

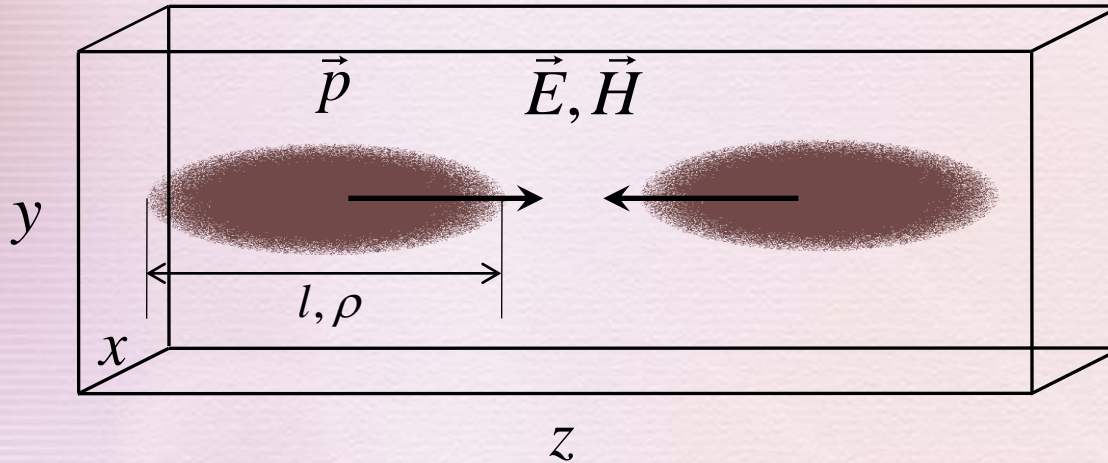
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН
Новосибирск, Россия

Исследование неявной схемы для решения уравнений Максвелла в плоских трехмерных областях

Боронина М.А., Вшивков В.А.

XVI Всероссийская конференция-школа молодых исследователей
"Современные проблемы математического моделирования", Дюрсо, 14-19 сентября 2015

Постановка задачи



International Linear Collider

$$\sigma_x \approx 5 \text{ nm}$$

$$\sigma_y \approx 0.5 - 1.0 \text{ } \mu\text{m}$$

$$\sigma_z \approx 300 \text{ } \mu\text{m}$$

$$\sigma_x : \sigma_y : \sigma_z = 1 : 100 - 200 : 600000$$

$$Q \approx 10^{10} e$$

Уравнения

$$\frac{\partial f_{e^{+,-}}}{\partial t} + \vec{v}_{e^{+,-}} \frac{\partial f_{e^{+,-}}}{\partial \vec{r}} + \vec{F}_{e^{+,-}} \frac{\partial f_{e^{+,-}}}{\partial \vec{p}} = 0$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{div} \vec{E} = 4\pi(n_{e^-} e^- + n_{e^+} e^+)$$

$$\text{div} \vec{H} = 0$$

$$\frac{d\vec{p}_{e^{+,-}}}{dt} = \vec{F}_{e^{+,-}}$$

$$\frac{d\vec{r}_{e^{+,-}}}{dt} = \vec{v}_{e^{+,-}}$$

$$n_{e^{+,-}} = \int_{V_p} f_{e^{+,-}} d\vec{p}$$

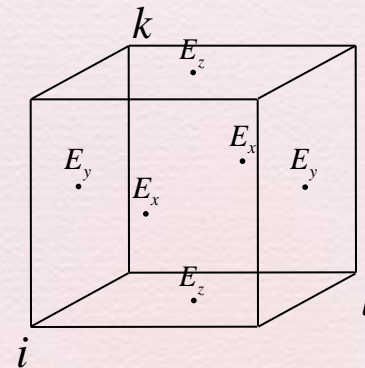
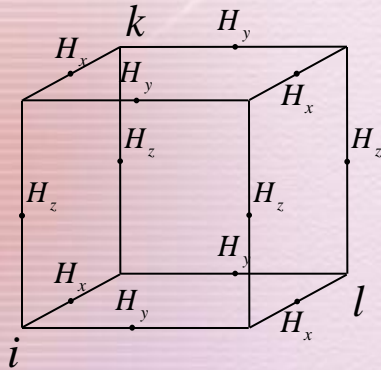
$$\vec{j} = \int_{V_p} (f_{e^+} \vec{v}_{e^+} e^+ + f_{e^-} \vec{v}_{e^-} e^-) d\vec{p}$$

$$\vec{F}_{e^{+,-}} = q_{e^{+,-}} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v}_{e^{+,-}}, \vec{H}] \right)$$

$$\vec{p}_{e^{+,-}} = \gamma_{e^{+,-}} m_e \vec{v}_{e^{+,-}}$$

$$\gamma_{e^{+,-}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{e^{+,-}}^2}{c^2}}}$$

Конечно-разностные схемы



$$\frac{H^{m+\frac{1}{2}} - H^{m-\frac{1}{2}}}{\tau} = -rot_h E^m$$

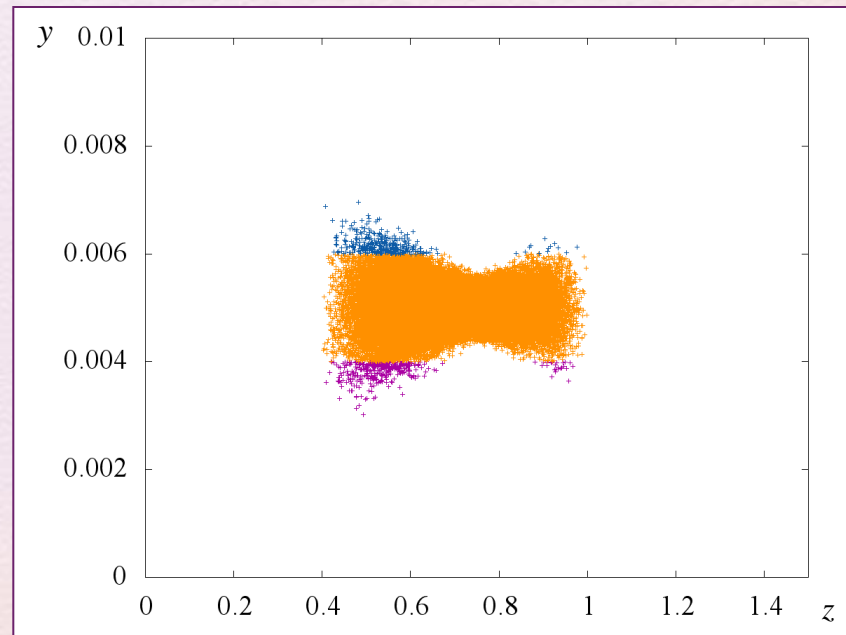
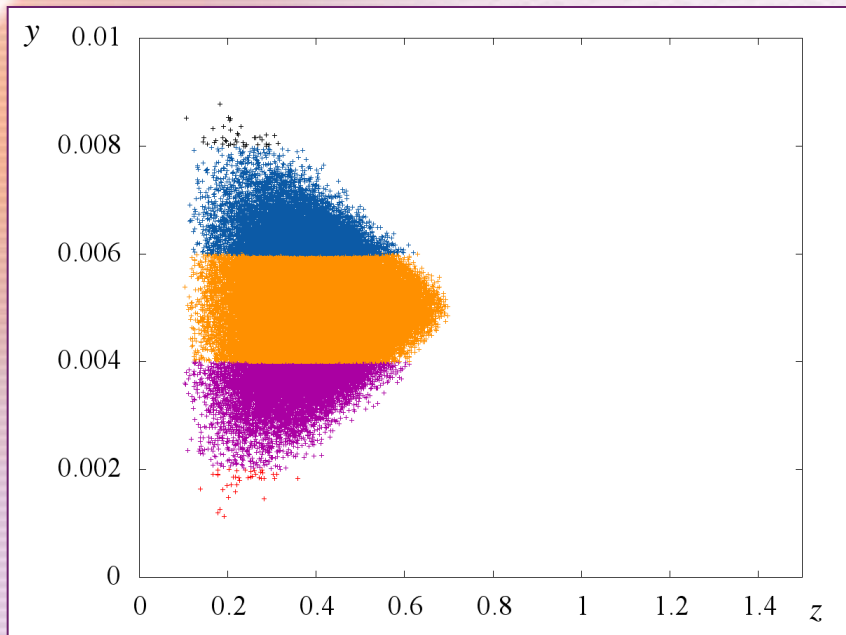
$$\frac{E^{m+1} - E^m}{\tau} = j^{m+\frac{1}{2}} + rot_h H^{m+\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\vec{p}^{m+\frac{1}{2}} - \vec{p}^{m-\frac{1}{2}}}{\tau} = q_i \left(\vec{E}^m + \left[\frac{\vec{v}^{m+\frac{1}{2}} + \vec{v}^{m-\frac{1}{2}}}{2}, \vec{H}^m \right] \right)$$

$$rot_h H = \begin{bmatrix} \frac{Hz_{i,k,l-\frac{1}{2}} - Hz_{i,k-1,l-\frac{1}{2}}}{h_y} - \frac{Hy_{i,k-\frac{1}{2},l} - Hy_{i,k-\frac{1}{2},l-1}}{h_z} \\ \frac{Hx_{i-\frac{1}{2},k,l} - Hx_{i-\frac{1}{2},k,l-1}}{h_z} - \frac{Hz_{i,k,l-\frac{1}{2}} - Hz_{i-1,k,l-\frac{1}{2}}}{h_x} \\ \frac{Hy_{i,k-\frac{1}{2},l} - Hy_{i-1,k-\frac{1}{2},l}}{h_x} - \frac{Hx_{i-\frac{1}{2},k,l} - Hx_{i-\frac{1}{2},k-1,l}}{h_y} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\vec{r}^{m+1} - \vec{r}^m}{\tau} = \vec{v}^{m+\frac{1}{2}}$$

Особенности задачи



- Существенно неравномерное распределение частиц
- Форма песочных часов
- Различные масштабы

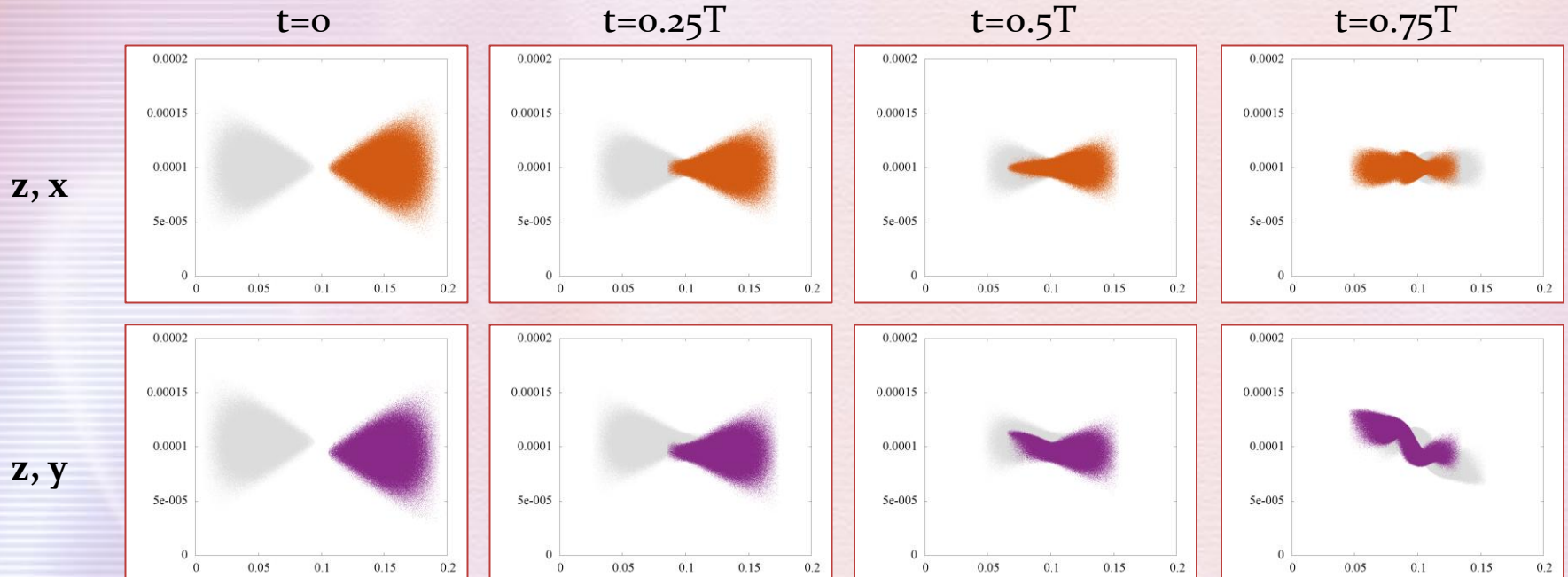
- Большие значения фактора γ
- Трехмерность задачи
- Большое количество частиц
- Условная устойчивость

Пример численных экспериментов

Размер области 10^{-4}
Пространственный шаг $2 \cdot 10^{-6}, 2 \cdot 10^{-6}, 2 \cdot 10^{-3}$
Сетка $100 \times 100 \times 100$
Временной шаг 10^{-6}
 τ/h 0.5
Количество временных шагов 10^5
Количество модельных частиц $2 \cdot 10^7$

Количество процессоров 64
Время вычислений 18 часов

Координаты пучков в различные моменты времени



Анализ схемы

$$\frac{Ex_{i,l-1/2,k-1/2}^{m+1} - Ex_{i,l-1/2,k-1/2}^m}{\tau} = \frac{Hz_{i,l,k-1/2}^{m+1/2} - Hz_{i,l-1,k-1/2}^{m+1/2}}{h_y} - \frac{Hy_{i,l-1/2,k}^{m+1/2} - Hy_{i,l-1/2,k-1}^{m+1/2}}{h_z}$$

$$\begin{aligned} & \frac{Ex_{i,l-1/2,k-1/2}^{m+1} - 2Ex_{i,l-1/2,k-1/2}^m + Ex_{i,l-1/2,k-1/2}^{m-1}}{\tau^2} = \frac{Ex_{i+1,l-1/2,k-1/2}^m - 2Ex_{i,l-1/2,k-1/2}^m + Ex_{i-1,l-1/2,k-1/2}^m}{h_x^2} + \\ & + \frac{Ex_{i,l+1/2,k-1/2}^m - 2Ex_{i,l-1/2,k-1/2}^m + Ex_{i,l-3/2,k-1/2}^m}{h_y^2} + \frac{Ex_{i,l-1/2,k+1/2}^m - 2Ex_{i,l-1/2,k-1/2}^m + Ex_{i,l-1/2,k-3/2}^m}{h_z^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{Ex_{i,l-1/2,k-1/2}^{m+1} - 2Ex_{i,l-1/2,k-1/2}^m + Ex_{i,l-1/2,k-1/2}^{m-1}}{\tau^2} = \\ & = \Delta_{xx} Ex_{i,l-1/2,k-1/2}^m + \Delta_{yy} Ex_{i,l-1/2,k-1/2}^m + \Delta_{zz} Ex_{i,l-1/2,k-1/2}^m \end{aligned}$$

Устойчивость схем

$$\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau^2} = \frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2}$$

$$y_j^m = \lambda^m \exp i\alpha j$$

$$\lambda - 2 + \frac{1}{\lambda} = \frac{\tau^2}{h^2} e^{-i\alpha} - 2 + e^{i\alpha}$$

$$\frac{\tau^2}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \leq \frac{\tau^2}{h^2} \leq 1$$

$$\leftarrow \lambda = 1 - 2 \frac{\tau^2}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \pm 2 \frac{\tau}{h} \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{\tau^2}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 1}$$

$$\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau^2} = \delta \Delta_{xx} y_i^{n+1} + (1 - 2\delta) \Delta_{xx} y_i^n + \delta \Delta_{xx} y_i^{n-1}$$

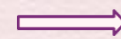
$$\delta \leq \frac{1}{2}$$

$$\Delta_{xx} y_i^n = \frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2}$$

$$1 + 4\delta A \lambda^2 - 2[1 - 2\delta A] \lambda + 1 + 4\delta A = 0$$

$$A = \frac{\tau^2}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$1 - 2\delta A^2 - (1 + 4\delta A)^2 \leq 0$$



$$\delta \geq \frac{1}{4}$$

Амплитуда и скорость распространения волн

$$\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau^2} = \frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2}$$

$$\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau^2} = \delta \Delta_{xx} y_i^{n+1} + (1 - 2\delta) \Delta_{xx} y_i^n + \delta \Delta_{xx} y_i^{n-1}$$

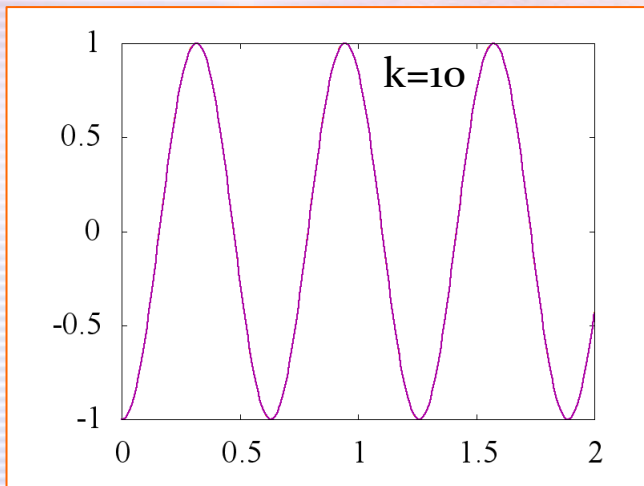
$$u_i^n = A e^{i(kh - n\omega\tau)}$$

$$\sin^2 \frac{\omega\tau}{2} = \frac{\tau^2}{h^2} \sin^2 \frac{kh}{2}$$

$$\sin^2 \frac{\omega\tau}{2} = \frac{\tau^2}{h^2} \frac{\sin^2 \frac{kh}{2}}{1 + 4\delta \frac{\tau^2}{h^2} \sin^2 \frac{kh}{2}}$$

$$\frac{\omega}{k} = 1 - k^2 \left(\frac{h^2 - \tau^2}{24} \right) + O(\tau^3, h^3, \dots)$$

$$\frac{\omega}{k} = 1 - k^2 \left(\frac{h^2 - \tau^2}{24} + \frac{\delta\tau^2}{2} \right) + O(\tau^3, h^3, \dots)$$



$N=1000$
 $h=2\pi/1000$
 $\tau=h/2$
 $N_\tau=250$

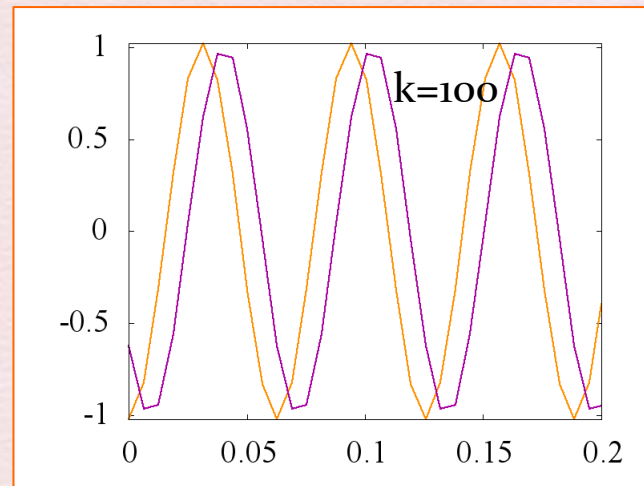


Схема в трехмерном случае

$$\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau^2} = \Delta_{xx} y_i^n + \Delta_{yy} y_i^n + \Delta_{zz} y_i^n$$

$$\frac{\tau^2}{h_x^2} + \frac{\tau^2}{h_y^2} + \frac{\tau^2}{h_z^2} \leq 1$$

$$y_{ijl}^m = A \exp \left[-i \left(\omega t^m - k_x x_i - k_y y_j - k_z y_l \right) \right]$$

$$\frac{\omega}{k} = 1 - k^2 \left(\frac{h_x^2 \cos^4 \alpha + h_y^2 \cos^4 \beta + h_z^2 \cos^4 \gamma - \tau^2}{24} \right) + O(\tau^3, h^3, \dots)$$

$$\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau^2} = \delta \Delta_{xx} y_i^{n+1} + (1 - 2\delta) \Delta_{xx} y_i^n + \delta \Delta_{xx} y_i^{n-1} + \Delta_{yy} y_i^n + \Delta_{zz} y_i^n$$

$$\frac{\tau^2}{h_y^2} + \frac{\tau^2}{h_z^2} \leq 1, \delta \geq \frac{1}{4}$$

$$\frac{\omega}{k} = 1 - k^2 \left(\frac{h_x^2 \cos^4 \alpha + h_y^2 \cos^4 \beta + h_z^2 \cos^4 \gamma - \tau^2}{24} + \frac{\delta \tau^2}{2} \right) + O(\tau^3, h^3, \dots)$$

$$\sin^2 \left(\frac{\omega \tau}{2} \right) = \frac{\frac{\sin^2 \left(\frac{k_x h_x}{2} \right)}{h_x^2} + \frac{\sin^2 \left(\frac{k_y h_y}{2} \right)}{h_y^2} + \frac{\sin^2 \left(\frac{k_z h_z}{2} \right)}{h_z^2}}{\frac{1}{\tau^2} - 4\delta \frac{\sin^2 \left(\frac{k_x h_x}{2} \right)}{h_x^2}}$$

Схема для решения уравнений Максвелла

$$\frac{Hx^{m+1/2} - Hx^{m-1/2}}{\tau} = \Delta_z Ey^m - \Delta_y Ez^m$$

$$\frac{Hy^{m+1/2} - 2Hy^{m-1/2} + Hy^{m-3/2}}{\tau^2} = \frac{1}{4} \Delta_{xx} Hy^{m+1/2} + \frac{1}{2} \Delta_{xx} Hy^{m-1/2} + \frac{1}{4} \Delta_{xx} Hy^{m-3/2} + \Delta_{yy} Hy^{m-1/2} + \Delta_{zz} Hy^{m-1/2}$$

$$\frac{Hz^{m+1/2} - 2Hz^{m-1/2} + Hz^{m-3/2}}{\tau^2} = \frac{1}{4} \Delta_{xx} Hz^{m+1/2} + \frac{1}{2} \Delta_{xx} Hz^{m-1/2} + \frac{1}{4} \Delta_{xx} Hz^{m-3/2} + \Delta_{yy} Hz^{m-1/2} + \Delta_{zz} Hz^{m-1/2}$$

$$\frac{Ex^{m+1} - Ex^m}{\tau} = \Delta_y Hz^{m+1/2} - \Delta_z Hy^{m+1/2}$$

$$\frac{Ey^{m+1} - Ey^m}{\tau} = \Delta_z Hx^{m+1/2} - \Delta_x Hz^{m+1/2}$$

$$\frac{Ez^{m+1} - Ez^m}{\tau} = \Delta_x Hy^{m+1/2} - \Delta_y Hx^{m+1/2}$$

$$\Delta_x Ex^m + \Delta_y Ey^m + \Delta_z Ez^m = 4\pi\rho^m$$

$$\frac{1}{4} \Delta_x Hx^{m+1/2} + 2Hx^{m-1/2} + Hx^{m-3/2} + \Delta_y Hy^{m-1/2} + \Delta_z Hz^{m-1/2} = 0$$

Заключение

- ✓ Предложена новая схема для решения уравнений Максвелла в трехмерных плоских областях. Схема разработана на основе известной схемы с перешагиванием, но в отличие от исходной, является неявной по направлению наименьшего размера области и позволяет проводить расчеты с более крупным временным шагом.
- ✓ Исследованы порядок аппроксимации новой схемы с одномерном и трехмерном случаях, а также изменение схемой амплитуды волн и скорости их распространения, схема несущественно меняет эти характеристики решения.

**Спасибо
за внимание!**