



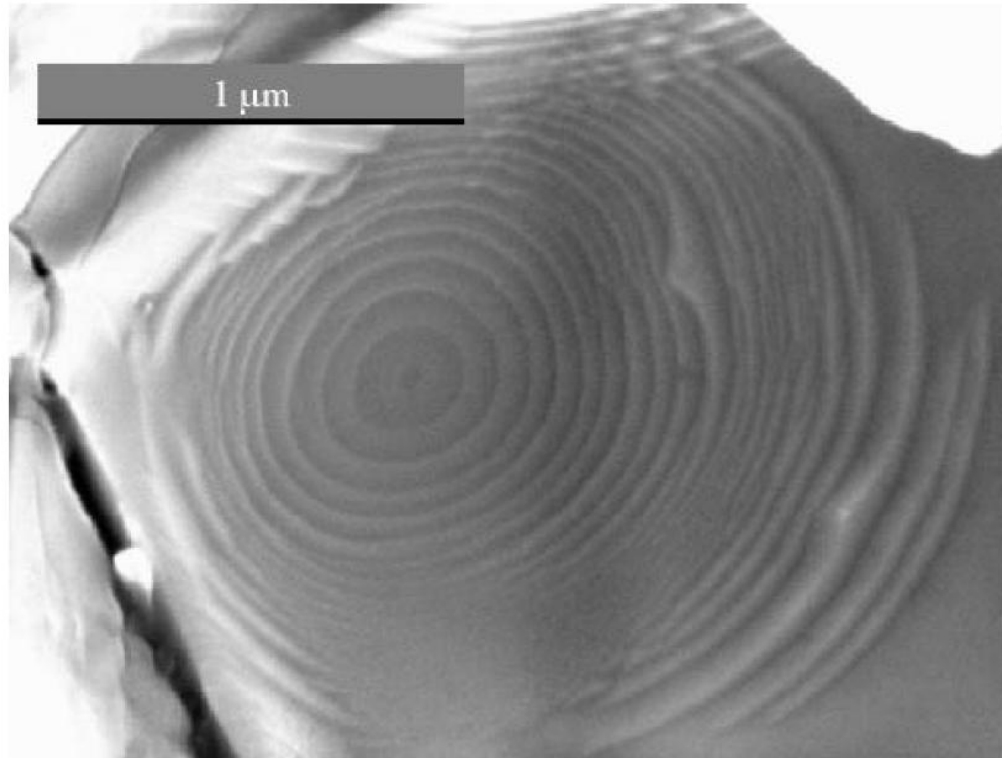
XVI Всероссийская Конференция-школа молодых исследователей "Современные проблемы математического моделирования", 14-19 сентября 2015 г.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАССЕЯНИЯ УПРУГИХ ВОЛН НА КРУГОВЫХ ТРЕЩИНАХ

Голуб М.В., Дорошенко О.В.,
Фоменко С.И.

*Институт математики, механики и информатики
Кубанский государственный университет, г. Краснодар*

Вид интерфейсных трещин

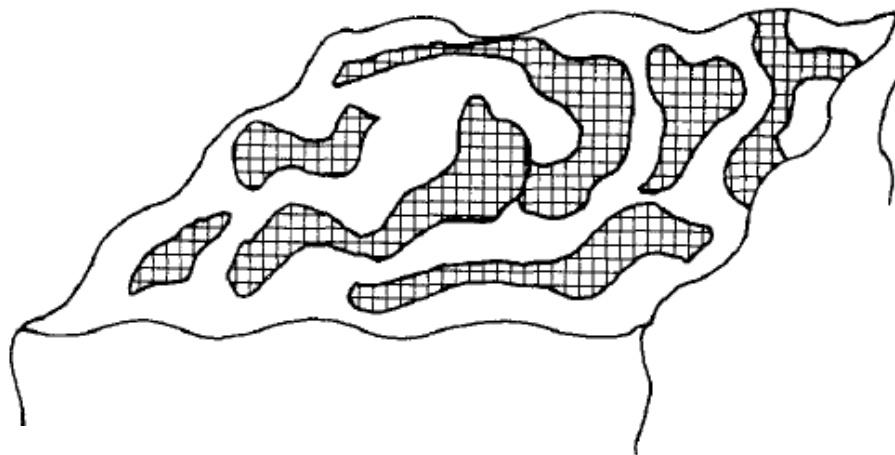


Размер интерфейсных
микротрещин от 100 nm

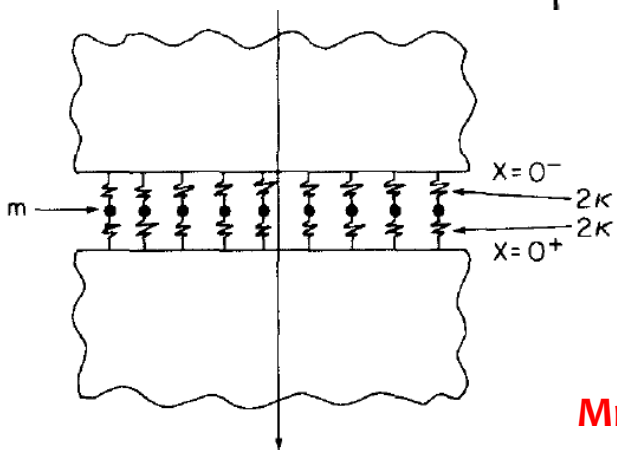
Sunder R., Porter W.J., Ashbaugh N.E. Fatigue voids and their significance, 2002



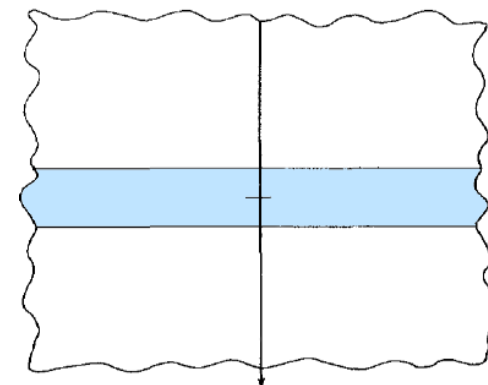
Мотивация: моделирование неидеального контакта



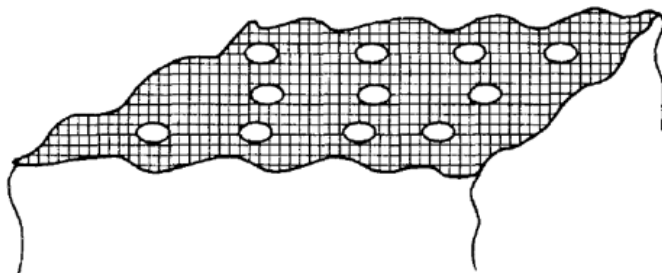
Пружинная модель



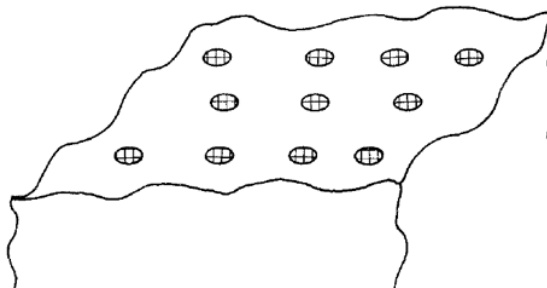
Вязкоупругий слой



Микротрещины

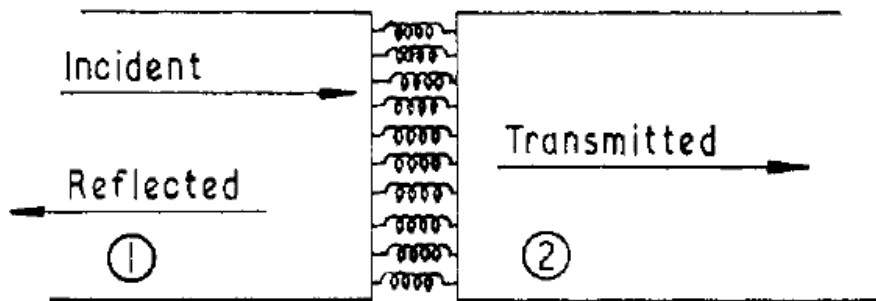


Пятна контакта



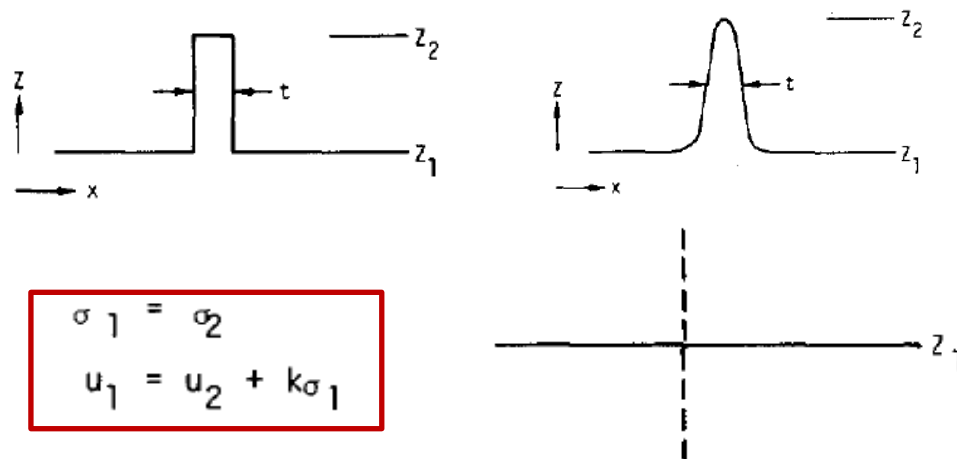
Пружинная модель при описании отслоения

Tattersall H.G. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 1973

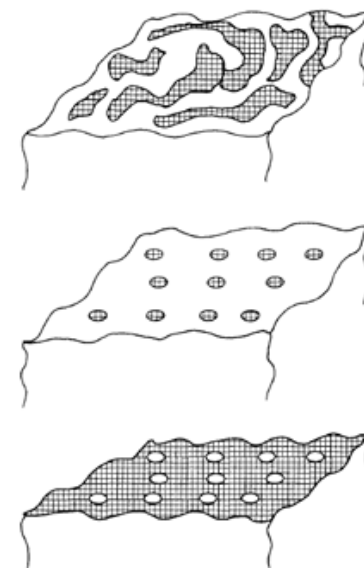
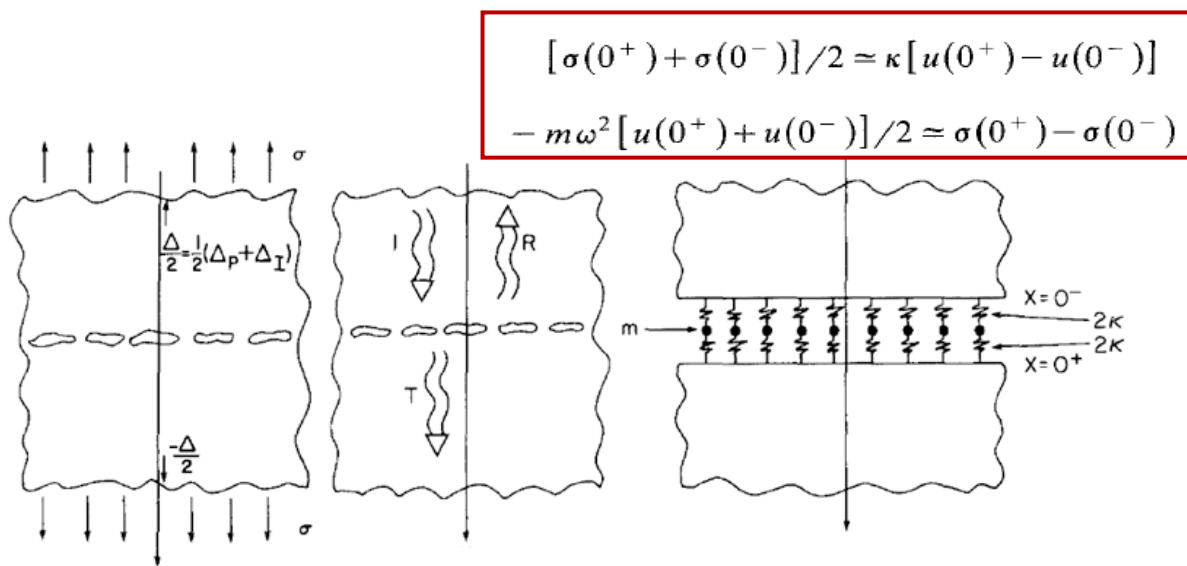


$$K = \frac{\text{приращение напряжений в области контакта}}{\text{увеличение расстояния между поверхностями}}$$

Alers G. Graham L. *Ultrasonics Symposium*, 1975



Baik J. M., Thompson R. B. *Journal of Nondestructive Evaluation*, 1984



Пружинная модель при описании неидеального контакта

Модель Баика-Томпсона

$$\tau_1 - \tau_2 = \frac{1}{2} \mathbf{G} (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2),$$

$$\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{F} \frac{1}{2} (\tau_1 - \tau_2),$$

Baik J. M., Thompson R. B. Journal of Nondestructive Evaluation, 1984

Модель Рохлина-Ванга

$$\tau_1 - \tau_2 = \frac{1}{2} \mathbf{G} (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) + \mathbf{B} \tau_2,$$

$$\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \frac{1}{2} \mathbf{F} (\tau_1 - \tau_2) + \mathbf{A} \mathbf{u}_2,$$

Rokhlin S. I., Wang Y. J. Journal of the Acoustical Society of America, 1992

Граничные условия пружинного типа (для отслоений)

$$\sigma_{ij} n_j \Big|_{z=0-0} = \sigma_{ij} n_j \Big|_{z=0+0} = \kappa_{ij} \left(u_j \Big|_{z=0-0} - u_j \Big|_{z=0+0} \right)$$



Распределение микротрещин

Полный коэффициент прохождения

$$\tilde{T}_s = T_s^- + R_s^+ = T_s^- \left(1 - \frac{1}{2} C \mathbf{p}_s \cdot \overline{\Delta \mathbf{u}}_s \right)$$

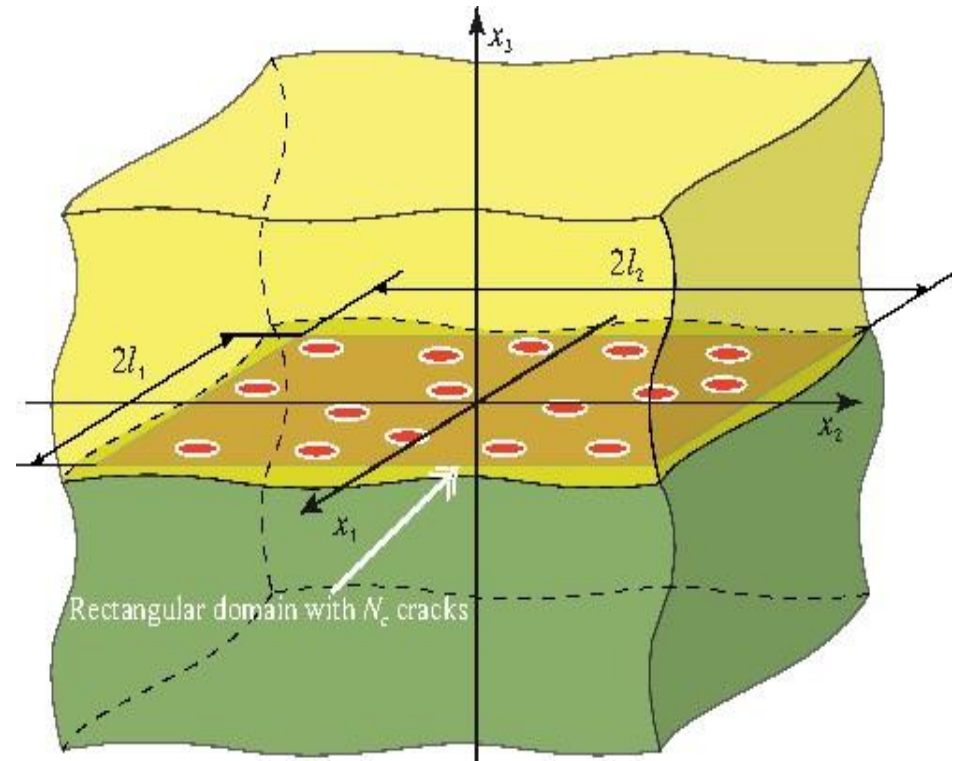
Golub M. V., Boström A. Wave Motion, 2011

Среднее скачка смещений на
одиночной трещине

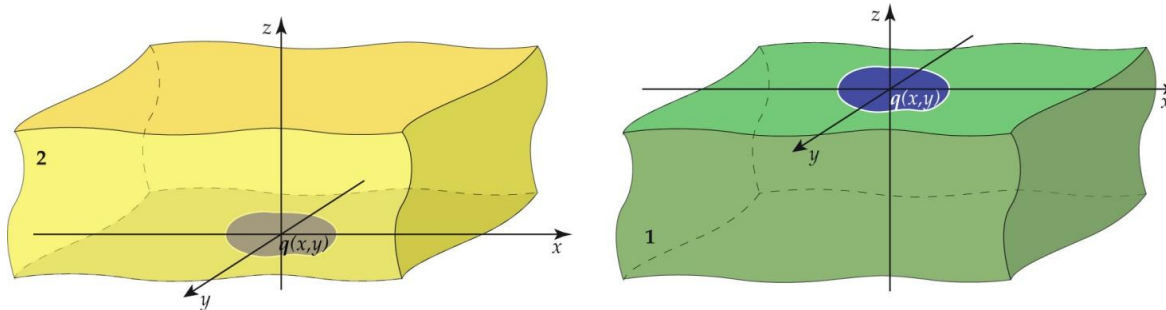
$$\overline{\Delta \mathbf{u}}_s = \frac{1}{S(\Omega)} \iint_{\Omega} \Delta \mathbf{u}_s(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$S(\Omega)$ — площадь одиночной трещины

$$C = \frac{S_{\text{трещ}}}{S_{\text{общ}}}$$



Поверхностная нагрузка в круговой области



$$(\lambda + \mu)\nabla\text{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mu\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}) + \rho\omega^2\mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0$$

$$\mathbf{u}(r, z, \theta) = \sum_{n=1}^2 \sum_{m=0}^M \mathbf{u}^{nm}(r, z) \mathbf{Y}^{nm}(\theta)$$

$$\mathbf{Y}^{1m}(\theta) = \text{diag}(\cos m\theta, \sin m\theta, \cos m\theta)$$

$$\mathbf{Y}^{2m}(\theta) = \text{diag}(\sin m\theta, -\cos m\theta, \sin m\theta)$$

$$\mathbf{w}^{nm} = (u_r^{nm} + u_\theta^{nm}, u_r^{nm} + u_\theta^{nm}, u_z^{nm})$$

$$\mathbf{w}^{\text{sc},nm}(r, z) = \begin{cases} \mathbf{w}_1^{\text{sc},nm}(r, z) = \int_0^\infty \mathbf{J}^m(\alpha r) \mathbf{K}_1(\alpha, z) \mathbf{Q}^{nm}(\alpha) \alpha d\alpha, & z < 0 \\ \mathbf{w}_2^{\text{sc},nm}(r, z) = \int_0^\infty \mathbf{J}^m(\alpha r) \mathbf{K}_2(\alpha, z) \mathbf{Q}^{nm}(\alpha) \alpha d\alpha, & z > 0. \end{cases}$$

$\mathbf{K}_j(\alpha, z)$ – Фурье-символ матрицы Грина, $\mathbf{Q}^{nm}(\alpha)$ – Фурье-символ разложения поверхностной нагрузки $q(r, \theta)$ в ряд вида (1), $\mathbf{J}^m(\alpha r) = \text{diag}\{J_{m+1}(\alpha r), J_{m-1}(\alpha r), J_m(\alpha r)\}$ – диагональная матрица, состоящая из функций Бесселя J_m

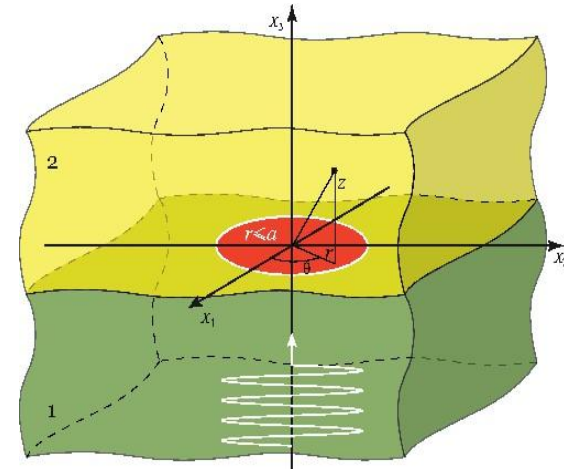
Одинокрая круговая трещина

$$\boldsymbol{\tau}^{\text{sc}}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\tau}^{\text{in}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

Скачок перемещений на берегах трещины (разреза)

$$\Delta \mathbf{w}^{nm}(r, \theta) = \mathbf{w}^{\text{sc}, nm}(r, \theta, 0^-) - \mathbf{w}^{\text{sc}, nm}(r, \theta, 0^+)$$

Применение преобразования Ханкеля к скачку смещений $\Delta \mathbf{w}^{nm}(r, \theta)$ ведет к функциональному уравнению относительно Фурье-символа напряжений на границе раздела сред



$$\mathbf{Q}^{nm}(\alpha) = [\mathbf{K}_1(\alpha, 0) - \mathbf{K}_2(\alpha, 0)]^{-1} \Delta \mathbf{W}^{nm}(\alpha) = \mathbf{L}(\alpha) \Delta \mathbf{W}^{nm}(\alpha)$$

Переформулировка граничных условий в терминах напряжений на границе раздела сред сводит задачу к интегральному уравнению

$$\int_0^{\infty} \mathbf{J}^{nm}(\alpha r) \mathbf{L}(\alpha) \Delta \mathbf{W}^{nm}(\alpha) \alpha d\alpha = -\hat{\boldsymbol{\tau}}^{\text{in}, nm}(r)$$

где $\hat{\boldsymbol{\tau}}^{\text{in}, nm} = (\sigma_{rz}^{nm} + \sigma_{\theta z}^{nm}, \sigma_{rz}^{nm} - \sigma_{\theta z}^{nm}, \sigma_{zz}^{nm})$ – компоненты разложения вектора $\boldsymbol{\tau}$ в ряд Фурье

Krenk and Schmidt, Philosophical Transaction of the Royal Society of London, 1982;
Boström and Ericksson, Philosophical Transaction of the Royal Society of London, 1993;



Одиночная круговая трещина

Неизвестный скачок перемещений на круговой трещине раскладывается в ряд по нормированным присоединенным полиномам Лежандра

$$\Delta w_k^{nm}(r) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta_{kt}^{nm} \phi_{kt}^m(r)$$

$$\phi_{(3/2 \pm 1/2)t}^m(r) = \frac{P_{m+2t+1 \pm 1}^{m \pm 1}(\sqrt{1-r^2/a^2})}{P_{m+2t+1 \pm 1}^m(0)}, \quad \phi_{3t}^m(r) = \frac{P_{m+2t+1}^m(\sqrt{1-r^2/a^2})}{P_{m+2t+1}^m(0)}$$

При $m = 0$ необходима поправка в индексах

Применение схемы Бубнова–Галеркина позволяет произвести дискретизацию и редукцию интегрального уравнения, что приводит к системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{t=0}^T \mathbf{A}_{t't}^m \boldsymbol{\beta}_t^{nm} = -\mathbf{g}_{t'}^{nm}, \quad t' = 0, \dots, T$$

В правой части системы уравнений (3) стоят интегралы

$$g_{it'}^{nm} = \int_0^a \hat{\tau}^{\text{in},nm}(r, 0) \phi_{it'}^m(r) r dr,$$

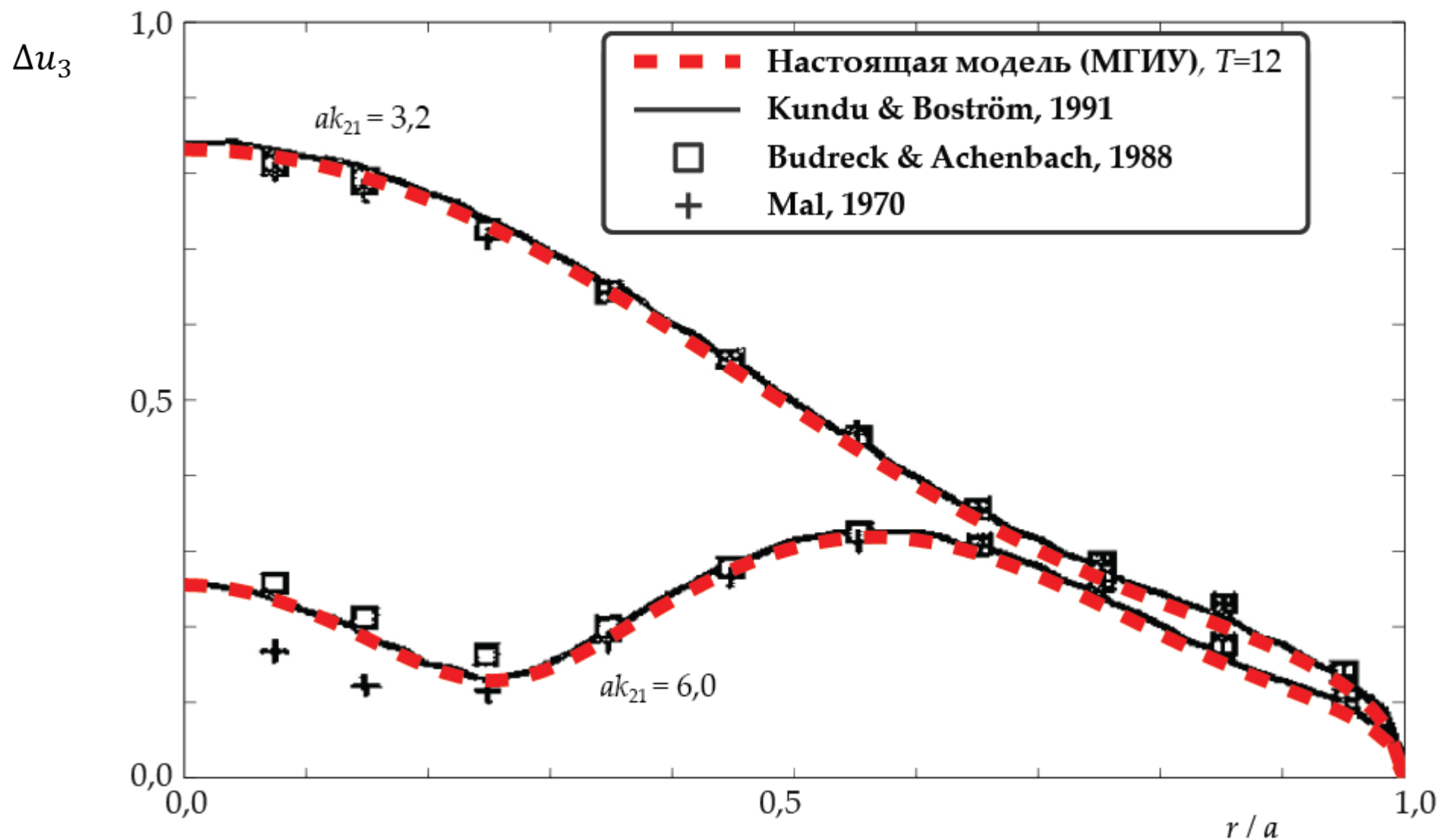
матрица системы состоит из блоков 3×3

$$\mathbf{A}_{t't}^m = \int_0^{\infty} \boldsymbol{\Phi}_{t'}^m(\alpha) \mathbf{L}(\alpha) \boldsymbol{\Phi}_t^m(\alpha) \alpha d\alpha,$$

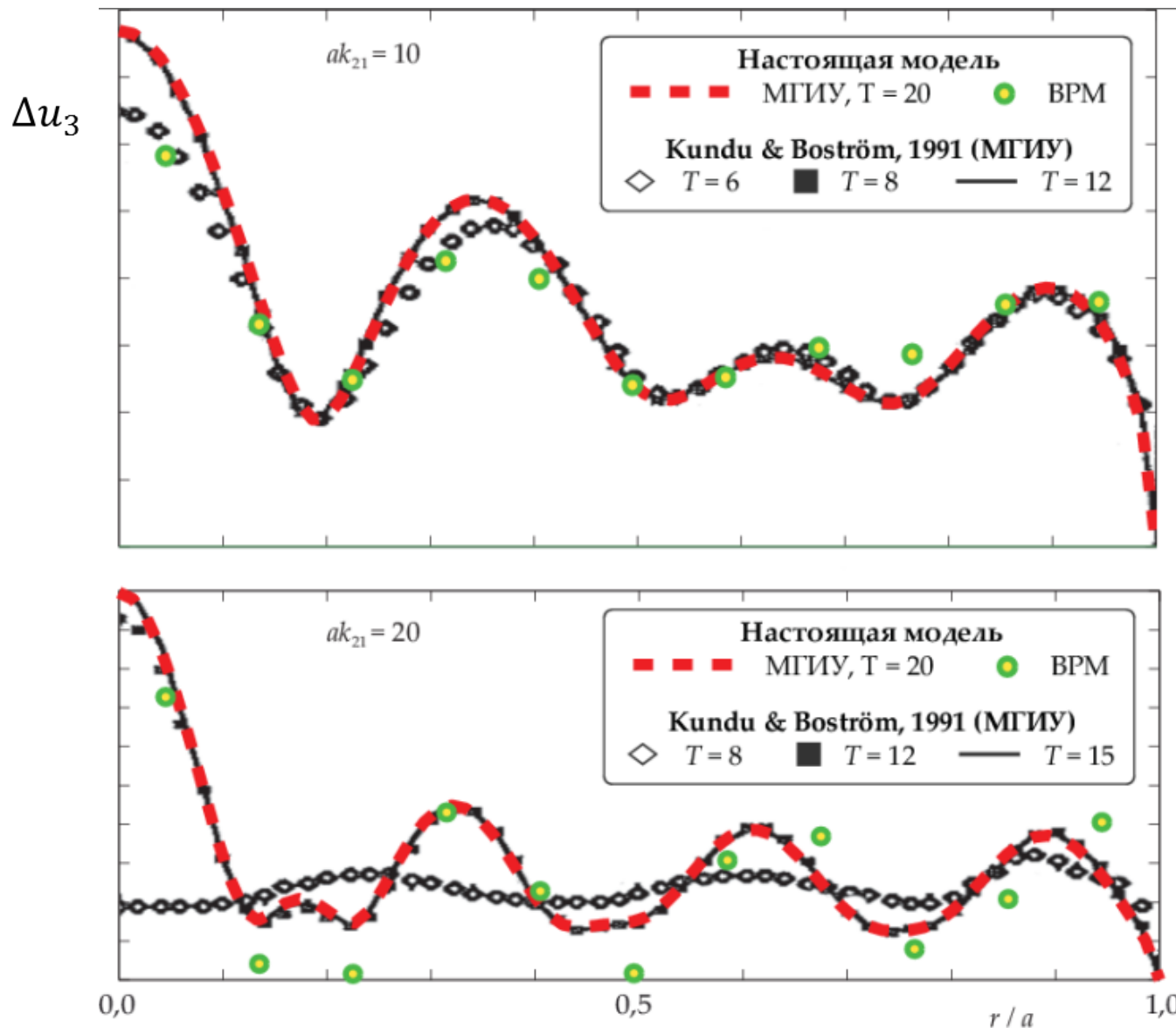
$\boldsymbol{\Phi}_{t'}^m = \text{diag}(\Phi_{1t'}^m, \Phi_{2t'}^m, \Phi_{3t'}^m)$ составлена из преобразований Ханкеля функций $\phi_{kt}^m(r)$.



Сопоставление с другими работами



Сопоставление модели с другими работами

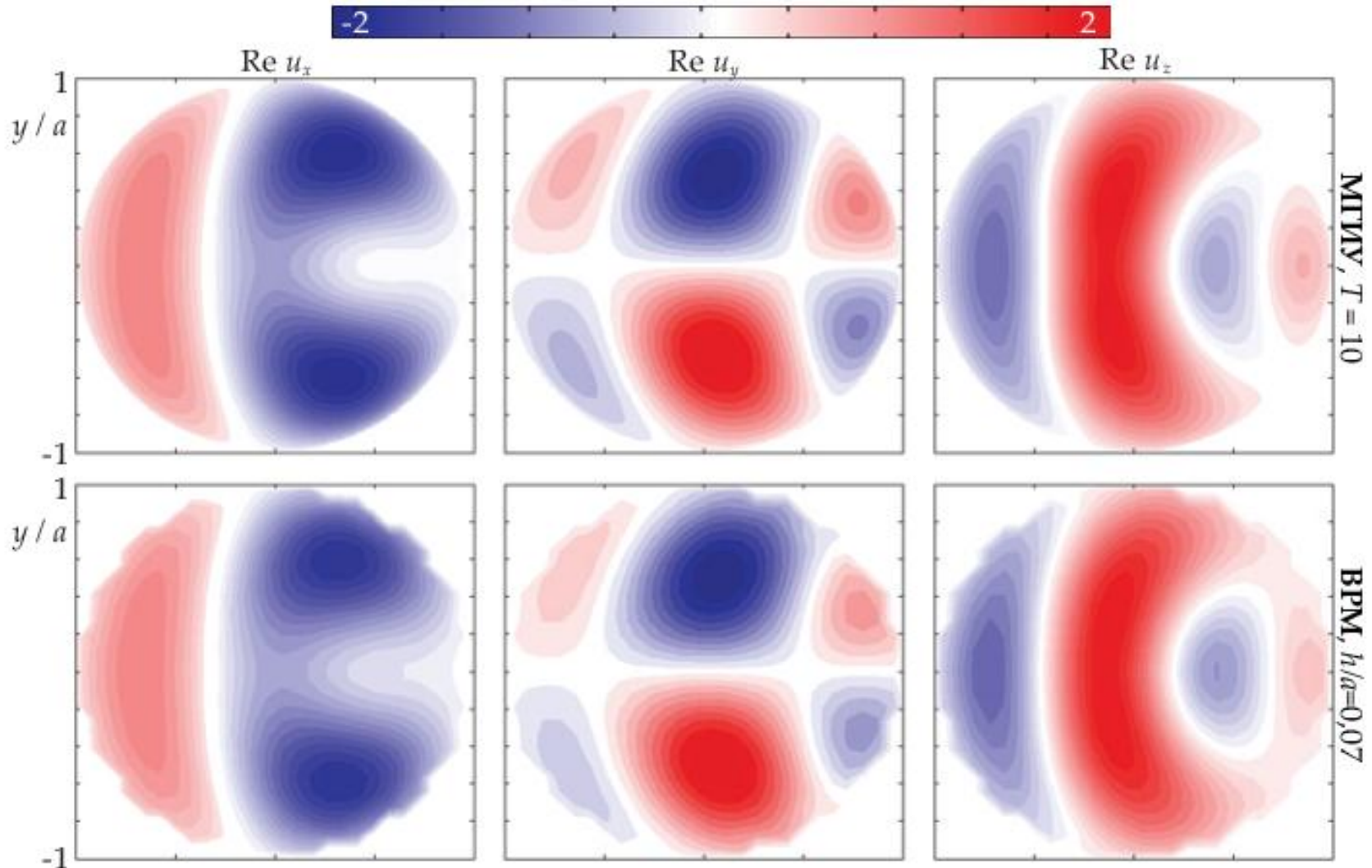


Дополнительное сравнение с вариационно-разностной моделью (BPM), предложенной Е.В. Глушковым и Н.В. Глушковой для трещин произвольной формы

(Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Ехлаков А.В., ПММ, 2002)

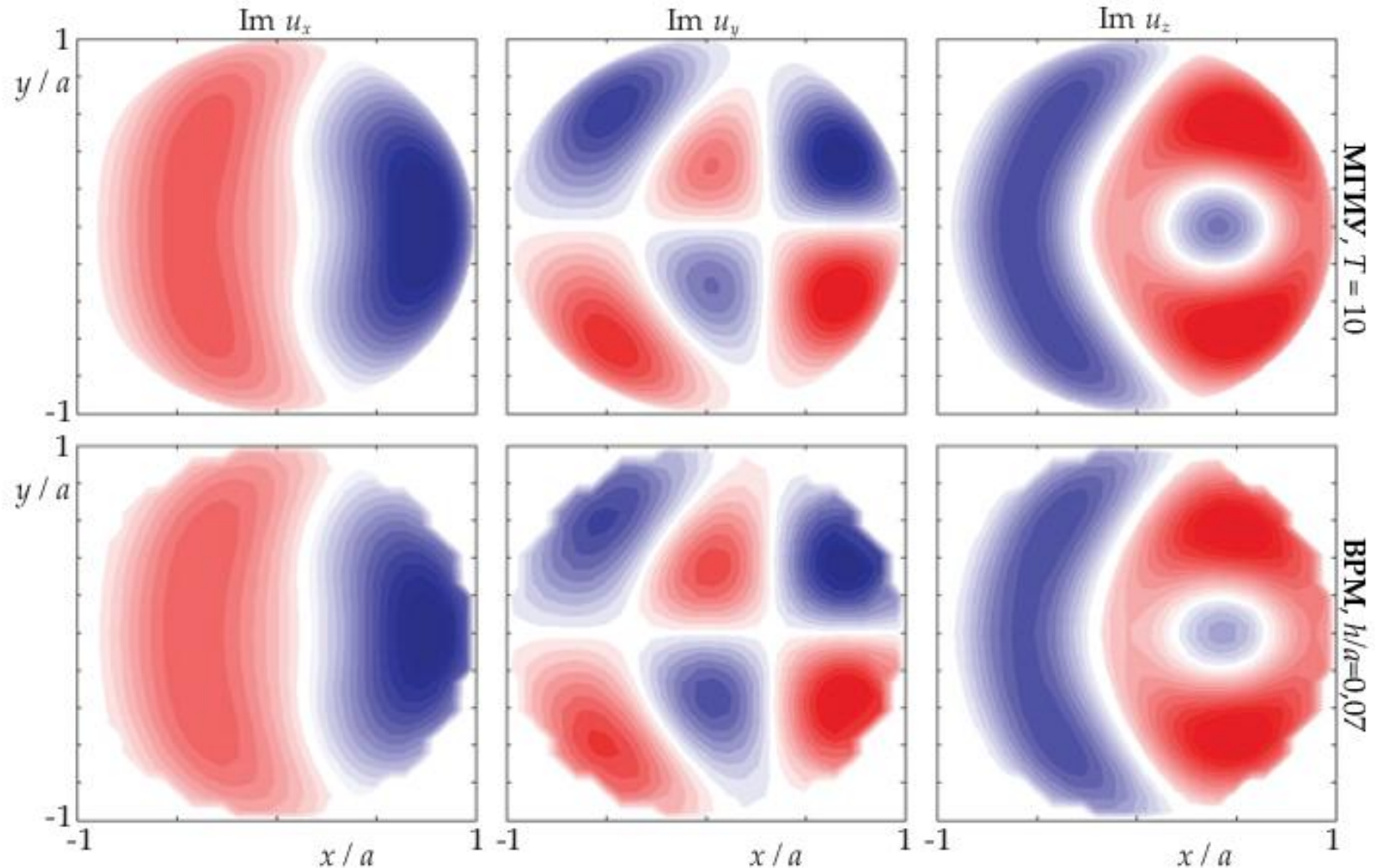


Сопоставление с другими методами



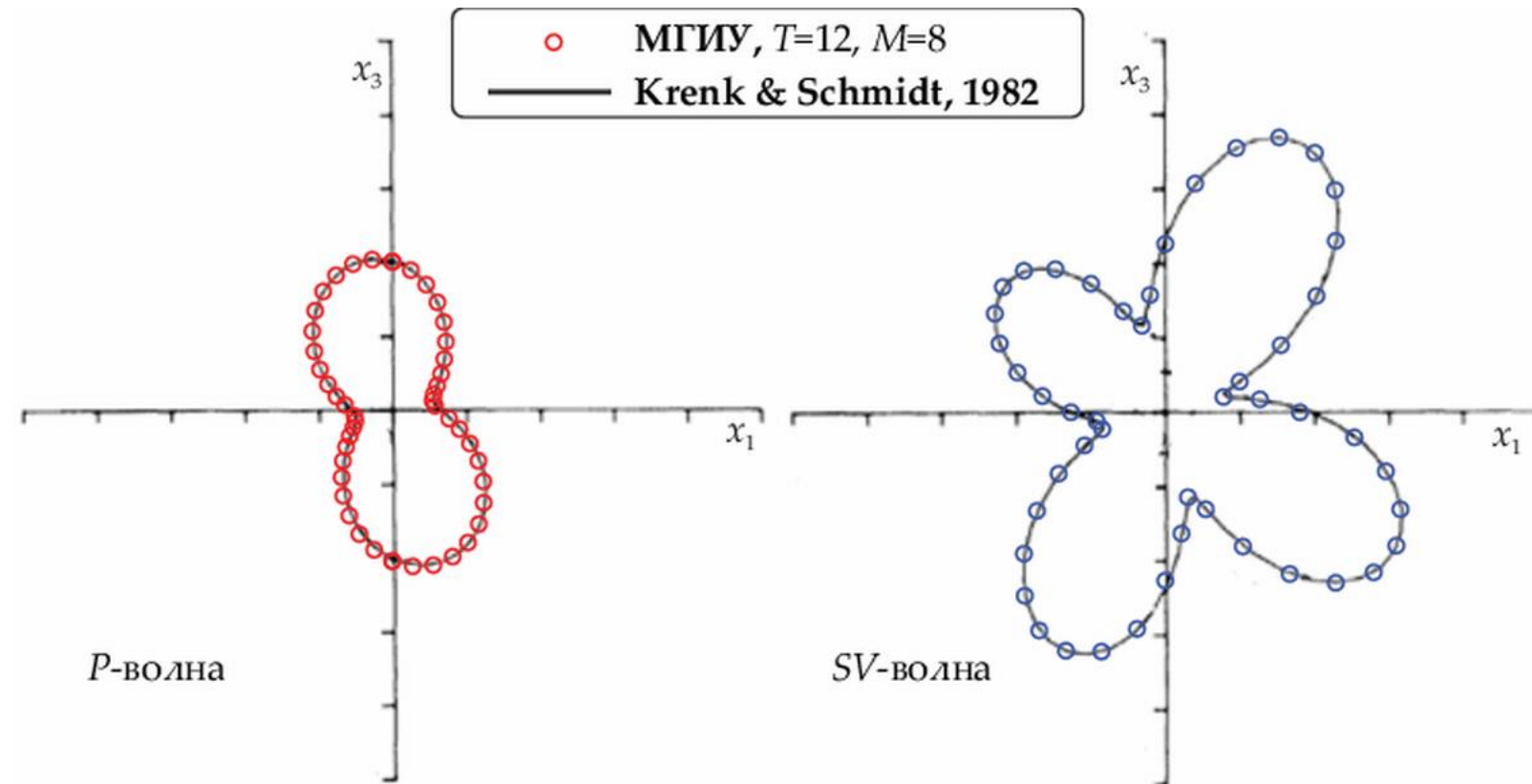
Вещественные части компонент скачка перемещений на круговой трещине в однородном пространстве при падении SV-волны под углом 30° , рассчитанные с помощью метода граничных интегральных уравнений и вариационно-разностного метода, материал - стекло

Сопоставление с другими методами



Мнимые части компонент скачка перемещений на круговой трещине в однородном пространстве при падении SV-волны под углом 30° , рассчитанные с помощью метода граничных интегральных уравнений и вариационно-разностного метода, материал - стекло

Сопоставление модели с другими работами



Сравнение амплитуд рассеянных объемных волн в дальней от трещины зоне при падении Р-волны под углом 45

Krenk and Schmidt, Philosophical Transaction of the Royal Society of London, 1982



Асимптотика для одиночной круговой микротрещины

используется следующее разложение ядра интегрального уравнения $\mathbf{L}(\alpha) = \alpha \mathbf{L}_{as} + \tilde{\mathbf{L}}(\alpha)$,
 где $\tilde{\mathbf{L}}(\alpha) \sim O(\alpha^{-1})$ при $\alpha \rightarrow \infty$

Подстановка разложения в систему позволяет вычислять элементы в правой части

блок $\tilde{\mathbf{A}}_{tt}^m = \int_0^\infty \Phi_{t'}^m(\alpha) \mathbf{L}_{as} \Phi_t^m(\alpha) \alpha^2 d\alpha$ может быть вычислен аналитически

блок $\int_0^\infty \Phi_{t'}^m(\alpha) \tilde{\mathbf{L}}(\alpha) \Phi_t^m(\alpha) \alpha d\alpha$ принимает малые значения при $\omega a \ll 1$

Например, для падающей под нормальным углом P -волны $\hat{\tau}_1^{in, nm} = f_1 \begin{cases} (0, 0, 1), & n = 1, m = 0 \\ (0, 0, 0), & \text{иначе} \end{cases}$

а асимптотическое решение имеет вид $\Delta w_k^{as, P} = \hat{\beta}_{k0}^{10} \phi_{k0}^0$

$$\hat{\beta}_{10}^{10} = f_1 \frac{20am_3(m_1^2 - m_3^3)}{4\pi^2 m_1^2 - 15m_3^2},$$

$$\hat{\beta}_{20}^{10} = f_1 \frac{20am_3(m_1^2 - m_3^2)}{4\pi^2 m_1^2 - 15m_3^2},$$

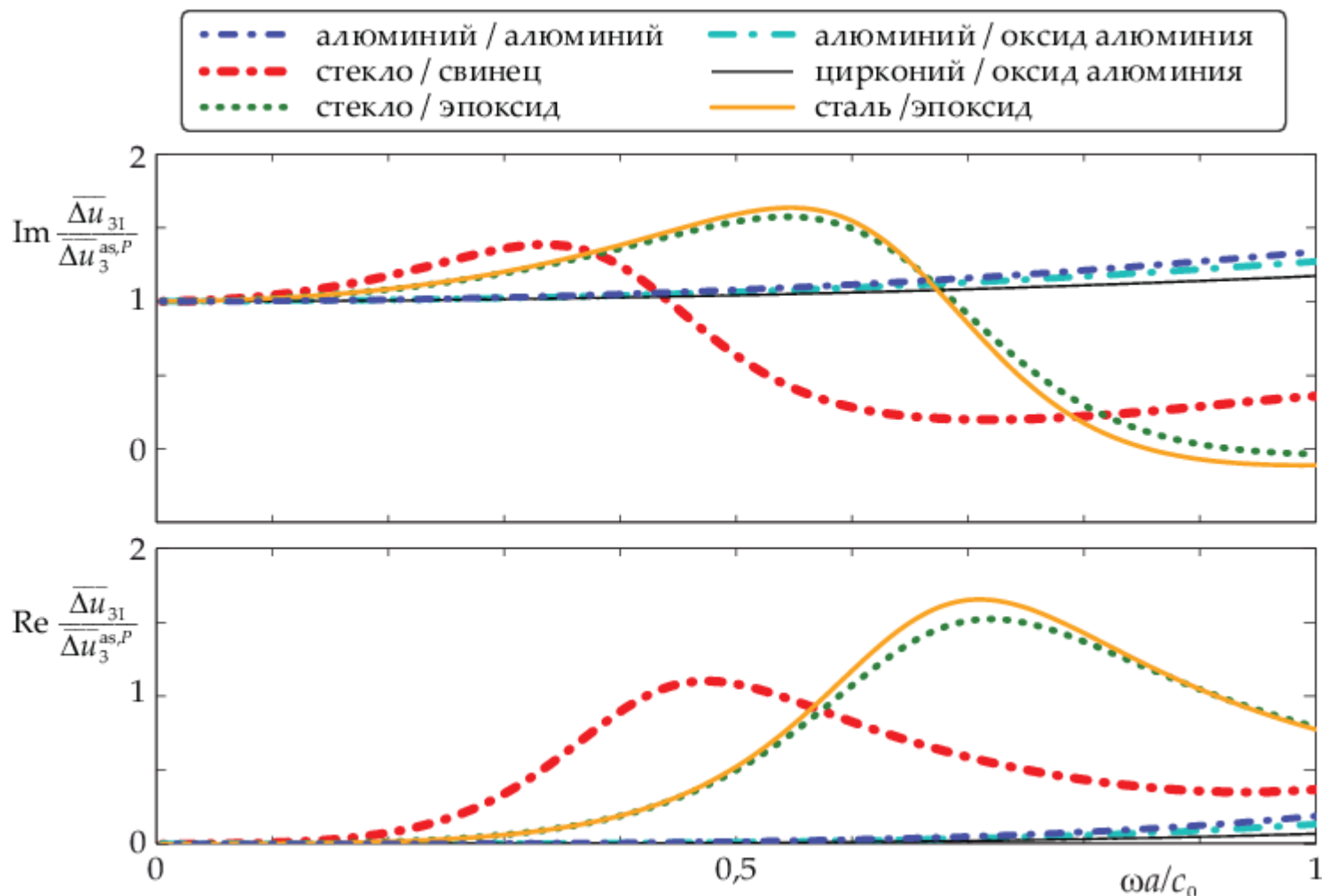
$$\hat{\beta}_{30}^{10} = f_1 \frac{8\pi m_1(m_1^2 - m_3^2)}{4\pi^2 m_1^2 - 15m_3^2}.$$

$$m_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\mu_1(\lambda_1 + \mu_1)} + \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\mu_2(\lambda_2 + \mu_2)} \right),$$

$$m_2 = \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right), \quad m_3 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda_1 + \mu_1} - \frac{1}{\lambda_2 + \mu_2} \right)$$



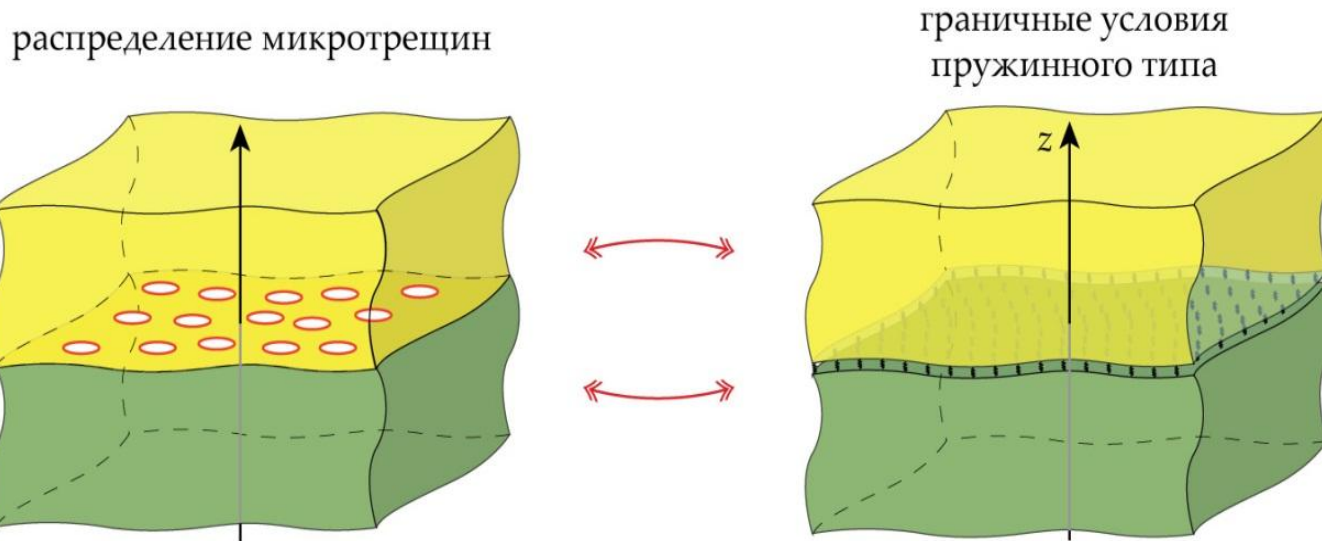
Среднее значение скачка смещений



Вертикальная компонента скачка перемещений на круговой трещине для различных материалов (отношение численного решения к асимптотическому)



Моделирование неидеального контакта между материалами



Граничные условия пружинного типа

$$\boldsymbol{\tau}_n(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{u}_{n-}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}_{n+}(\boldsymbol{x})), \quad \text{при } z = 0$$

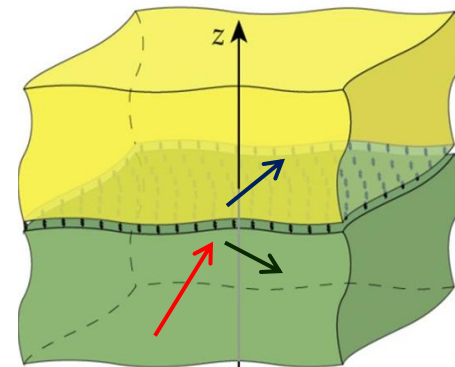
$\boldsymbol{\kappa}$ – матрица жесткостей 3×3 , \boldsymbol{n}_{\pm} – внешняя и внутренняя нормали к поверхности в рассматриваемой точке \boldsymbol{x} , $\boldsymbol{\tau}_n$ – нормальные и касательные компоненты вектора напряжений в точке \boldsymbol{x} , \boldsymbol{u} – вектор перемещений.

Прошедшие и отраженные плоские волны в пружинной модели

Рассмотрим отдельно падающие на интерфейс P ($s=1$) и SV ($s=2$) плоскую волну.

Решение задачи имеет вид

$$\mathbf{u}_s^{\mathbf{k}} = \begin{cases} \mathbf{p}_s (e^{ik_{s1}z} + R_s^{\mathbf{k}} e^{-ik_{s1}z}), & z < 0 \\ \mathbf{p}_s T_s^{\mathbf{k}} e^{ik_{s2}z}, & z > 0. \end{cases}$$



$$R_s^{\mathbf{k}} = \frac{ic_{s1}k_{s1} + \kappa_s(c_{s1}k_{s1} - c_{s2}k_{s2})}{ic_{s1}k_{s1}c_{s2}k_{s2} + \kappa_s(c_{s1}k_{s1} + c_{s2}k_{s2})},$$
$$T_s^{\mathbf{k}} = \frac{2\kappa_s c_{s1}k_{s1}}{ic_{s1}k_{s1}c_{s2}k_{s2} + \kappa_s(c_{s1}k_{s1} + c_{s2}k_{s2})},$$

где s – тип падающей волны,

k_{sj} – волновые числа, $c_{1j} = \lambda_j + 2\mu_j$, $c_{2j} = \mu_j$, j – индекс полупространства.

κ_s – диагональный элемент матрицы жесткости \mathbf{k}

\mathbf{p}_s – вектор, определяющий амплитуду падающей волны

Осреднение плоских волн в модели трещиноватых сред

Рассматриваются стохастически распределенные микротрещины

На поврежденный интерфейс падают отдельно плоские P ($s=1$) и SV ($s=2$) волны.

Применяя теорему Бетти-Рэлея для параллелепипеда с вершинами $(\pm x_0; \pm y_0; \pm z_0)$ и усредняя результат по ансамблю микротрещин, получим:

$$\left(\int_{z=z_0} - \int_{z=-z_0} \right) [u_i^{\text{in}} \sigma_{ij}^{\text{sc}} - u_i^{\text{sc}} \sigma_{ij}^{\text{in}}] dx dy - \langle \int_{\Omega} \Delta u_i \sigma_{ij}^{\text{in}} dx dy \rangle = 0,$$

Ω – поврежденная область.

Выражения для амплитуд рассеянного поля

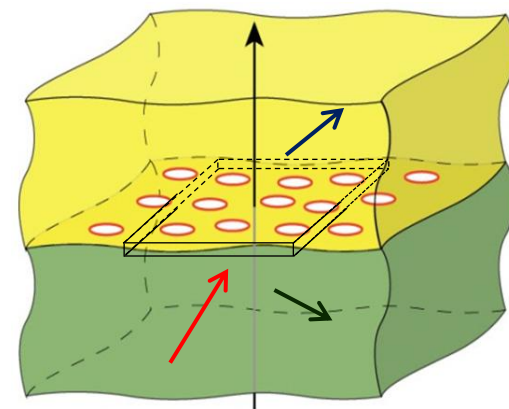
$$P_s^- = -\frac{1}{2} (1 - R_s^-) C(\Delta \bar{u}_s, \mathbf{p}_s), \quad P_s^+ = -\frac{1}{2} (1 + R_s^-) C(\Delta \bar{u}_s, \mathbf{p}_s),$$

Полный коэффициент прохождения, осредненный по ансамблю

$$\bar{T}_s = T_s^- + P_s^+ = T_s^- \left(1 - \frac{1}{2} C(\Delta \bar{u}_s, \mathbf{p}_s) \right), \quad \Delta \bar{u}_s = \frac{1}{S(\Omega_0)} \iint_{\Omega_0} \Delta \bar{u}_s dx dy,$$

где $S(\Omega_0)$ – площадь одиночного микродефекта.

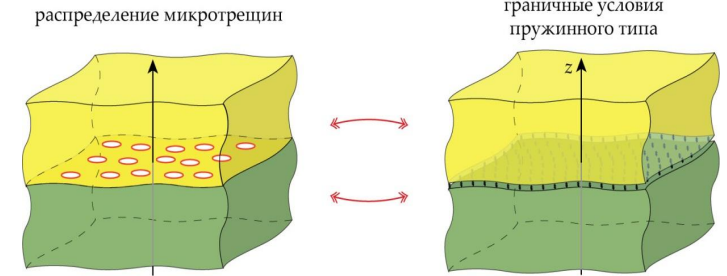
C – трещиноватость



Эффективные жесткости пружины

Предполагая равенство коэффициентов прохождения T_S^K и \bar{T}_S отдельно для P и SV -волн выводятся итоговое соотношение для всех ненулевых компонент матрицы жесткости \mathbf{K} :

$$\kappa_{NN} = \kappa_N = \frac{c_{s1}k_{s1}c_{s2}k_{s2}}{c_{s1}k_{s1} + c_{s2}k_{s2}} \cdot \frac{1}{C(\Delta\bar{\mathbf{u}}_s, \mathbf{p}_s)} - \frac{f_s}{2}$$



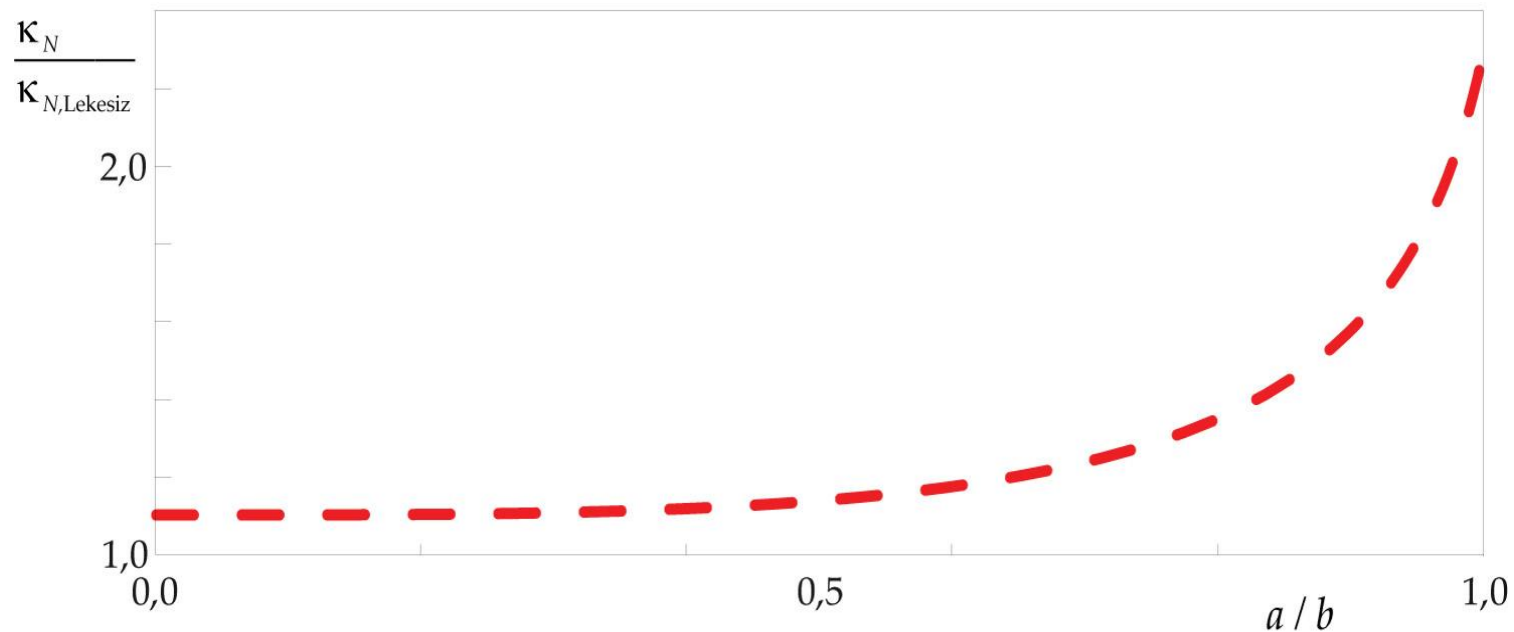
В случае круговых микротрещин одинакового радиуса (для P -волны):

$$\kappa_N = \frac{3}{16\pi a C} \left(\frac{15m_3^2 - 4m_1^2\pi^2}{m_1(m_1^2 - m_3^2)} \right) - \frac{f_1}{2},$$

$$m_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\mu_1(\lambda_1 + \mu_1)} + \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\mu_2(\lambda_2 + \mu_2)} \right),$$

$$m_2 = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}, \quad m_3 = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\lambda_1 + \mu_1} + \frac{1}{\lambda_2 + \mu_2} \right)$$

Сравнение жесткости κ_N , полученной в настоящей работе, и значения $\kappa_{N,Lekesiz}$ из работы (Lekesiz et al, 2013)



a – радиус круговой трещины;
 $2b$ – расстояние между центрами трещинами

Заключение

- На основе интегрального подхода разработана математическая и компьютерная модель, описывающая распространение упругих волн в слоистых волноводах, и их дифракцию на круговой трещине малого размера на границе раздела двух упругих сред
- Найдено асимптотическое решение задачи о дифракции плоских упругих волн на круговой трещине, расположенной на границе раздела двух полупространств, позволяющее описывать рассеяние ультразвуковых волн на микродефектах
- Описан метод моделирования неидеального контакта между разнородными материалами с помощью граничных условий пружинного типа.



БЛАГОДАРИМ ЗА ВНИМАНИЕ!

