Паразитные волны в разностных схемах и метод их приближенного анализа

Л.В. Дородницын

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

XVI Всероссийская конференция-школа молодых исследователей «Современные проблемы математического моделирования»

Мотивация

- Схемные осцилляции необходимо изучать, прежде чем их подавлять.
- Анализ решений разностных задач довольно труден. Более традиционный объект — дифференциальные уравнения математической физики.
- Метод дифференциального приближения — один из доступных способов приближенного анализа схем.
- Ранее известные варианты метода непригодны для анализа частых осцилляций. Предлагается новая модификация.

Речь будет идти только об осцилляциях по пространству и о пилообразных решениях — вида $u(x_j) = (-1)^j\, v(x_j)$.

Содержание

Схема с центральными разностями для уравнения переноса

$$\partial u/\partial t + \partial u/\partial x = 0 \quad \mapsto \quad du_j/dt + (u_{j+1} - u_{j-1})/(2h) = 0$$

$(d/dt \mapsto$ схема Кранка–Николсон)

Гармоническое решение содержит «физическую» моду и паразитную пилообразную осцилляцию:

$$u(x_j, t) = a_1 \exp\{i\omega t - ikx_j\} + a_2\, (-1)^j \exp\{i\omega t + ikx_j\}\,,$$

$$k = k(\omega, h) = \arcsin(\omega h)/h = \omega + h^2\omega^3/6 + O(h^4).$$

ПЕРЕНОС ГАУССИАНА

Метод дифференциального приближения

- *Ю.И. Шокин, Н.Н. Яненко.* Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике. – Новосибирск: Наука, 1985.

Схема с направленными разностями для уравнения переноса
$du_j/dt + (u_j - u_{j-1})/h = 0\,.$

Дифференциальное приближение: $\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{h}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = O(h^2)\,.$

Вместо переноса — уравнение конвекции-диффузии.

Метод дифференциального приближения

- *Ю.И. Шокин, Н.Н. Яненко.* Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике. – Новосибирск: Наука, 1985.

Схема с направленными разностями для уравнения переноса
$du_j/dt + (u_j - u_{j-1})/h = 0$.

Дифференциальное приближение: $\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{h}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = O(h^2)$.

Вместо переноса — уравнение конвекции-диффузии.

Проблемы

1. Требование плавности: $\dfrac{h}{\|u\|}\,\dfrac{du}{dx} \to 0, \;\; h \to 0$.
2. Дифференциальный порядок может не совпадать с разностным.
3. Краевая задача: вопрос о количестве граничных условий.

Схема с центральными разностями для уравнения переноса

$$du_j/dt + (u_{j+1} - u_{j-1})/(2h) = 0$$

1-е дифференциальное приближение: $\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = O(h^2)\,.$

Осциллирующее решение не обнаруживается.

2-е дифференц. приближение: $\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{h^2}{6}\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} = O(h^4)\,.$

Решение в виде гармоники $u = \exp\{i\omega t - ikx\}$:

$$k_1(\omega) \approx \omega + \frac{h^2}{6}\omega^3, \quad k_2(\omega) \approx \frac{\sqrt{6}}{h} - \omega, \quad k_3(\omega) \approx -\frac{\sqrt{6}}{h} - \omega.$$

Пример: уравнение переноса и центрально-разностная схема для него

Дифференциальная задача Штурма–Лиувилля.

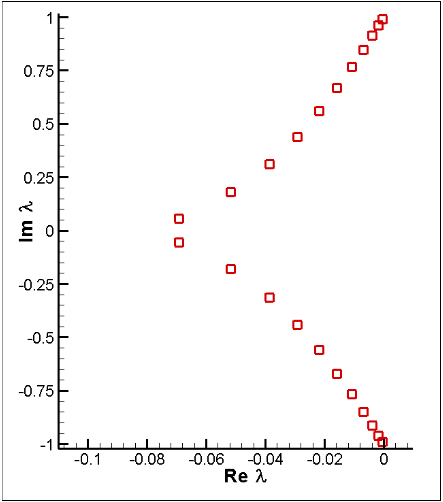
$$\begin{cases} du/dx + \lambda u = 0, \quad 0 < x < L, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

Собственные значения и функции не существуют:
$u(x) = u(0)\exp\{-\lambda x\} \equiv 0.$

Разностная задача.

Добавляется правое краевое условие:

$$\begin{cases} (u_{j+1} - u_{j-1})/(2h) + \lambda u_j = 0, \\ u_0 = 0, \quad (u_N - u_{N-1})/h = 0. \end{cases}$$



Дифференциальное приближение осциллирующих схем

- *Л.В. Дородницын.* Искусственные граничные условия при численном моделировании дозвуковых течений газа // ЖВМ и МФ, 2005, т.45, № 7, с.1251–1278.

Математический инструмент: гипотеза о фоне и «пиле»

$$u(x_j\,,\,t) = \bar{u}(x_j\,,\,t) + (-1)^j a(x_j\,,\,t), \qquad (*)$$

$\bar{u}(x,t)$, $a(x,t)$ — гладкие функции.

Применимость: $$\frac{h}{\|\bar{u}\|}\,\frac{d\bar{u}}{dx} \to 0,\;\; \frac{h}{\|a\|}\,\frac{da}{dx} \to 0,\;\; h \to 0\,. \qquad (**)$$

Схема для уравнения переноса $$\frac{du_j}{dt} + \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} = 0\,. \qquad (1)$$

Подстановка $(*)$ в (1):

$$\frac{d\bar{u}_j}{dt} + \frac{\bar{u}_{j+1} - \bar{u}_{j-1}}{2h} + (-1)^j \left(\frac{da_j}{dt} - \frac{a_{j+1} - a_{j-1}}{2h} \right) = 0.$$

С учетом $(**)$,

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + \frac{h^2}{6}\,\frac{\partial^3\bar{u}}{\partial x^3} = O(h^4), \qquad \frac{\partial a}{\partial t} - \frac{\partial a}{\partial x} = O(h^2).$$

ЦР схема для уравнения переноса: начально-краевая задача

Краевые условия 1-го рода:

$$\begin{cases} du_j/dt + (u_{j+1} - u_{j-1})/(2h) = 0, \ \ j = 1, 2, \ldots, N-1 \\ u_0 = u_N = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \ \ 0 < x < L \end{cases}$$

Дифференциальное приближение:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0, \quad \dfrac{\partial a}{\partial t} - \dfrac{\partial a}{\partial x} = 0, \quad 0 < x < L, \\ \bar{u}(0,t) + a(0,t) = 0, \quad \bar{u}(L,t) + (-1)^N a(L,t) = 0, \\ \bar{u}(x,0) = \varphi(x), \quad a(x,0) = 0. \end{cases}$$

Решение: $\quad u(x_j\,, t) = \bar{u}(x_j\,, t) + (-1)^j a(x_j\,, t),$

I. $\quad \bar{u}(x,t) = \varphi(x-t), \quad a(x,t) \equiv 0.$

II. $\quad a(L,t) = (-1)^{N+1}\varphi(L-t), \quad a(x,t) = (-1)^{N+1}\varphi(2L-x-t), \quad \bar{u} \equiv 0.$

III. $\quad \bar{u}(0,t) = (-1)^N\varphi(2L-t), \quad \bar{u}(x,t) = (-1)^N\varphi(2L+x-t), \quad a \equiv 0.$

...

Компактная трехточечная схема

- *А.И. Толстых.* Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. – М.: Наука, 1990.

Компактная трехточечная центрально-разностная схема $O(h^4)$ для уравнения переноса

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{6}u_{j-1}+\frac{2}{3}u_j+\frac{1}{6}u_{j+1}\right]+\frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2h}=0.$$

Дифференциальное приближение:

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}+\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}=O(h^4),\qquad \frac{\partial a}{\partial t}-3\,\frac{\partial a}{\partial x}=O(h^2).$$

Пилообразная мода движется втрое быстрее, чем в обычной схеме с центральными разностями.

ЦР схема для уравнения переноса: задачи на собственные значения

Краевые условия 1-го рода.

$$\begin{cases} (u_{j+1} - u_{j-1})/(2h) + \lambda u_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, N-1 \\ u_0 = u_N = 0. \end{cases}$$

$u(x_j) = \bar{u}(x_j) + (-1)^j a(x_j)$. Дифференциальное приближение:

$$\begin{cases} d\bar{u}/dx + \lambda \bar{u} = 0, \quad da/dx - \lambda a = 0, \quad 0 < x < L, \\ \bar{u}(0) + a(0) = 0, \quad \bar{u}(L) + (-1)^N a(L) = 0 \end{cases}$$

Решение: $\lambda = \lambda_k = i\omega_k\,, \quad u_k(x_j) = \exp\{-i\omega_k x_j\} - (-1)^j \exp\{i\omega_k x_j\},$

$$\omega_k = \begin{cases} \dfrac{\pi k}{L}\,, & N \text{ — четное,} \\ \dfrac{\pi + 2\pi k}{2L}\,, & N \text{ — нечетное,} \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Точное решение разностной задачи:

$$\lambda_k = \frac{i}{h}\sin(\omega_k h), \quad u_k(x_j) = \exp\{-i\omega_k x_j\} - (-1)^j \exp\{i\omega_k x_j\},$$

$$\begin{cases} k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(M-1), & N = 2M, \\ k = -M, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, M-1, & N = 2M+1 \end{cases}$$

Условие 1-го рода слева, 2-го рода справа.

$$\begin{cases} (u_{j+1} - u_{j-1})/(2h) + \lambda u_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \\ u_0 = 0, \quad (u_N - u_{N-1})/h = 0. \end{cases}$$

$$u(x_j) = \bar{u}(x_j) + (-1)^j a(x_j).$$

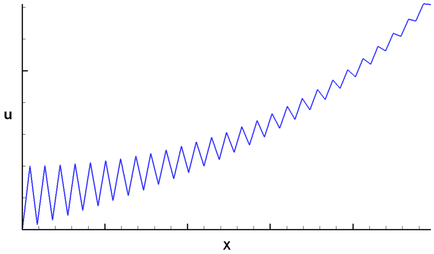
$$\begin{cases} d\bar{u}/dx + \lambda\bar{u} = 0, \quad da/dx - \lambda a = 0, \quad 0 < x < L, \\ \bar{u}(0) + a(0) = 0, \quad \left(\dfrac{d\bar{u}}{dx} + (-1)^N \dfrac{2a}{h}\right)_{x=L} = 0 \end{cases}$$

Решение: $\bar{u}(x) = e^{-\lambda x}, \; a(x) = -e^{\lambda x}, \quad \lambda h = 2\,(-1)^{N-1}\, e^{2\lambda L}.$

Частный случай $\lambda \in \mathbb{R}$.
Тогда $(-1)^N = 1, \; \lambda < 0.$

$$h(\lambda) = \frac{2}{|\lambda|}\exp\{-2|\lambda|L\}.$$

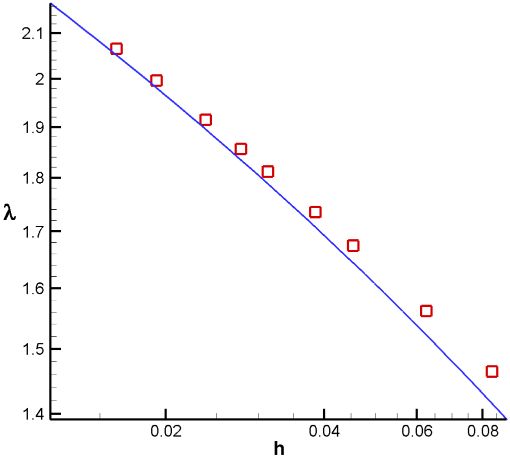
$u(x_j) =$
$\exp\{|\lambda|x_j\} - (-1)^j \exp\{-|\lambda|x_j\}.$



Сравнение дифференциального и разностного спектров.

$$h(\lambda) = \frac{2}{|\lambda|}\exp\{-2|\lambda|L\}$$

vs. вычисленные значения $|\lambda(h)|$ при различных N и $L = 1$.



Условие 1-го рода слева, неотражающее условие $O(h)$ справа.

$$\begin{cases} (u_{j+1} - u_{j-1})/(2h) + \lambda u_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, N-1, \\ u_0 = 0, \quad (u_N - u_{N-1})/h + \lambda u_N = 0. \end{cases}$$

Дифференциальное приближение:

$$\begin{cases} d\bar{u}/dx + \lambda\bar{u} = 0, \quad da/dx - \lambda a = 0, \quad 0 < x < L, \\ \bar{u}(0) + a(0) = 0, \quad \left(-\frac{h}{2}\frac{d^2\bar{u}}{dx^2} + (-1)^N \frac{2a}{h}\right)_{x=L} = 0. \end{cases}$$

Решение: $\bar{u}(x) = e^{-\lambda x}$, $a(x) = -e^{\lambda x}$, $\lambda^2 h^2 = 4\,(-1)^{N-1}\,e^{2\lambda L}$.

Частный случай $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда $(-1)^N = -1$, $\lambda < 0$.

$$h(\lambda) = \frac{2}{|\lambda|}\exp\{-|\lambda| L\}.$$

Условие 1-го рода слева, неотражающее условие $O(h^2)$ справа.

$$\begin{cases} (u_{j+1} - u_{j-1})/(2h) + \lambda u_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \\ u_0 = 0, \quad (3u_N - 4u_{N-1} + u_{N-2})/(2h) + \lambda u_N = 0. \end{cases}$$

Дифференциальное приближение:

$$\begin{cases} d\bar{u}/dx + \lambda \bar{u} = 0, \quad da/dx - \lambda a = 0, \quad 0 < x < L, \\ \bar{u}(0) + a(0) = 0, \quad \left(-\dfrac{h^2}{2}\,\dfrac{d^3\bar{u}}{dx^3} + (-1)^N \dfrac{4a}{h} \right)_{x=L} = 0. \end{cases}$$

Решение: $\bar{u}(x) = e^{-\lambda x},\ a(x) = -e^{\lambda x}, \quad \lambda^3 h^3 = 8\,(-1)^{N-1}\, e^{2\lambda L}.$

Частный случай $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда $(-1)^N = -1,\ \lambda < 0.$

$$h(\lambda) = \frac{2}{|\lambda|} \exp\left\{ -\frac{2}{3} |\lambda| L \right\}.$$

Закономерность.

$$u(x_j) = \exp\{|\lambda| x_j\} - (-1)^j \exp\{-|\lambda| x_j\}.$$

Условие Неймана: $h(\lambda) = \dfrac{2}{|\lambda|} \exp\{-2|\lambda| L\}$.

Неотражающее условие $O(h)$: $h(\lambda) = \dfrac{2}{|\lambda|} \exp\{-|\lambda| L\}$.

Неотражающее условие $O(h^2)$: $h(\lambda) = \dfrac{2}{|\lambda|} \exp\left\{-\dfrac{2}{3}|\lambda| L\right\}$.

Чем лучше аппроксимация правого краевого условия, тем больше $|\lambda|$. У правой границы амплитуда осцилляции понижается, зато отклонение u от нуля увеличивается.

Закономерность.

$$u(x_j) = \exp\{|\lambda| x_j\} - (-1)^j \exp\{-|\lambda| x_j\}.$$

Условие Неймана: $h(\lambda) = \dfrac{2}{|\lambda|} \exp\{-2|\lambda| L\}.$

Неотражающее условие $O(h)$: $h(\lambda) = \dfrac{2}{|\lambda|} \exp\{-|\lambda| L\}.$

Неотражающее условие $O(h^2)$: $h(\lambda) = \dfrac{2}{|\lambda|} \exp\left\{-\dfrac{2}{3}|\lambda| L\right\}.$

Чем лучше аппроксимация правого краевого условия, тем больше $|\lambda|$. У правой границы амплитуда осцилляции понижается, зато отклонение u от нуля увеличивается.

! Есть возможность (и необходимость) изменить аппроксимацию левого краевого условия $u(0) = 0$.

Обобщения

1. Схемы с переменными коэффициентами.
Коэффициенты дифференциальной задачи должны быть медленно меняющимися функциями.

2. Неравномерные сетки с постепенным изменением шага (*квазиравномерные*) трактуются аналогично: шаг сетки вводится как непрерывная функция пространства $h(x)$.

3. Системы уравнений.
Решение разлагается по векторным функциям:

$$\mathbf{U} \equiv (u^1, u^2, \ldots, u^m) = \overline{\mathbf{U}}(x_j, t) + (-1)^j \mathbf{A}(x_j, t).$$

Обобщения (II)

4. Пространственно-многомерные задачи. Прямоугольные сетки.

Центрально-разностная схема для 2D уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_1 \frac{\partial u}{\partial x} + c_2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \mapsto$$

$$\mapsto \quad \frac{du_{jk}}{dt} + c_1 \frac{u_{j+1,k} - u_{j-1,k}}{2\Delta x} + c_2 \frac{u_{j,k+1} - u_{j,k-1}}{2\Delta y} = 0$$

приводится к разложению по функциям четырех видов

$$u(x_j\,,\, y_k\,,\, t) = \bar{u}(x_j\,,\, y_k\,,\, t) + (-1)^j a_1(x_j\,,\, y_k\,,\, t) + \\ + (-1)^k a_2(x_j\,,\, y_k\,,\, t) + (-1)^{j+k} a_{12}(x_j\,,\, y_k\,,\, t)$$

и к задаче для системы из четырех уравнений в ч.п.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + c_1 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + c_2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial a_1}{\partial t} - c_1 \frac{\partial a_1}{\partial x} + c_2 \frac{\partial a_1}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial t} + c_1 \frac{\partial a_2}{\partial x} - c_2 \frac{\partial a_2}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial a_{12}}{\partial t} - c_1 \frac{\partial a_{12}}{\partial x} - c_2 \frac{\partial a_{12}}{\partial y} = 0.$$

Нелинейные разностные уравнения

Л.В. Дородницын (2005)

$$u(x_j\,,\,t) = \bar{u}(x_j\,,\,t) + (-1)^j a(x_j\,,\,t),$$
$$\frac{h}{\|\bar{u}\|}\,\frac{d\bar{u}}{dx} \to 0,\ \ \frac{h}{\|a\|}\,\frac{da}{dx} \to 0,\ \ h \to 0\,.$$

Дополнительная гипотеза о малости амплитуды осцилляции

$$|a| \ll |\bar{u}|\,,$$

Квазилинейное уравнение переноса $\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial}{\partial x}\left(u^2\right) = 0\,.$

Схема: $\dfrac{du_j}{dt} + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{u_{j+1}^2 - u_{j-1}^2}{2h} = 0\,.$

Дифференциальное приближение:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{u}^{\,2}\right) + \frac{h^2}{12}\,\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\bar{u}^{\,2}\right) = O\left(h^4 + a^2\right),$$
$$\frac{\partial a}{\partial t} - a\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \bar{u}\,\frac{\partial a}{\partial x} = O\left(h^4 + a^2\right).$$

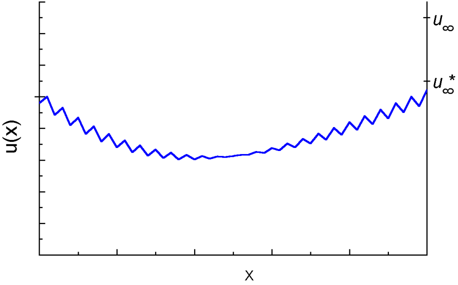
Анализ граничного условия

Эффект «неправильной асимптотики».

Правое граничное условие — релаксация: $\partial u/\partial x = \beta\,(u_\infty - u)\,.$

Аппроксимация направленной разностью

$$\frac{u_N - u_{N-1}}{h} = \beta\,(u_\infty - u_N) \quad \text{дает} \quad \frac{\partial\bar{u}}{\partial x} = \beta\Big(u^*_\infty - \bar{u}\Big)\,,$$

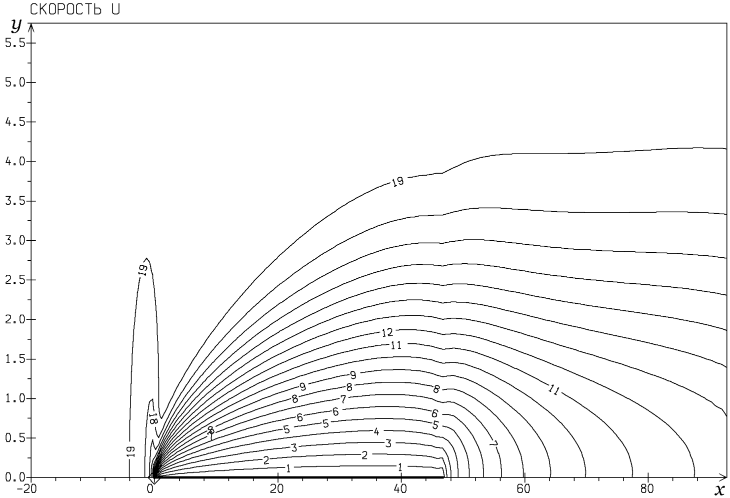


$$u^*_\infty = u_\infty - (-1)^N\,\frac{2a}{\beta h}\,.$$

Другой вариант правого гр. условия $\dfrac{u_N - u_{N-2}}{2h} = \beta\,(u_\infty - u_N)\,.$

Пример практического использования

Вязкое обтекание пластины при числе Маха $M = 0.01$



Выводы

- Всякий метод дифференциального приближения не является математически строгим.
- Разновидность метода, работающая с пилообразными функциями, успешно проходит ряд вычислительных тестов.
- Аналитические решения, не известные в дискретном случае, позволяют судить о свойствах численного решения, в том числе обнаруживать неустойчивости.
- Новый метод позволяет проводить селекцию граничных условий и выделить их варианты, улучшающие качество решения задачи.

Благодарю за внимание!