Семейство периодических режимов в пространственно неоднородной модели конкуренции хищников

Епифанов Андрей Викторович, epifanov-av@yandex.ru
Цибулин Вячеслав Георгиевич, vtsybulin04@gmail.com

Институт математики, механики и
компьютерных наук им. И.И. Воровича ЮФУ

XVI Всероссийская Конференция-школа
«Современные проблемы математического моделирования»
Абрау-Дюрсо, 2015

Сосуществование конкурирующих популяций

Работы по моделированию сосуществования хищников без учета пространственной неоднородности

– Ruan, Ardito, Ricciardi, DeAngelis, Comptes Rendus – Biologies, 2007
– Zhou, Mu, J. Math. Anal. Appl., 2012

Современные модели

– Cosner, Discrete and continuous dynamical systems, 2014
– Petrovskii, Morozov, Bull. Math. Biol., 2009
– Lam, Lou, Lutscher, J. Biol. Dynamics, 2015
– Gejji, Lou, Munther, Peyton, Bull. Math. Biol., 2012

Цели работы

1. Исследование моделей, допускающих периодические колебания сосуществующих популяций хищников
2. Анализ множественных периодических решений, применение теории косимметрии

Динамическая система $\dot{\vec{u}} = \vec{F}\vec{u}$ косимметрична, если имеется $\vec{L}: \quad \left(\vec{L}, \vec{F}\right) = 0$. Если найдется равновесие $\vec{u_*}$ ($\vec{F}\vec{u_*} = 0$), такое что $\vec{L}\vec{u_*} \neq 0$, то эта система имеет непрерывное семейство равновесий [Юдович, Мат. заметки, 1991; Yudovich, Chaos, 1995].

Теория косимметрии для исследования возможности сосуществования конкурирующих популяций в стационарном режиме
– Frischmuth, Kovaleva, Tsybulin, Nonlinear analysis: RWA, 2011
– Будянский, Цибулин, Биофизика, 2015

Будет ли косимметричная система иметь семейство периодических режимов и реализуется ли сосуществование популяций хищников.

Модель взаимодействия популяций хищников и жертв

Система для m жертв и $n-m$ хищников

$$\dot{u}_i = -q_i' + f_i \equiv F_i, \quad q_i = -k_i u_i' + u_i \varphi_i', \quad i = 1, ..., n, \tag{1}$$

$$f_i = \mu_i u_i \bar{u} \left(1 - \frac{\bar{u}}{p(x)}\right) - \sum_{j=m+1}^{n} l_{ij} u_i u_j, \quad i = 1, ..., m, \quad \bar{u} = \sum_{i=1}^{m} u_i, \tag{2}$$

$$f_i = \sum_{j=1}^{m} \mu_{ij} u_i u_j - l_i u_i, \quad i = m+1, ..., n, \tag{3}$$

$$\varphi_i = \alpha_i p(x) + \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} u_j, \quad i = 1, ..., n, \quad x \in [0, a], \tag{4}$$

$u_i(x,t)$ – плотность распределения i-й популяции, t – время,
q_i – миграционные потоки, k_i – коэффициенты диффузии,
μ – коэффициенты роста,
l – коэффициенты смертности,
$p(x) > 0$ – функция ресурса,
α_i, β_{ij} – коэффициенты направленной миграции,
$\alpha_i = 0, \quad i = m+1, ..., n.$

Условия периодичности

$$u_i\,(x,t)\,|_{x=0} = u_i\,(x,t)\,|_{x=a}, \quad i = 1,...,n, \tag{5}$$

$$q_i\,(x,t)\,|_{x=0} = q_i\,(x,t)\,|_{x=a}, \quad i = 1,...,n. \tag{6}$$

Начальные условия

$$u_i(x,t)|_{t=0} = u_i^0(x), \quad i = 1,...,n. \tag{7}$$

При $n = 2$, $m = 1$ [Базыкин А.Д., Маркман Г.С., 1980].
Найдены решения типа «предельный цикл».

Далее численное исследование проводилось при $n = 3$, $m = 1$.

Лемма

Косимметрией системы двух популяций хищников и одной популяции жертвы является вектор-функция

$$\vec{L} = (0, \quad \zeta_2, \quad \zeta_3)\,, \tag{8}$$

$$\zeta_2 = e^{-\varphi_2/k_2} k_3 u_3, \tag{9}$$

$$\zeta_3 = -e^{-\varphi_3/k_3} k_2 u_2, \tag{10}$$

если выполнены следующие условия на параметры модели:

$$\frac{k_2}{k_3} = \frac{\varphi_2}{\varphi_3} = \frac{\mu_{21}}{\mu_{31}} = \frac{l_2}{l_3}. \tag{11}$$

Правые части системы

$$\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)\,, \quad F_i = -q_i' + f_i \tag{12}$$

Доказательство.

Ортогональность векторного поля системы и косимметрии

$$\left(\vec{F},\vec{L}\right)=\int_0^a\left[\zeta_2\left(-q_2'+f_2\right)+\zeta_3\left(-q_3'+f_3\right)\right]dx=\underline{I_1+I_2} \tag{13}$$

Здесь

$$I_1=\int_0^a\left[e^{-\varphi_2/k_2}k_3u_3f_2-e^{-\varphi_3/k_3}k_2u_2f_3\right]dx, \tag{14}$$

$$I_2=\int_0^a\left(\zeta_2'q_2+\zeta_3'q_3\right)dx=I_{2,1}+I_{2,2}+I_{2,3}+I_{2,4}, \tag{15}$$

где

$$I_{2,1}=\int_0^a\left[-e^{-\varphi_2/k_2}k_3u_3'k_2u_2'+e^{-\varphi_3/k_3}k_2u_2'k_3u_3'\right]dx, \tag{16}$$

$$I_{2,2}=\int_0^a\left[e^{-\varphi_2/k_2}k_3u_3'u_2\varphi_2'-e^{-\varphi_3/k_3}k_2u_2'u_3\varphi_3'\right]dx, \tag{17}$$

$$I_{2,3}=\int_0^a\left[-\left(e^{-\varphi_2/k_2}\right)'k_3u_3k_2u_2'+\left(e^{-\varphi_3/k_3}\right)'k_2u_2k_3u_3'\right]dx, \tag{18}$$

$$I_{2,4}=\int_0^a\left[\left(e^{-\varphi_2/k_2}\right)'k_3u_3u_2\varphi_2'-\left(e^{-\varphi_3/k_3}\right)'k_2u_2u_3\varphi_3'\right]dx. \tag{19}$$

Косимметрия

Доказательство.

Равенство нулю интеграла $I_{2,1}$

$$I_{2,1} = \int_0^a \left[-e^{-\varphi_2/k_2} k_3 u_3' k_2 u_2' + e^{-\varphi_3/k_3} k_2 u_2' k_3 u_3' \right] dx \qquad (20)$$

Учет условий косимметрии

$$I_{2,1} = \int_0^a \left[-e^{-\varphi_2/k_2} k_3 u_3' k_2 u_2' + e^{-\varphi_2/k_2} k_3 u_3' k_2 u_2' \right] dx = \underline{0} \qquad (21)$$

Аналогично показывается

$$I_{2,4} = 0, \quad I_{2,2} + I_{2,3} = 0$$

□

$$\frac{k_2}{k_3} = \frac{\varphi_2}{\varphi_3} = \frac{\mu_{21}}{\mu_{31}} = \frac{l_2}{l_3} \qquad (11)$$

Лемма

Косимметрией системы является вектор-функция

$$\vec{L} = (0, 0, ..., 0, \zeta_{m+1}, \zeta_{m+2}, ..., \zeta_n), \tag{22}$$

$$\zeta_i = e^{-\varphi_i/k_i} \sum_{j=m+1}^{n} sign\,(i-j)\,k_j u_j, \quad i = m+1, m+2, ..., n, \tag{23}$$

$$\tag{24}$$

если выполнены следующие условия на параметры модели:

$$\frac{k_i}{k_j} = \frac{\varphi_i}{\varphi_j} = \frac{\mu_{ik}}{\mu_{jk}} = \frac{l_i}{l_j}, \quad i,\, j = m+1, ..., n, \quad k = 1, ..., m. \tag{25}$$

Численный метод

Метод прямых, схема смещенных сеток по пространственной координате.

Основная и вспомогательная сетки

$$x_r = rh,\ r = 1, \dots, N,\ h = a/N, \tag{26}$$

$$x_{r-1/2} = rh - h/2,\ r = 1, \dots, N+1, \tag{27}$$

Разностный оператор

$$(du)_r = \frac{u_{r+1/2} - u_{r-1/2}}{h}, \quad r = 1, \dots, N-1, \quad (du)_N = \frac{u_{1/2} - u_{N-1/2}}{h}, \tag{28}$$

Оператор вычисления среднего

$$(\delta u)_r = \frac{u_{r+1/2} + u_{r-1/2}}{2}, \quad r = 1, \dots, N-1, \quad (\delta u)_N = \frac{u_{1/2} + u_{N-1/2}}{2}. \tag{29}$$

Система разностных уравнений

$$\dot{u}_{i,r} = \left[-dq_i + f_i\right]_r, \; i = 1, ..., n, \; r = 1, ..., N, \tag{30}$$

$$f_{i,r} = \mu_i u_{i,r} \bar{u}_r f_{0,r} - u_{i,r} \sum_{j=m+1}^{n} l_{ij} u_{j,r}, \; i = 1, ..., m, \; r = 1, ..., N, \tag{31}$$

$$\bar{u}_r = \sum_{i=1}^{m} u_{i,r}, \; r = 1, ..., N, \tag{32}$$

$$f_{0,r} = 1 - \frac{1}{P_r} \sum_{j=1}^{m} u_{j,r}, \; P_r = \left[\frac{1}{h} \int_{x_{r-1/2}}^{x_{r+1/2}} \frac{dx}{p(x)}\right]^{-1}, \; r = 1, ..., N, \tag{33}$$

$$f_{i,r} = \sum_{j=1}^{m} \mu_{ij} u_{i,r} u_{j,r} - l_i u_{i,r}, \; i = m+1, ..., n, \; r = 1, ..., N, \tag{34}$$

Аппроксимация потоков

$$(q_i)_{r-1/2} = \left[-k_i du_i + \alpha_i dp\delta u_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} du_j \delta u_i\right]_{r-1/2},$$

$$i = 1, ..., m, \quad r = 1, ..., N,$$

$$(q_i)_{r-1/2} = \left[-k_i du_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} du_j \delta u_i\right]_{r-1/2},$$

$$i = m+1, ..., n, \quad r = 1, ..., N.$$

Численный эксперимент

Одна жертва $u = u_1$ и два хищника $v = u_2$, $w = u_3$

$$p(x) = 1 + 0.2\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right), \quad a = 1$$

Параметры роста

$$\mu_1 = 3,\ \mu_{21} = 2.5,\ \mu_{31} = 2,$$

Параметры смертности

$$l_{12} = l_{13} = 1,\ l_2 = 1,\ l_3 = 0.8,$$

Параметры миграции

$$\alpha = 0.1,\ \beta_{11} = \beta_{22} = \beta_{23} = \beta_{32} = \beta_{33} = 0,$$
$$\beta_{12} = -0.2,\ \beta_{13} = -0.3,\ \beta_{21} = 0.4,\ \beta_{31} = 0.32.$$

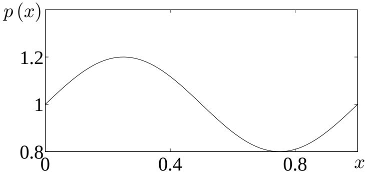
Диффузионные параметры

$$k_1 = 0.2,\ k_2 = 0.3,$$

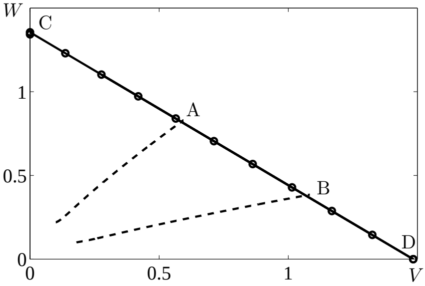
Условие косимметрии выполняется при $k_3 = 0.24$.

Семейство периодических режимов

Траектории двух решений (пунктир), $U = u_{N/2}$, $V = v_{N/2}$, $W = w_{N/2}$



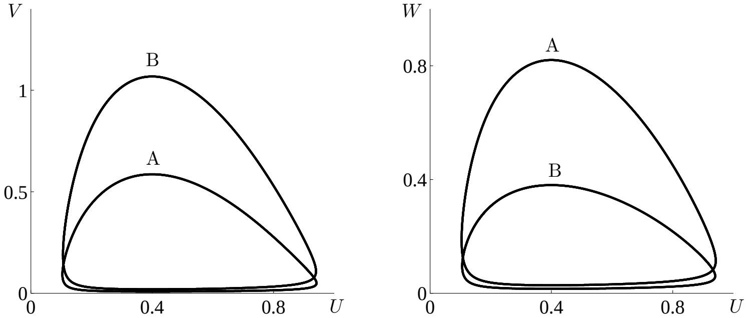
Функция ресурса



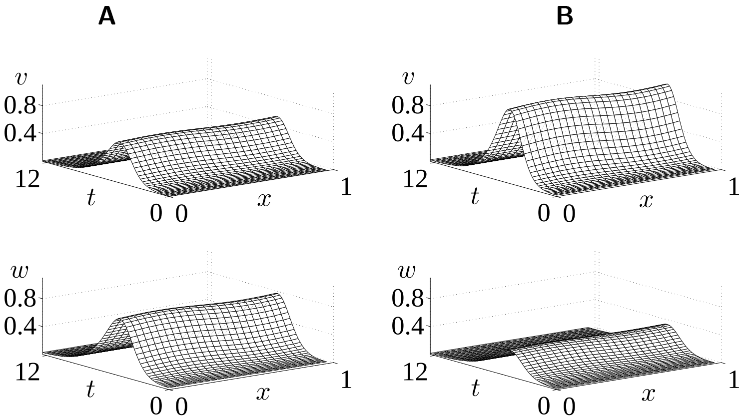
Семейство

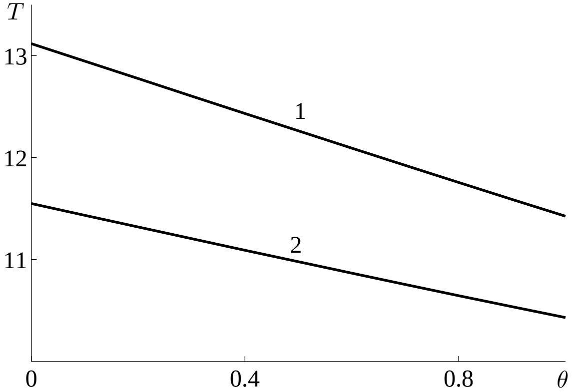
Режим	k_3	Косимметрия	Макс. мультипликаторы
A	0.24	+	1.002, 0.998, 0.020
B	0.24	+	1.002, 0.998, 0.025
C	0.12	–	1.000, 0.967, 0.016
D	0.12	–	1.040, 1.000, 0.031

Проекции фазовых траекторий



Сосуществование хищников; $k_3 = 0.24$





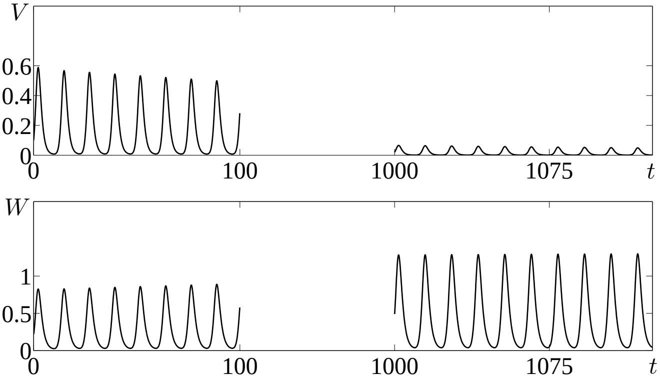
Функция ресурса

1) $p(x) = 1 + 0.2 sin(2\pi x)$

2) $p(x) = 1 + 0.5 sin(2\pi x)$

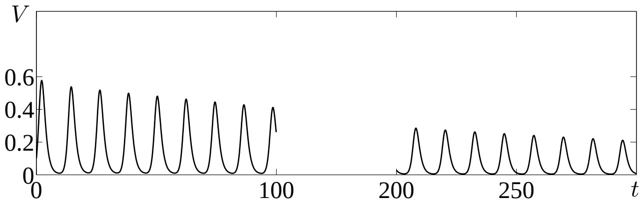
Вытеснение популяции хищника v

$$p(x) = 1 + 0.2sin(2\pi x), \quad k_3 = 0.12$$

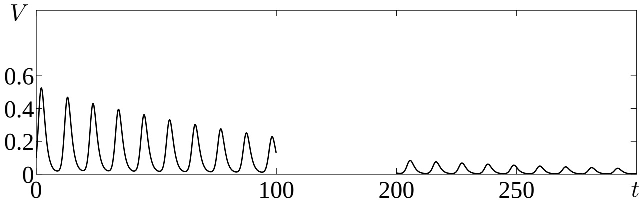


Влияние ресурса на скорость вытеснения хищника

$$p(x) = 1 + 0.2 sin(2\pi x),\ k_3 = 0.12$$



$$p(x) = 1 + 0.5 sin(2\pi x),\ k_3 = 0.12$$



Выводы

- Для косимметричной системы динамики хищников и жертв на кольцевом ареале обнаружены множественные периодические режимы
- Произведен расчет мультипликаторов, подтверждающий существование непрерывного семейства режимов
- Для решений семейства установлено сосуществование конкурирующих популяций хищников
- При разрушении семейства (нарушение косимметрии) наблюдается медленная динамика с продолжительным временем сосуществования конкурирующих популяций хищников