

**МОДЕЛИРОВАНИЕ
ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ В
КАТУШКЕ ГРОМКОГОВОРИТЕЛЯ**

Гладких В. С., Петухов А. В., Киселев Д.,
Останин В., Ильин В. П.

Новосибирск, ИВМиИГ СО РАН

ПЛАН ВЫСТУПЛЕНИЯ

- Постановка задачи
- Геометрия области
- Применение МКО
- Технологии
- Результаты моделирования



ЦЕЛЬ

Определение предельных режимов приводящих к разрушению катушки. Мы будем считать что катушка разрушается, когда температура в катушке превысит некоторый заранее заданный порог. В нашем случае в качестве порога мы рассмотрим величину температуры равную 180 градусам Цельсия.



ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

○
$$c \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda \cdot \operatorname{grad}(T)) = f(x, y, z, t),$$

или

$$c \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = f(x, y, z, t).$$

Начальное условие на распределение температуры в области Ω записывается как

$$T|_{t=0} = T_0(x, y, z).$$

Условия первого рода (Дирихле, заданная температура)

$$T|_S = T_{s0}$$

Условия 2-го рода (Неймана, заданный тепловой поток)

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_S = J_S$$

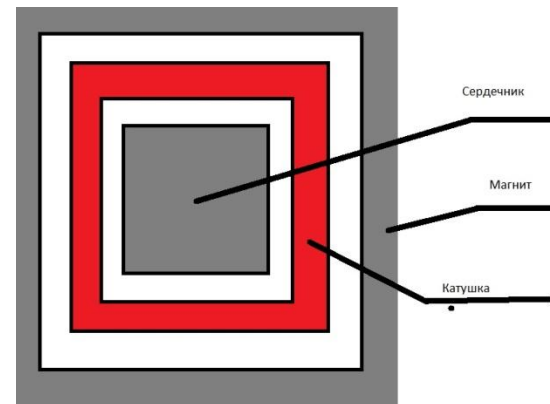
На границах раздела различных сред Γ ставятся условия непрерывности температуры и теплового потока:

$$T|_{\Gamma_-} = T|_{\Gamma_+}, \quad \lambda_- \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma_-} = \lambda_+ \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma_+}.$$



ГЕОМЕТРИЯ ОБЛАСТИ

Мы используем на первой фазе достаточно грубое приближение динамика, призванное показать качественную картину, поэтому область является составленной из прямоугольников.



АППРОКСИМАЦИЯ

Аппроксимация задачи в расчетной области $\Omega \times T$ осуществляется с помощью методов конечных объемов, получаемым из интегральных законов сохранения с учетом краевых условий и соотношений на внутренних границах, на адаптивной неструктурированной сетке, состоящей из набора тетраэдров, такой что внешние и внутренние граничные поверхности составлялись из граней тетраэдров, граничные грани – из ребер тетраэдров, а граничные вершины являлись узлами сетки.



ПОСТРОЕНИЕ СЕТКИ

- $P_l \in \bar{\Omega}, l = 1, \dots, \bar{N}$.
- $E_m, m = 1, \dots, M$.
- $V_l, l = 1, \dots, \bar{N}$.

Барицентрические конечные объемы по построению аналогичны ячейкам Дирихле-Вороного однако более удобны тем, что барицентры тетраэдра и его граней принадлежат тетраэдру и не нуждаются в обработке исключительных ситуаций.



ПРИМЕНЕНИЕ МКО

Теперь обозначив через Γ_1 – границу конечного объема V_1 и проинтегрировав уравнение (2) по времени и пространству, получим интегральный вид закона сохранения

$$\int_{V_1} c(T^{n+1} - T^n) dx dy dz = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Gamma_1} \frac{\partial T}{\partial n} d\Gamma dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{V_1} f(x, y, z, t) dx dy dz dt,$$

где \vec{n} – вектор внешней нормали для границы Γ_1 .



ПРИМЕНЕНИЕ МКО

Обозначим

- $V_{l,m} = V_l \cap E_m$ – пересечение конечного элемента с конечным объемом
- $\Gamma_{l,m}^v = \Gamma_l \cap E_m$ – пересечение границы конечного объема с конечным элементом
- $\Gamma_{l,m}^e = \Gamma_m \cap V_l$ – пересечение границы конечного элемента с конечным объемом



ПРИМЕНЕНИЕ МКО

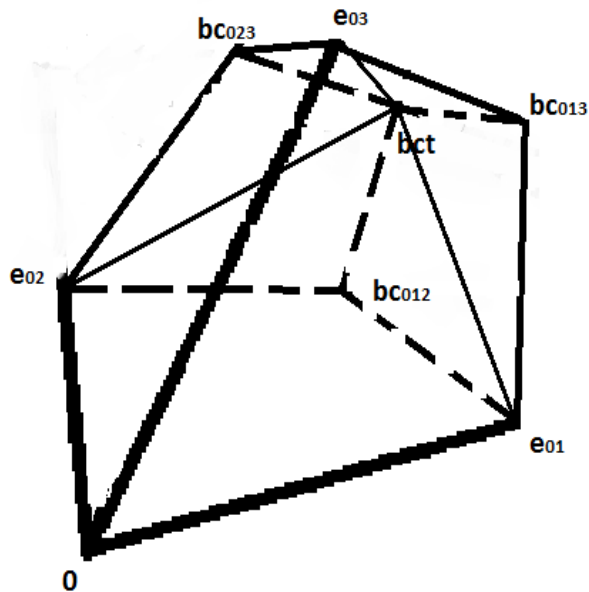
- $$\sum_{m'} \int_{V_{l,m'}} c(T^{n+1} - T^n) dx dy dz$$
$$= \sum_{m'} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Gamma_{l,m'}^v} \frac{\partial T}{\partial n} dr dt + \sum_{m'} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Gamma_{l,m'}^e} \frac{\partial T}{\partial n} dr dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{V_{l,m'}} f(x, y, z, t) dx dy dz dt.$$

Осуществляем переход к локальным матрицам для каждого V_l .

- $$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Gamma_{l,m'}^v} \frac{\partial T}{\partial n} dr dt.$$
- $$\int_{V_{l,m'}} c(T^{n+1} - T^n) dx dy dz.$$
- $$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{V_{l,m'}} f(x, y, z, t) dx dy dz dt.$$



ПРИМЕНЕНИЕ МКО



$$\Gamma_{01} = [e_{01}, bc_{012}, bct, bc_{013}],$$

$$\Gamma_{02} = [e_{02}, bc_{012}, bct, bc_{023}],$$

$$\Gamma_{03} = [e_{03}, bc_{013}, bct, bc_{023}].$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Gamma_{l,n+1}^V} \frac{\partial T}{\partial n} d\Gamma dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Gamma_{01}} \frac{\partial T}{\partial n} d\Gamma dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Gamma_{02}} \frac{\partial T}{\partial n} d\Gamma dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Gamma_{03}} \frac{\partial T}{\partial n} d\Gamma dt$$



ПРИМЕНЕНИЕ МКО

$$\oint_{\Gamma_{01}} \frac{\partial T^{t_{n+1}}}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma_{01}^1} \frac{\partial T^{t_{n+1}}}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_{01}^2} \frac{\partial T^{t_{n+1}}}{\partial n} d\Gamma = S_{\Gamma_{01}^1} \vec{n}_{\Gamma_{01}^1} \cdot \nabla T^{t_{n+1}} + S_{\Gamma_{01}^2} \vec{n}_{\Gamma_{01}^2} \cdot \nabla T^{t_{n+1}} = \frac{1}{2} [w_1 - w_3] \times w_2 \cdot \nabla T^{t_{n+1}} = \frac{1}{24} [2v_2 \times v_3 + v_1 \times v_2 + v_3 \times v_1] \cdot \nabla T^{t_{n+1}}$$

$$\int_{\Gamma_{02}} \frac{\partial T^{t_{n+1}}}{\partial n} d\Gamma = \frac{1}{24} [2v_3 \times v_1 + v_2 \times v_3 + v_1 \times v_2] \cdot \nabla T^{t_{n+1}}.$$

$$\int_{\Gamma_{03}} \frac{\partial T^{t_{n+1}}}{\partial n} d\Gamma = \frac{1}{24} [2v_1 \times v_2 + v_2 \times v_3 + v_3 \times v_1] \cdot \nabla T^{t_{n+1}}.$$



ПРИМЕНЕНИЕ МКО

$$\circ L^n = \frac{\det}{6} \begin{bmatrix} \varphi_0^{fe} \cdot \varphi_0^{fe} & \varphi_0^{fe} \cdot \varphi_1^{fe} & \varphi_0^{fe} \cdot \varphi_2^{fe} & \varphi_0^{fe} \cdot \varphi_3^{fe} \\ \varphi_1^{fe} \cdot \varphi_0^{fe} & \varphi_1^{fe} \cdot \varphi_1^{fe} & \varphi_1^{fe} \cdot \varphi_2^{fe} & \varphi_1^{fe} \cdot \varphi_3^{fe} \\ \varphi_2^{fe} \cdot \varphi_0^{fe} & \varphi_2^{fe} \cdot \varphi_1^{fe} & \varphi_2^{fe} \cdot \varphi_2^{fe} & \varphi_2^{fe} \cdot \varphi_3^{fe} \\ \varphi_3^{fe} \cdot \varphi_0^{fe} & \varphi_3^{fe} \cdot \varphi_1^{fe} & \varphi_3^{fe} \cdot \varphi_2^{fe} & \varphi_3^{fe} \cdot \varphi_3^{fe} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0^{t_{n+1}} \\ T_1^{t_{n+1}} \\ T_2^{t_{n+1}} \\ T_3^{t_{n+1}} \end{bmatrix}$$

- $\circ \varphi_0^m = \frac{1}{\det} [v_1 \times v_2 + v_2 \times v_3 + v_3 \times v_1]$
- $\circ \varphi_1^m = -\frac{1}{\det} v_2 \times v_3,$
- $\circ \varphi_2^m = -\frac{1}{\det} v_3 \times v_1,$
- $\circ \varphi_3^m = -\frac{1}{\det} v_1 \times v_2.$



ПРИМЕНЕНИЕ МКО

○

$$F^n = -\frac{\det}{6} \begin{bmatrix} \varphi_0^{fe} \cdot \varphi_0^{fe} & \varphi_0^{fe} \cdot \varphi_1^{fe} & \varphi_0^{fe} \cdot \varphi_2^{fe} & \varphi_0^{fe} \cdot \varphi_3^{fe} \\ \varphi_1^{fe} \cdot \varphi_0^{fe} & \varphi_1^{fe} \cdot \varphi_1^{fe} & \varphi_1^{fe} \cdot \varphi_2^{fe} & \varphi_1^{fe} \cdot \varphi_3^{fe} \\ \varphi_2^{fe} \cdot \varphi_0^{fe} & \varphi_2^{fe} \cdot \varphi_1^{fe} & \varphi_2^{fe} \cdot \varphi_2^{fe} & \varphi_2^{fe} \cdot \varphi_3^{fe} \\ \varphi_3^{fe} \cdot \varphi_0^{fe} & \varphi_3^{fe} \cdot \varphi_1^{fe} & \varphi_3^{fe} \cdot \varphi_2^{fe} & \varphi_3^{fe} \cdot \varphi_3^{fe} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0^{t_n} \\ T_1^{t_n} \\ T_2^{t_n} \\ T_3^{t_n} \end{bmatrix}$$



ПРИМЕНЕНИЕ МКО

○
$$\int_{V_{l,m'}} c(T^{n+1} - T^n) dx dy dz = c \frac{det}{24} [T_i^{t_{n+1}} + T_i^{t_n}]$$

$$L^c = \frac{det}{24} \begin{bmatrix} C & & & \\ & C & & \\ & & C & \\ & & & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0^{t_{n+1}} \\ T_1^{t_{n+1}} \\ T_2^{t_{n+1}} \\ T_3^{t_{n+1}} \end{bmatrix}$$

$$F^c = -\frac{det}{24} \begin{bmatrix} C & & & \\ & C & & \\ & & C & \\ & & & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0^{t_n} \\ T_1^{t_n} \\ T_2^{t_n} \\ T_3^{t_n} \end{bmatrix}$$



ПРИМЕНЕНИЕ МКО



$$\int_{V_{l,m'}} c(T^{n+1} - T^n) dx dy dz$$

$$F^f = \frac{\det}{48} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0^{t_n} \\ f_1^{t_n} \\ f_2^{t_n} \\ f_3^{t_n} \end{bmatrix} + \frac{\det}{48} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0^{t_{n+1}} \\ f_1^{t_{n+1}} \\ f_2^{t_{n+1}} \\ f_3^{t_{n+1}} \end{bmatrix}$$



ПРИМЕНЕНИЕ МКО

Учет граничных условий второго рода (Неймана)



$$B_m^N = \frac{\det}{6} \begin{bmatrix} \|\varphi_3^m\|v_{bc}(\cdot, r_0) & \|\varphi_2^m\|v_{bc}(\cdot, r_0) & \|\varphi_1^m\|v_{bc}(\cdot, r_0) & 0 \\ \|\varphi_3^m\|v_{bc}(\cdot, r_1) & \|\varphi_2^m\|v_{bc}(\cdot, r_1) & 0 & \|\varphi_0^m\|v_{bc}(\cdot, r_1) \\ \|\varphi_3^m\|v_{bc}(\cdot, r_2) & 0 & \|\varphi_1^m\|v_{bc}(\cdot, r_2) & \|\varphi_0^m\|v_{bc}(\cdot, r_2) \\ 0 & \|\varphi_2^m\|v_{bc}(\cdot, r_3) & \|\varphi_1^m\|v_{bc}(\cdot, r_3) & \|\varphi_0^m\|v_{bc}(\cdot, r_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} bc_g([0,1,2]) \\ bc_g([0,1,3]) \\ bc_g([0,2,3]) \\ bc_g([1,2,3]) \end{bmatrix}$$

Где

- bc_g - функция, которая для каждой грани тетраэдров определяет тип граничного условия.
- bc_p - функция, которая для каждого узла сетки определяет принадлежит ли узел границе расчетной области на которой задано условие Дирихле.
- v_{bc} - функция, которая по координате точки \vec{x} и значениям функций bc_g или bc_p может определить значение граничного условия в \vec{x} .



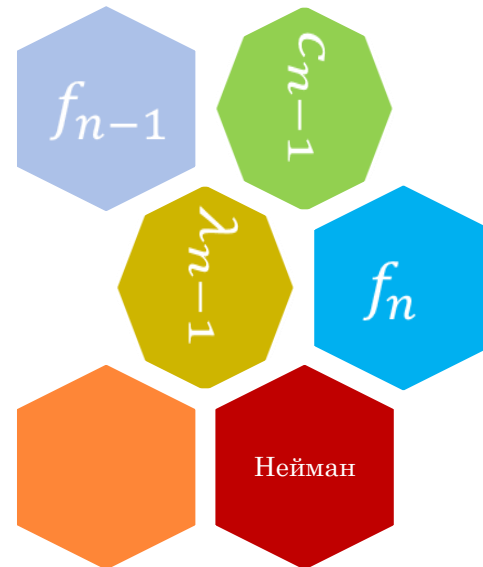
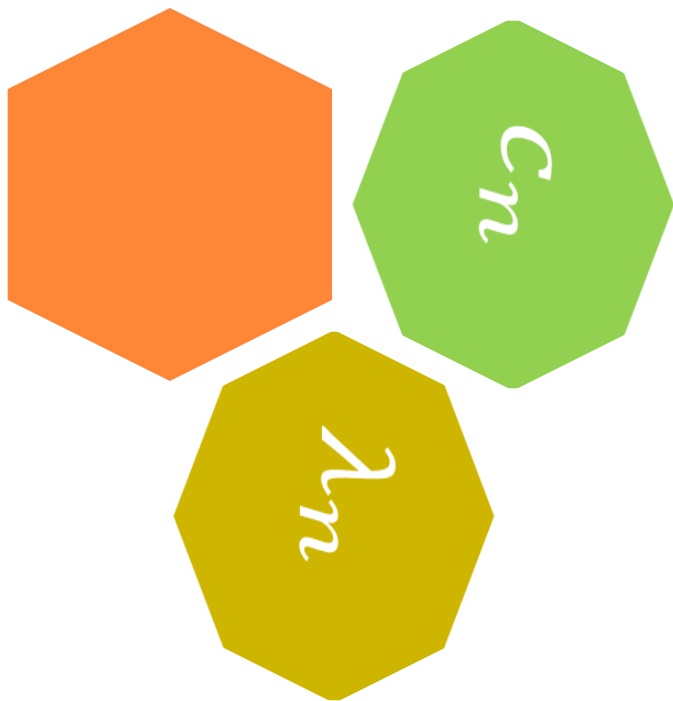
ТЕХНОЛОГИИ

Зачем было представлять задачу в таком виде, с разбиением на множество локальных матриц?

1. Я могу пересчитывать только ту часть которая меняется на каждом временном шагу
2. Я могу использовать полученные матрицы в других сочетаниях – получать практически бесплатно решение других задач

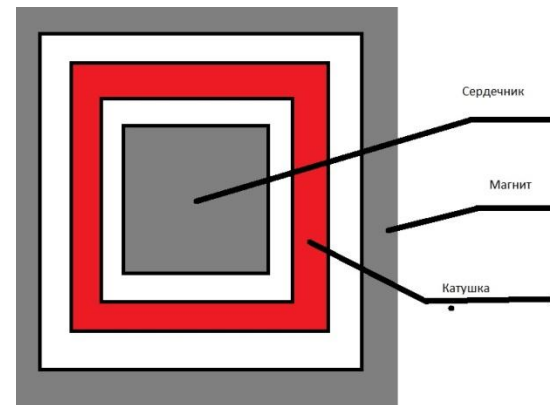


ТЕХНОЛОГИИ



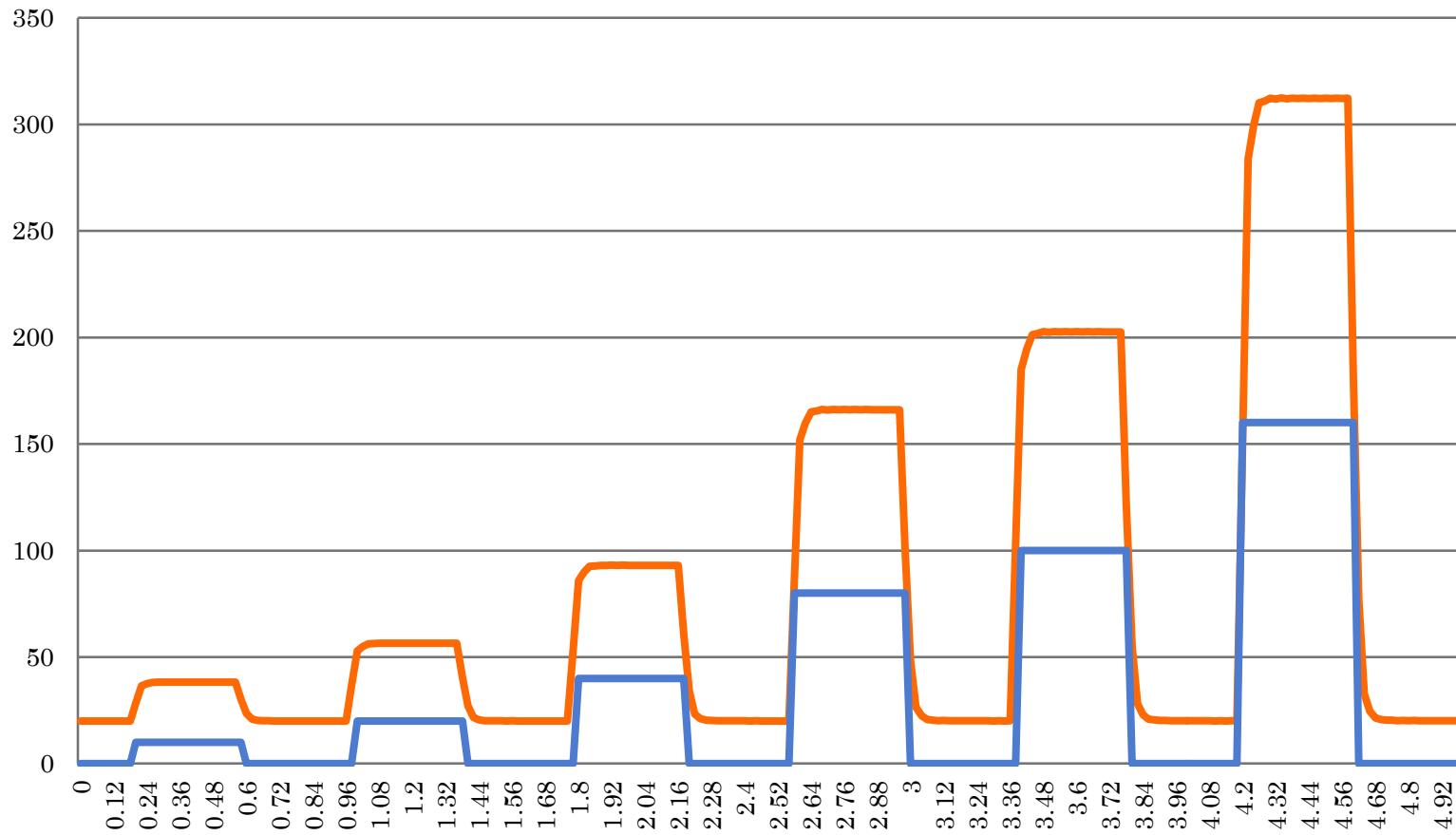
ГЕОМЕТРИЯ ОБЛАСТИ

Мы используем на первой фазе достаточно грубое приближение динамика, призванное показать качественную картину, поэтому область является составленной из прямоугольников.



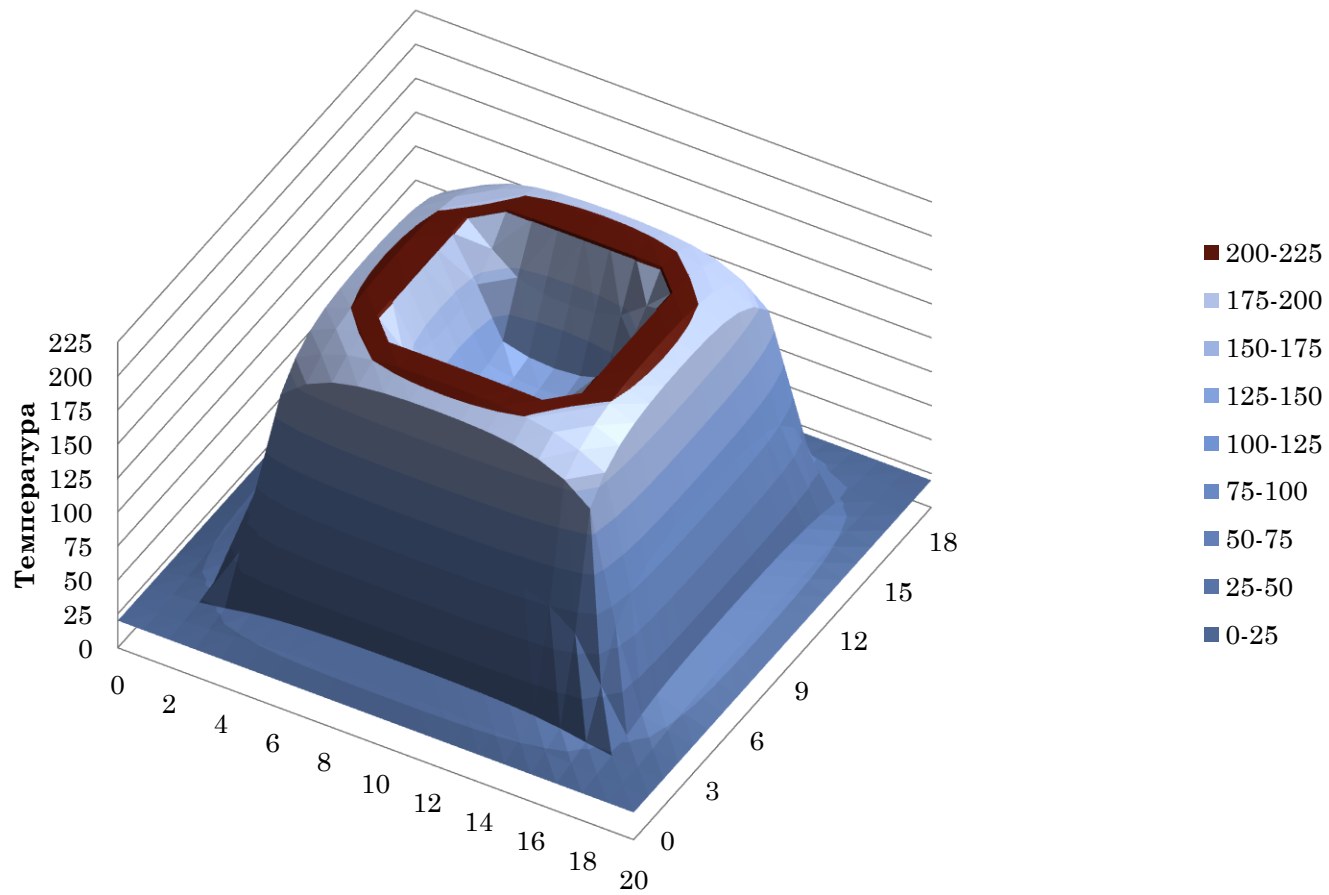
РЕЗУЛЬТАТЫ

Температура и значения g



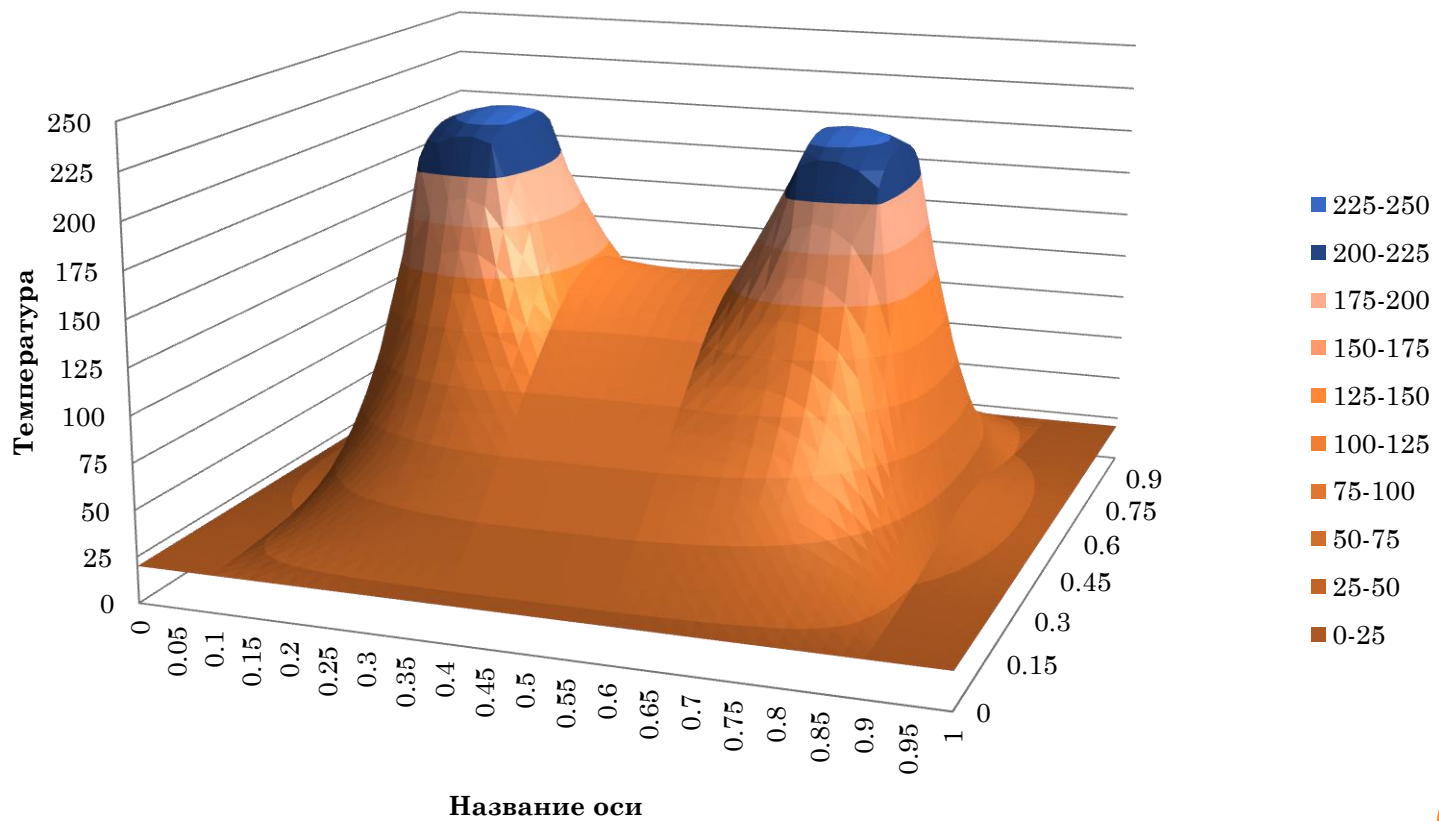
РЕЗУЛЬТАТЫ

Температура при $t=3.5$ и $z=0.5$



РЕЗУЛЬТАТЫ

Распределение температуры $t=3.5$, $y = 0.5$



ВЫВОДЫ

Используя приведенные технологии и подходы за ограниченное время создан пакет

1. Реализующий новый подход
2. Отвечающий требованиям по качеству предъявляемым к продукту
3. Расширяющий нашу уже существующую систему БСМ

