Мульти-симплектичные схемы для обобщенного уравнения Кортевега-де Вриза

Горбенко Н.И.

Институт вычислительной математики математической геофизики СО РАН

Новосибирск 2015

Обобщенное уравнение Кортевега-де Вриза (GKdV)

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^{p+1}}{p+1}\right)+\beta\frac{\partial u}{\partial xxx}=0,\quad x\in[0,L],$$

$$u(0,t)=u(x,t)=0, \qquad (1)$$

$$u_x(L,t)=0,$$

$$u(x,0)=u_0(x),$$

p=1 уравнение КдВ
P=2 модифицированное уравнение КдВ
p=4 критический случай обобщенного уравнения КдВ

Канонические структуры

GKdV $u_t = J\frac{\delta H}{\delta u}, J = -\partial_x$ с Гамильтонианом

$$H(u) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{-\alpha}{p^2+3p+2}u^{p+2} + \frac{1}{2}\beta u_x^2\right)dx. \qquad (2)$$

и в мульти-симплектическом каноническом виде

$$Mz_t + Kz_x = \nabla_x S(z), \quad (x,t)\in R^2, \qquad (3)$$

где M, K - косо-симметричные матрицы, ∇_x - градиент, а $S(z)$ - мульти-симплектический Гамильтонов функционал

Симплектическая схема

Дискретная аппроксимация Гамильтониана

$$H_{\Delta x}=\Delta x\sum_i\left(\frac{-\alpha}{p^2+3p+2}u_i^{p+2}+\frac{1}{2}\beta\left(\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x}\right)\right).$$

Таким образом мы имеем Гамильтонову систему нелинейных ОДУ

$$\frac{du_i}{dt}=J_{\Delta x}\nabla H_{\Delta x}(u_i),\quad J_{\Delta x}=\frac{\{.\}_{i+1}-\{.\}_{i-1}}{2\Delta x},$$

$$\frac{du_i}{dt}=-\frac{\alpha(p+2)}{p^2+3p+2}\frac{u_{i+1}^{p+1}-u_{i-1}^{p+1}}{2\Delta x}-\frac{1}{2\Delta x}(-u_{i-2}+2u_{i-1}-2u_{i+1}+u_{i+2}).$$

Симплектический интегратор имеет вид

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}=J_{\Delta x}\nabla H_{\Delta x}\left(\frac{u_i^{n+1}+u_i^n}{2}\right)$$

Мультисимплектичная формулировка уравнения

Введем новые переменные: потенциал $\varphi_x = u$, момент $v = u_x, \quad w = \frac{1}{2}\phi_t + \alpha V(u) + \beta v_x, \quad V(u) = \frac{u^{p+1}}{p+1}.$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} \varphi \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

где $S(z) = -uw + \alpha V(u) + \frac{1}{2}v^2$ мульти-симплектический Гамильтонов функционал

продолжение

Система (3) определяет мульти-симплектичность в следующем смысле. С матрицами M и K связаны симплектические 2-формы :

$\omega(U,V)=\langle M\,U,V\rangle$ и $k(U,V)=\langle K\,U,V\rangle,\quad U,V\in R^n,\quad n=4.$

2-форма ω определяет симплектическую структуру в $R^m,\ (m=rank\ M\le n)$ и связана с направлением по времени, а k два-форма определяет симплектическую структуру в $R^k,\ (k=rank\ K\le n)$ и связана с направлением по пространству. Любая система в форме (3) удовлетворяет закону сохранения симплектичности

$$\partial_t(z_t^T M z_x)+\partial_x(z_t^T K z_x)=0. \qquad (4)$$

Мультисимплектичный метод конечных объемов

Определение Численная схема называется мульти-симплектичной, если она сохраняет дискретную форму (4).

Пусть

$$z_i^j = z(x_i, t^j), \quad \delta_t z_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} = \frac{z_{i+\frac{1}{2}}^{j+1} - z_{i+\frac{1}{2}}^{j}}{\Delta t}, \quad \delta_x z_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} = \frac{z_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} - z_{i}^{j+\frac{1}{2}}}{\Delta x},$$

$$z_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}(z_{i+1}^{j+1} + z_{i+1}^{j} + z_{i}^{j+1} + z_{i}^{j}),$$

$\Delta x, \Delta t$ являются шагами по пространству и времени.

Мультисимплектичный метод конечных объемов

$$z_i^j = z\left(x_i, t^j\right), \quad \delta_t z_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} = \frac{z_{i+\frac{1}{2}}^{j+1} - z_{i+\frac{1}{2}}^{j}}{\Delta t}, \quad \delta_x z_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} = \frac{z_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} - z_{i}^{j+\frac{1}{2}}}{\Delta x},$$

$$z_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\left(z_{i+1}^{j+1} + z_{i+1}^{j} + z_{i}^{j+1} + z_{i}^{j}\right),$$

$\Delta x, \Delta t$

Мульти-симплектическая центрированная схема Эйлера

$$M\delta_t z_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} + K\delta_x z_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} = \nabla_x S\left(z_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}\right). \qquad (5)$$

Эта схема Прейзмана, которая имеет аппроксимацию $O((\Delta x)^2 + (\Delta t)^2)$. Исключая введенные дополнительные переменные, приходим к неявным схемам вида

Неявные мультисимплектичные схемы

- 8-точечная

$$\frac{1}{8\Delta t}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & -3 & -2 \end{bmatrix} u = \frac{\alpha}{2\Delta x}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} V'\left(\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u\right)$$

$$+\frac{\beta}{2(\Delta x)^3}\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} u. \qquad (6)$$

- *12-точечная*

$$\frac{1}{16\Delta t}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -3 & -2 \end{bmatrix} u = \frac{\alpha}{4\Delta x}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} V'\left(\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u\right)$$

$$+\frac{\beta}{4(\Delta x)^3}\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ -2 & 6 & -6 & 2 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} p = 0. \qquad (7)$$

Проверка

Для уравнения GKdV имеем следующее точное решение в виде уединенной солитонной волны

$$u(x,t)=\frac{\alpha}{\cosh^{\frac{2}{p}}[\beta p(x-(4\beta^2+1)t-x_0]},\ \beta=\left[\frac{\alpha^p}{2(p+1)(p+2)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Очевидно, что в ограниченной области не может быть солитонов, но решение может иметь место вдали от границ.

Параметры $p=4, \alpha=1, x_0=50, L=300, \Delta x=0.03, \Delta t=0.01.$

Оценки скорости сходимости

Норма	L_2	L_∞
Симплектическая	1.893	1.872
Мультисимплектич. 8	1.971	1.964
Мультисимплектич. 12	2.012	1.986

Спасибо за внимание