M}}^{1/d} \quad \forall \Delta \in \Omega_h$$

\mathfrak{M} -квазиравномерная сетка строится из некоторой начальной сетки монотонным повышением качества $Q_{\mathfrak{M}, N_*}(\Omega_h)$ посредством набора локальных модификаций.

Примеры \mathfrak{M} -квазиравномерных сеток



$$h(\mathbf{x})^{-2} I_2$$

$$\max\{|(x - 0.4)^2 + (y - 0.5)^2 + 10^{-4}|^{a/2}, \\ |(x - 0.6)^2 + (y - 0.5)^2 + 10^{-4}|^{a/2}\}$$

$$R_{\pi/4} \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R_{\pi/4}^T$$

Приложение 3:
Адаптация к сеточному решению посредством
локальных модификаций

Приложение 3:

Адаптация к сеточному решению посредством локальных модификаций

Анизотропные ячейки
могут быть оптимальными
для минимизации интерполяционной ошибки
(в том числе и градиентной!)

- Оптимальная сетка – решение задачи интерполяции

$$\Omega_h^{opt} = \arg \min_{\Omega_h: N_T(\Omega_h) \leq N_*} \|u - \mathcal{P}_1^h(u)\|_{L_p(\Omega)}$$

где $N_T(\Omega_h)$ – число симплексов.

- Квази-оптимальная сетка – приближенное решение этой задачи
- Для $p > 0$ можно построить метрики $\mathfrak{M}_p, \tilde{\mathfrak{M}}_p$ такие, что для $\mathfrak{M}_p/\tilde{\mathfrak{M}}_p$ -квазиравномерных сеток:

$$\|u - \mathcal{P}_1^h(u)\|_{L_p(\Omega)} \sim \frac{|\Omega|_{\mathfrak{M}_p}}{N_T^{2/d}}$$

$$\|\nabla(u - \mathcal{P}_1^h(u))\|_{L_p(\Omega)} \sim \frac{|\Omega|_{\tilde{\mathfrak{M}}_p}}{N_T^{1/d}}$$

(квази-оптимальность)

- Критерий построения квази-оптимальной сетки

$$Q_{\mathfrak{M}, N_*}(\Omega_h) > Q_0.$$

- Оптимальная сетка – решение задачи интерполяции

$$\Omega_h^{opt} = \arg \min_{\Omega_h: N_T(\Omega_h) \leq N_*} \|u - \mathcal{P}_1^h(u)\|_{L_p(\Omega)}$$

где $N_T(\Omega_h)$ – число симплексов.

- Квази-оптимальная сетка – приближенное решение этой задачи
- Для $p > 0$ можно построить метрики $\mathfrak{M}_p, \tilde{\mathfrak{M}}_p$ такие, что для $\mathfrak{M}_p/\tilde{\mathfrak{M}}_p$ -квазиравномерных сеток:

$$\|u - \mathcal{P}_1^h(u)\|_{L_p(\Omega)} \sim \frac{|\Omega|_{\mathfrak{M}_p}}{N_T^{2/d}}$$

$$\|\nabla(u - \mathcal{P}_1^h(u))\|_{L_p(\Omega)} \sim \frac{|\Omega|_{\tilde{\mathfrak{M}}_p}}{N_T^{1/d}}$$

(квази-оптимальность)

- Критерий построения квази-оптимальной сетки

$$Q_{\mathfrak{M}, N_*}(\Omega_h) > Q_0.$$

- Оптимальная сетка – решение задачи интерполяции

$$\Omega_h^{opt} = \arg \min_{\Omega_h: N_T(\Omega_h) \leq N_*} \|u - \mathcal{P}_1^h(u)\|_{L_p(\Omega)}$$

где $N_T(\Omega_h)$ – число симплексов.

- Квази-оптимальная сетка – приближенное решение этой задачи
- Для $p > 0$ можно построить метрики $\mathfrak{M}_p, \widetilde{\mathfrak{M}}_p$ такие, что для $\mathfrak{M}_p/\widetilde{\mathfrak{M}}_p$ -квазиравномерных сеток:

$$\|u - \mathcal{P}_1^h(u)\|_{L_p(\Omega)} \sim \frac{|\Omega|_{\mathfrak{M}_p}}{N_T^{2/d}}$$

$$\|\nabla(u - \mathcal{P}_1^h(u))\|_{L_p(\Omega)} \sim \frac{|\Omega|_{\widetilde{\mathfrak{M}}_p}}{N_T^{1/d}}$$

(квази-оптимальность)

- Критерий построения квази-оптимальной сетки

$$Q_{\mathfrak{M}, N_*}(\Omega_h) > Q_0.$$

- Оптимальная сетка – решение задачи интерполяции

$$\Omega_h^{opt} = \arg \min_{\Omega_h: N_T(\Omega_h) \leq N_*} \|u - \mathcal{P}_1^h(u)\|_{L_p(\Omega)}$$

где $N_T(\Omega_h)$ – число симплексов.

- Квази-оптимальная сетка – приближенное решение этой задачи
- Для $p > 0$ можно построить метрики $\mathfrak{M}_p, \widetilde{\mathfrak{M}}_p$ такие, что для $\mathfrak{M}_p/\widetilde{\mathfrak{M}}_p$ -квазиравномерных сеток:

$$\|u - \mathcal{P}_1^h(u)\|_{L_p(\Omega)} \sim \frac{|\Omega|_{\mathfrak{M}_p}}{N_T^{2/d}}$$

$$\|\nabla(u - \mathcal{P}_1^h(u))\|_{L_p(\Omega)} \sim \frac{|\Omega|_{\widetilde{\mathfrak{M}}_p}}{N_T^{1/d}}$$

(квази-оптимальность)

- Критерий построения квази-оптимальной сетки

$$Q_{\mathfrak{M}, N_*}(\Omega_h) > Q_0.$$

Адаптивный алгоритм построения квази-оптимальной сетки

- 1: Построить начальную сетку Ω_h , решить кр.задачу, (оценить ошибку), построить непрерывную **тензорную метрику** \mathfrak{M} .
- 2: loop
- 3: Построить **\mathfrak{M} -квазиравномерную** сетку Ω_h .
- 4: Решить кр.задачу (оценить ошибку), построить непрерывную **тензорную метрику** \mathfrak{M} .
- 5: Если Ω_h **\mathfrak{M} -квазиравномерна**, то выйти из цикла.
- 6: end loop

Восстановление тензорной метрики из оценок ошибки на ребрах

Интерполяционная ошибка на квадратичных функциях

Рассмотрим

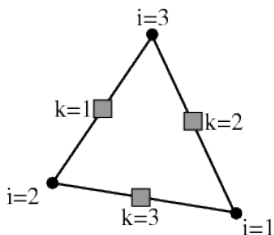
$$u_2 \in \mathcal{P}_2(\Delta).$$

Определим линейные и квадратичные (пузыри) КЭ функции:

$$\lambda_i(x), \quad b_k(x)$$

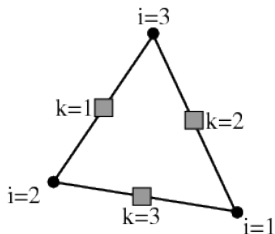
$\mathcal{I}_1 u_2$ – линейный интерполянт

$$\mathcal{I}_1 u_2 = \sum_{i=1}^3 \lambda_i(x) u_2(a_i)$$



Интерполяционная ошибка на квадратичных функциях

Ошибка линейной интерполяции:



где

$$\begin{aligned} e_2 &= u_2 - \mathcal{I}_1 u_2 \\ &= \sum_{k=1}^{\#edges} (u_2 - \mathcal{I}_1 u_2)(c_k) b_k \\ &\equiv \sum_{k=1}^{\#edges} \gamma_k b_k, \end{aligned}$$

$$\gamma_k = (u_2 - \mathcal{I}_1 u_2)(c_k)$$

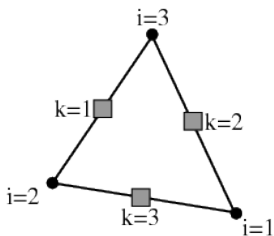
Интерполяционная ошибка на квадратичных функциях

Норма ошибки:

$$\|\mathbf{e}_2\|_2^2 \equiv \int_{\Delta} |\mathbf{e}_2|^2 = |\Delta| (\mathbb{B}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})$$

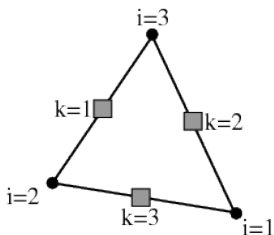
где $|\Delta|\mathbb{B}$ – матрица Грамма для пузыря:

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{n_d} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B}_{k,l} = \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} b_k b_l \, dx$$



Интерполяционная ошибка на квадратичных функциях

Представим норму ошибки:



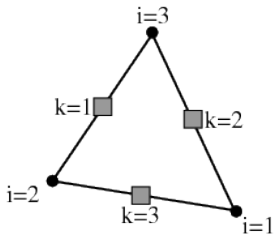
$$\|\mathbf{e}_2\|_2 = |\Delta|^{1/2} \sum_{k=1}^{\#edges} \alpha_k \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\#edges} \alpha_k = (\mathbb{B}\gamma, \gamma)^{1/2}$$

$$\alpha_k = |\gamma_k| (\mathbb{B}\gamma, \gamma)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\#edges} |\gamma_k| \right)^{-1}$$

балансируют $\|\mathbf{e}_2\|_{L^\infty}$ по всем ребрам Δ .

Интерполяционная ошибка на квадратичных функциях

По значениям α_k на ребрах строим метрику \mathfrak{M} :



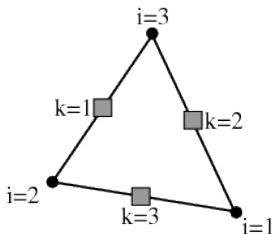
$$\left(\frac{d!}{(d+1)(d+2)} \right)^{1/d} |\Delta|_{\mathfrak{M}}^{2/d} \leq \sum_{k=1}^{\#edges} \alpha_k \leq |\partial\Delta|_{\mathfrak{M}}^2,$$

в которой объем и периметр симплекса контролирует ошибку $\|\mathbf{e}_2\|_2$.

Балансировка (минимизация) ошибки
 \Updownarrow
построение \mathfrak{M} -квазиравномерной сетки

Интерполяционная ошибка на квадратичных функциях

По значениям α_k на ребрах строим метрику \mathfrak{M} :



$$\left(\frac{d!}{(d+1)(d+2)} \right)^{1/d} |\Delta|_{\mathfrak{M}}^{2/d} \leq \sum_{k=1}^{\#edges} \alpha_k \leq |\partial\Delta|_{\mathfrak{M}}^2,$$

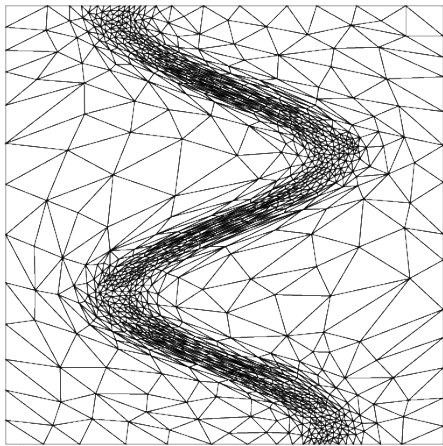
в которой объем и периметр симплекса контролирует ошибку $\|e_2\|_2$.

Балансировка (минимизация) ошибки
 \Updownarrow
построение \mathfrak{M} -квазиравномерной сетки

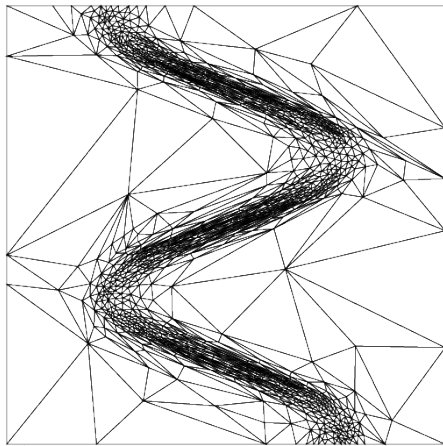
Обобщения на случаи $\|e_2\|_p$, $\|\nabla e_2\|_p$, $u \in C^2(\Omega)$

A-V СМАМЕ, A-L-V ЖВМиМФ

$$u(x, y) = x^2y + y^3 + \tanh(6(\sin(5y) - 2x)), \quad \Omega = (-1, 1)^2$$



сетка Ω^L для $\|e\|_\infty$



сетка Ω^H для $\|\nabla e\|_\infty$

# elements, N_h	$\ \mathbf{e}\ _{\infty, \Omega^L}$	$\ \nabla \mathbf{e}\ _{\infty, \Omega^H}$
1000	4.57e-2	6.00e-0
4000	1.26e-2	2.84e-0
16000	3.35e-3	1.38e-0
64000	8.63e-4	7.28e-1
rate	0.95	0.51

Теория дает N_h^{-1} для $\|\mathbf{e}\|_{\infty}$ и $N_h^{-1/2}$ для $\|\nabla \mathbf{e}\|_{\infty}$

Восстановление тензорной метрики
из апостериорной оценки ошибки на ребрах
для приближенного решения краевых задач

$$A_{LL}u_L^* = f_L \quad \begin{bmatrix} A_{LL} & A_{LQ} \\ A_{QL} & A_{QQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_L \\ u_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_L \\ f_Q \end{bmatrix}$$

$$A_{LL}u_L^* = f_L \quad \begin{bmatrix} A_{LL} & A_{LQ} \\ A_{QL} & A_{QQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_L \\ u_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_L \\ f_Q \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{LL} & A_{LQ} \\ A_{QL} & A_{QQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_L \\ d_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_L - A_{LL}u_L^* \\ f_Q - A_{QL}u_L^* \end{bmatrix}$$

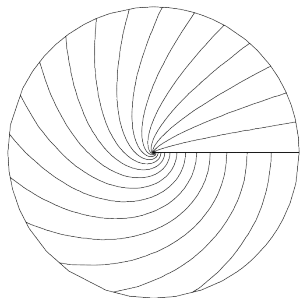
$$d_L = u_L - u_L^*, \quad d_Q = u_Q$$

$$A_{LL}u_L^* = f_L \quad \begin{bmatrix} A_{LL} & A_{LQ} \\ A_{QL} & A_{QQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_L \\ u_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_L \\ f_Q \end{bmatrix}$$

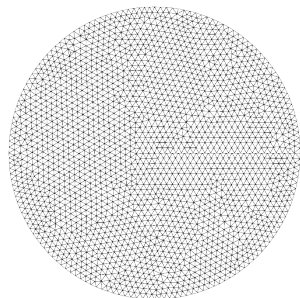
$$\begin{bmatrix} A_{LL} & 0 \\ 0 & A_{QQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{d}_L \\ \tilde{d}_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_L - A_{LL}u_L^* \\ f_Q - A_{QL}u_L^* \end{bmatrix}$$

$\tilde{d}_Q|_{e_k}$ заменяет реберную интерполяционную ошибку γ_k

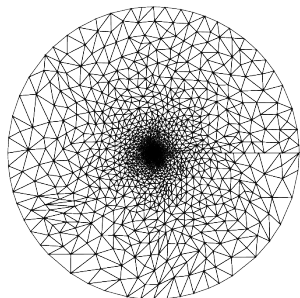
$$u(r, \theta) = r^{1/4} \sin(\theta/4), \quad \theta \in [0, 2\pi).$$



$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{в } \Omega \setminus S, \\ u &= \sin \frac{\theta}{4} && \text{на } \partial\Omega \setminus S, \\ u &= 0 && \text{на } S^+, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \end{aligned}$$



N_T	$\ \nabla \tilde{d}_{h,Q}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ \nabla d_{h,Q}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ \nabla e\ _{L^2(\Omega)}$
1000	1.02e-1	1.08e-1	1.09e-1
4000	5.20e-2	5.42e-2	5.38e-2
16000	2.62e-2	2.72e-2	2.73e-2
64000	1.30e-2	1.36e-2	1.52e-2
rate	0.50	0.50	0.47



N_T	$\ \nabla \tilde{d}_{h,Q}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ \nabla d_{h,Q}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ \nabla e\ _{L^2(\Omega)}$
1000	1.02e-1	1.08e-1	1.09e-1
4000	5.20e-2	5.42e-2	5.38e-2
16000	2.62e-2	2.72e-2	2.73e-2
64000	1.30e-2	1.36e-2	1.52e-2
rate	0.50	0.50	0.47

Автоматизированные технологии построения неструктурированных расчетных сеток

Ю.В.Василевский, А.А.Данилов, К.Н.Липников, В.Н.Чугунов

М.:Физматлит, 2013

опыт создания и использования пакетов Ani2D, Ani3D