

Численное моделирование движения газовых смесей посредством алгоритма КАБАРЕ

Александр Данилин, danilin.physics@gmail.com

ИБРАЭ РАН

September 15, 2015

План презентации

- ▶ Физическая модель
- ▶ Уравнения движения в консервативной форме
- ▶ Уравнения движения в характеристической форме
- ▶ Описание балансно-характеристического подхода КАБАРЕ
- ▶ Двумерный эксперимент с воздухом и водородом (легкий газ)
- ▶ Двумерный эксперимент с воздухом и SF_6 (тяжелый газ)
- ▶ Заключение

Построение физической модели

- ▶ N идеальных газов
- ▶ Односкоростная модель
- ▶ Не учитываются явления, связанные с молекулярным переносом (диффузия, вязкость, теплопроводность)
- ▶ Не учитывается действие внешних объемных сил

Уравнения неразрывности для газовых компонент смеси

Уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial \rho \xi_f}{\partial t} + \nabla \rho \xi_f \mathbf{u} = 0, f = \overline{1, N};$$

где ρ — плотность газовой смеси,

ξ_i — массовые доли компонентов смеси,

\mathbf{u} — скорость движения среды.

Естественное условие нормировки:

$$\sum_{f=1}^N \xi_f = 1;$$

Закон сохранения импульса и полной энергии

Закон сохранения импульса:

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \nabla \rho u_i \mathbf{u} + \nabla_i p = 0, i = 1, 2, 3;$$

Давление газовой смеси:

$$p = (\bar{\gamma} - 1)\rho(E - \mathbf{u}^2/2);$$

Закон сохранения полной энергии:

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla(\rho E + p)\mathbf{u} = 0.$$

где $\bar{\gamma} = \sum_{i=1}^N C_{p_i} \xi_i / \sum_{i=1}^N C_{v_i} \xi_i$ — эффективный показатель адиабаты,
 C_{p_i}, C_{v_i} — удельные теплоемкости при постоянном давлении и постоянным объеме
компонентов смеси,
 E — полная энергия смеси.

Консервативная система уравнений движения

Консервативная система уравнений движения.

Уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial \rho \xi_f}{\partial t} + \nabla \rho \xi_f \mathbf{u} = 0; f = \overline{1, N};$$

Закон сохранения импульса:

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \nabla \rho u_i \mathbf{u} + \nabla_i p = 0, i = 1, 2, 3;$$

Закон сохранения полной энергии:

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla(\rho E + p) \mathbf{u} = 0;$$

Характеристическая форма уравнений движения

Характеристическая система уравнений вдоль оси x_i :

$$\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} + \text{diag}(\lambda_+, \lambda_-, \lambda, \dots, \lambda) \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial x_i} = \mathbf{Q}_i;$$

Характеристические скорости:

$$\lambda_+ = u_i + c,$$

$$\lambda_- = u_i - c,$$

$$\lambda = u_i;$$

где $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$ — скорость звука в смеси,
 \mathbf{Q}_i — правая часть.

Инварианты

Вектор инвариантов:

$$\mathbf{I}^T = (R, Q, S, V, W, \xi_1, \dots, \xi_{N-1});$$

Инварианты, унаследованные от однокомпонентной задачи:

$$\partial R = \partial u_i + \partial p / (\rho c); \quad \partial Q = \partial u_i - \partial p / (\rho c);$$

$$V = u_j; \quad W = u_k;$$

Новые инварианты:

$$S = p / \rho^{\bar{\gamma}};$$

$$\Xi_f = \xi_f, \quad f = \overline{1, N-1};$$

$$\sum_{f=1}^N \Xi_f = 1$$

Иллюстрация балансно-характеристического подхода

Схема КАБАРЕ подробно описана и исследована в ряде работ [1]-[6].

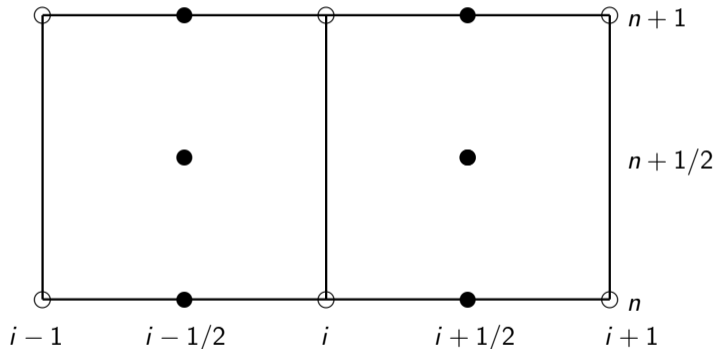


Figure: Вычислительный шаблон схемы КАБАРЕ

Иллюстрация балансно-характеристического подхода

Первый шаг схемы КАБАРЕ

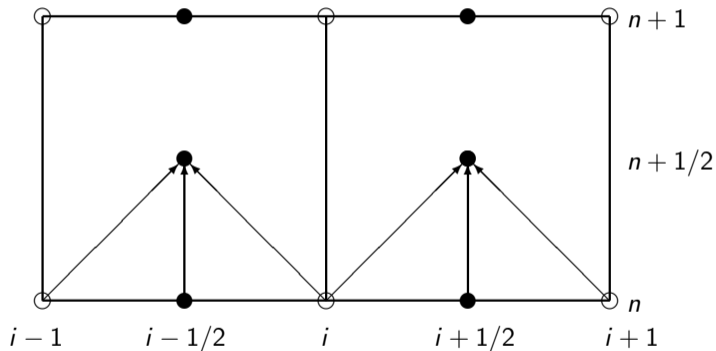


Figure: Первый шаг схемы КАБАРЕ

Иллюстрация балансно-характеристического подхода

Второй шаг схемы КАБАРЕ

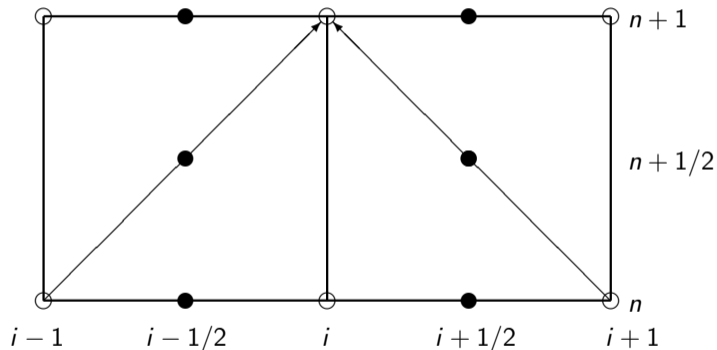


Figure: Второй шаг схемы КАБАРЕ

Иллюстрация балансно-характеристического подхода

Третий шаг схемы КАБАРЕ

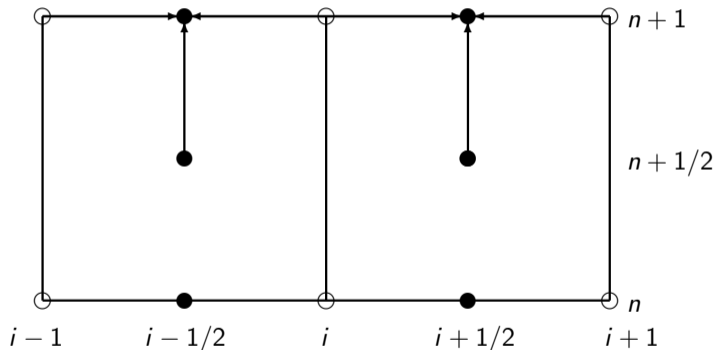


Figure: Третий шаг схемы КАБАРЕ

Эксперимент с легким газом из [1], [2]

Прохождение ударной волны в двумерном канале в воздухе через круглую неоднородность, заполненную водородом.

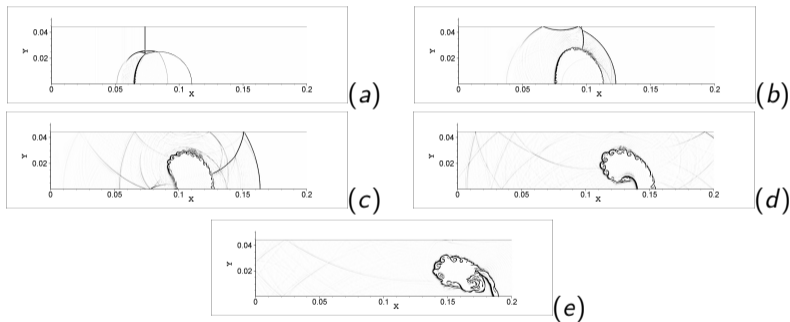


Figure: Эволюция прямоугольной неоднородности при прохождении через нее ударной волны на моменты времени $T = 52\text{мс}(a)$, $102\text{мс}(b)$, $201\text{мс}(c)$, $376\text{мс}(d)$, $704\text{мс}(e)$. Время отсчитывается с момента запуска эксперимента. $[0, L_x] \times [0, L_y] = [0, 0.3] \times [0, 0.0445]$, $N_x \times N_y = 1450 \times 215$, $CFL = 0.45$.

Эксперимент с тяжелым газом из [3], [4]

Прохождение ударной волны в двумерном канале в воздухе через прямоугольную неоднородность, заполненную SF_6 .

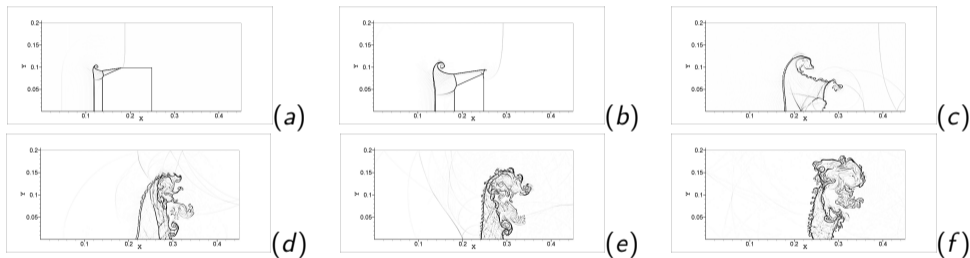


Figure: Эволюция прямоугольной неоднородности при прохождении через нее ударной волны на моменты времени $T = 206\text{мс}(a)$, $446\text{мс}(b)$, $726\text{мс}(c)$, $1726\text{мс}(d)$, $2046\text{мс}(e)$, $2846\text{мс}(f)$. Время отсчитывается от момента столкновения ударной волны с неоднородностью.

$[0, L_x] \times [0, L_y] = [0, 0.45] \times [0, 0.2]$, $N_x \times N_y = 720 \times 320$, $CFL = 0.45$

Эксперимент с тяжелым газом из [3], [4] (продолжение)

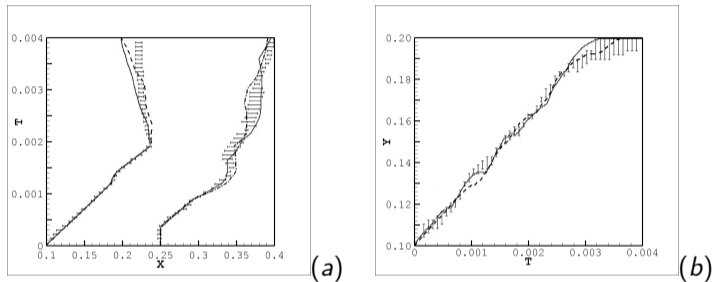








Figure: (a) — координаты крайней левой и крайней правой ячеек, содержащей SF_6 в данный момент времени. Штриховая и штрихпунктирная линии — расчет по "кабаре", сплошная линия — расчет из работы [3], отрезки - экспериментальные данные с интервалом погрешности. (b) — координата наивысшей ячейки, содержащей SF_6 в данный момент времени. Штриховая линия — расчет по "кабаре", сплошная линия — расчет из работы [3], отрезки - экспериментальные данные с интервалом погрешности.







Заключение

- ▶ Построен двумерный численный алгоритм для расчета движения смесей идеальных газов
- ▶ Проведено успешное сравнение расчетов, полученных по разработанному алгоритму, с аналогичными расчетами других авторов.
- ▶ Результаты работы опубликованы в журнале ВМиП [5], [6]

Благодарности

Спасибо за внимание.
Thank you for your attention
Дякую за увагу
Paldies par uzmanību

-  Головизнин В. М., Самарский А. А. Некоторые свойства разностной схемы Кабаре // Математическое моделирование. 1998. **10**, №1. 101-116.
-  Головизнин В. М., Карабасов С. А. Нелинейная коррекция схемы Кабаре // Математическое моделирование. 1998. **10**, №12. 107-123.
-  Головизнин В. М., Карабасов С. А., Кобринский И. М. Балансно-характеристические схемы с разделенными консервативными и потоковыми переменными // Математическое моделирование. 2003. **15**, №9. 29-48.
-  Головизнин В. М. Балансно-характеристический метод численного решения одномерных уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных // Математическое моделирование. 2006. **18**, №11. 14-30.
-  Karabasov S. A., Goloviznin V. M. Compact Accurately Boundary-Adjusting high-Resolution Technique for fluid dynamics // JCP. 2009. **228**. N 9. P. 7426-7451.
-  Кондаков В. Г. Обобщение схемы КАБАРЕ на многомерные уравнения задач газовой динамики, Диссертация на соискание степени кандидата ф.-м. наук. Москва. 2014.

-  *Lagumbay R. S., Vasilyev O. V., Haselbacher A.* Homogeneous Equilibrium Mixture Model for Simulation of Multiphase/Multicomponent Flows // International journal for numerical methods in fluids. 2007. N 00. 1-6.
-  *Haast J. F., Sturtevant B.* Interaction of weak shock waves with cylindrical and spherical gas inhomogeneities // Journal of Fluid Mechanics. 1987. **181**. P.41-76.
-  *Bates K. R., Nikiforakis N., Holder D.* Richtmyer–Meshkov instability induced by the interaction of a shock wave with a rectangular block of SF_6 // Physics of Fluids. 2007. **19**. P.123-321
-  *Holder D. A. et al.* Shock tube experiments on Richtmyer-Meshkov instability growth using an enlarged double bump perturbation // Laser Part. Beams. 2003. **21**. N 3. P.411-418.
-  *Данилин А. В., Соловьев А. В.* Модификация схемы “кабаре” для расчета течения многокомпонентных газовых смесей // Вычислительные методы и программирование. 2015. **16**. 18-25.
-  *Данилин А. В., Соловьев А. В., Зайцев А. М.,* Модификация схемы “кабаре” для численного моделирования течений многокомпонентных газовых смесей в двумерных областях // Вычислительные методы и программирование. 2015. **16**. 436-445.

Уравнения неразрывности для газовых компонент смеси

Альтернативные уравнения движения:

$$\frac{\partial \rho \bar{\gamma}}{\partial t} + \nabla \rho \bar{\gamma} \mathbf{u} = 0;$$

Закон сохранения импульса:

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \nabla \rho u_i \mathbf{u} + \nabla_i p = 0, i = 1, 2, 3;$$

Давление газовой смеси:

$$p = (\bar{\gamma} - 1)\rho(E - \mathbf{u}^2/2);$$

Закон сохранения полной энергии:

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla(\rho E + p)\mathbf{u} = 0.$$

Независимый перенос компонент:

$$\frac{\partial \rho \xi_f}{\partial t} + \nabla \rho \xi_f \mathbf{u} = 0, f = \overline{1, N};$$