



# Некоторые применения компьютерной алгебры к задачам нелинейной теории упругости

М. И. Карякин



# Содержание

- ❖ Предыстория, или *магия чисел*
- ❖ Полуобратный метод
- ❖ Автоматизация, или *этапы большого пути*
- ❖ Результаты и планы

# Предыстория

- ❖ Зубов Л.М. «Полуобратные и вариационные методы в нелинейной теории упругости». Дисс. ... д-ра физ.-мат. наук; 01.02.04. ЛГУ, 1986.

# Предыстория

- ❖ Зубов Л.М. «**Полуобратные** и вариационные методы в нелинейной теории упругости». Дисс. ... д-ра физ.-мат. наук; 01.02.04. ЛГУ, 1986.

# Предыстория

- ❖ Зубов Л.М. «**Полуобратные** и вариационные методы в нелинейной теории упругости». Дисс. ... д-ра физ.-мат. наук; 01.02.04. ЛГУ, **1986**.

# Предыстория

- ❖ Зубов Л.М. «**Полуобратные** и вариационные методы в нелинейной теории упругости». Дисс. ... д-ра физ.-мат. наук; 01.02.04. ЛГУ, **1986**.
- ❖ Компания Waterloo Maple (теперь Maplesoft) выпускает четвертую версию своего продукта Maple. **1986 г.**

# Предыстория

- ❖ Зубов Л.М. «**Полуобратные** и вариационные методы в нелинейной теории упругости». Дисс. ... д-ра физ.-мат. наук; 01.02.04. ЛГУ, **1986**.
  - ❖ Компания Waterloo Maple (теперь Maplesoft) выпускает четвертую версию своего продукта Maple. **1986 г.**
- 
- ❖ Компания Waterloo выпускает версию 4.3 пакета Maple с графическим интерфейсом под Windows. **1989 г.**

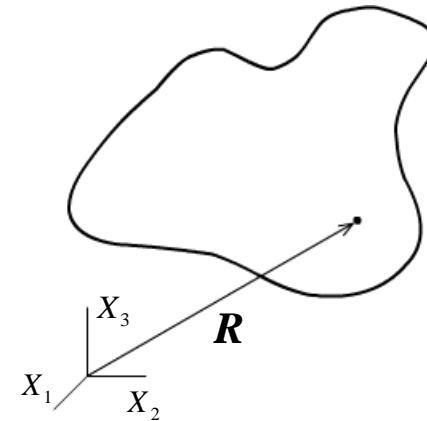
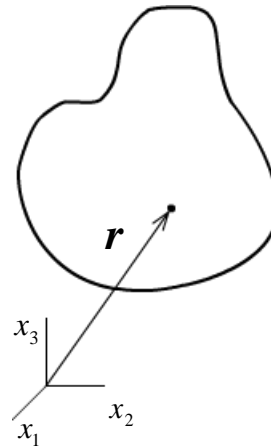
# Предыстория

- ❖ Зубов Л.М. «**Полуобратные** и вариационные методы в нелинейной теории упругости». Дисс. ... д-ра физ.-мат. наук; 01.02.04. ЛГУ, **1986**.
  - ❖ Компания Waterloo Maple (теперь Maplesoft) выпускает четвертую версию своего продукта Maple. **1986 г.**
- 
- ❖ Компания Waterloo выпускает версию 4.3 пакета Maple с графическим интерфейсом под Windows. **1989 г.**
  - ❖ На кафедре теории упругости РГУ появляется (первый на факультете) IBM-PC совместимый компьютер. **1989 г.**



# Общие соотношения нелинейной теории упругости

- Отсчетная и текущая конфигурации



- Градиент деформации

$$\mathbf{C} = \text{grad } \mathbf{R} \quad (1.1)$$

$$d\mathbf{R} = \mathbf{C} \cdot d\mathbf{r}$$

- Гиперупругость:  
существование функции удельной потенциальной энергии

$$W = W(\mathbf{C}) \quad (1.2)$$

- Определяющие соотношения

$$\mathbf{D} = \frac{dW}{d\mathbf{C}} \quad (1.3)$$

# Общие соотношения нелинейной теории упругости

- Уравнения равновесия

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \quad (1.4)$$

- Граничные условия

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{f}^* \quad (1.5)$$

# Общие соотношения нелинейной теории упругости

- Уравнения равновесия

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \quad (1.4)$$

- Граничные условия

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{f}^* \quad (1.5)$$

- Известные функции

$$X_1 = X_1(x_1, x_2, x_3), X_2 = X_2(x_1, x_2, x_3), X_3 = X_3(x_1, x_2, x_3)$$

- Вывод уравнений

$$W = W(C_{ij}) \Rightarrow D_{ij} = \frac{dW}{dC_{ij}} \Rightarrow C_{ij} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_i} = 0$$

# Распространенные модели

Некоторые примеры выражений упругой энергии

- Модель Мурнагана

$$W = \frac{-6\lambda - 4\mu + 9l + n}{8} I_1 + \frac{\lambda + 2\mu - 3l - 2m}{8} I_1^2 - \frac{m}{4} I_1 I_2 + \\ + \frac{-4\mu + 6m - n}{8} I_2 + \frac{l + 2m}{24} I_1^3 + \frac{n}{2} (I_3 - 1) + \frac{9\lambda + 6\mu - 9l}{8}$$

- Модель Блейтца и Ко

$$W = \frac{\mu\beta}{2} \left( I_1 + \frac{1}{\alpha} (I_3^{-\alpha} - 1) - 3 \right) + \frac{\mu(1-\beta)}{2} \left( I_2 I_3^{-1} + \frac{1}{\alpha} (I_3^{\alpha} - 1) - 3 \right)$$

- Гармонический (полулинейный) материал

$$W = \frac{\lambda}{2} \text{tr}^2(\mathbf{U} - \mathbf{I}) + \mu \text{tr}(\mathbf{U} - \mathbf{I})^2$$

# Полуобратный метод

## ❖ Кручение цилиндра:

- Деформация (в цилиндрических координатах)

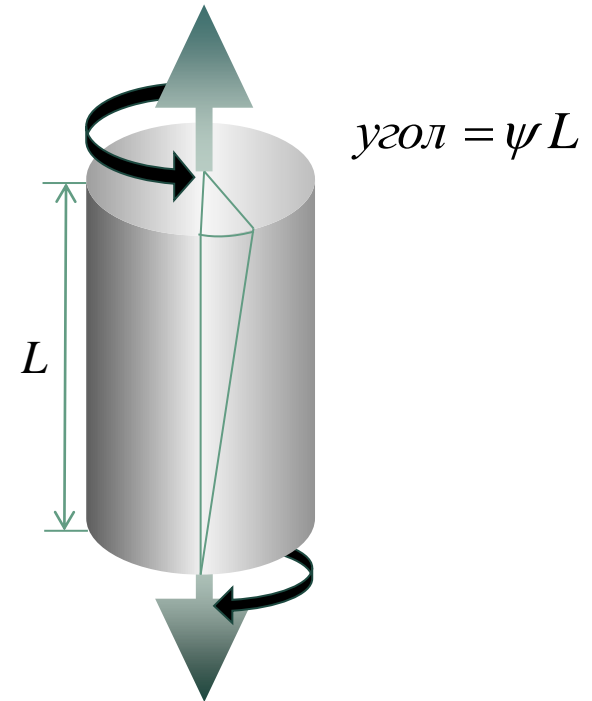
$$R = P(r), \quad \Phi = \varphi + \psi z, \quad Z = \gamma z$$

- Градиент деформации

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} dP/dr & 0 & 0 \\ 0 & P/r & 0 \\ 0 & \psi P & \gamma \end{pmatrix}$$

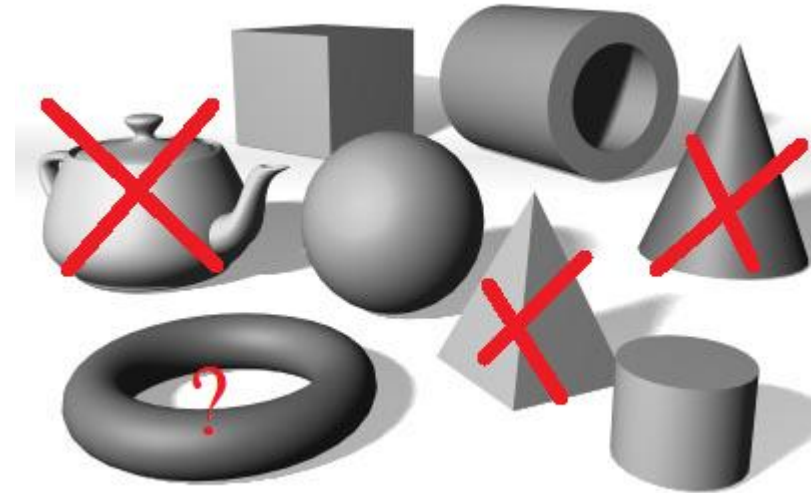
- Уравнение равновесия  
(для упрощенной модели Блейтца и Ко)

$$3P'' - \frac{1}{r}P' + \frac{r^2}{P^3}P'^4 = 0$$



# Полуобратный метод: минусы

- ❖ Применим к узкому диапазону «геометрий»
- ❖ Применим к ограниченному набору внешних воздействий
- ❖ *Почти* не масштабируем
- ❖ Не *гарантирует* результата
- ❖ Трудоемок (для сложных функций энергии)



# Полуобратный метод: плюсы

- ❖ Снижение размерности задачи
- ❖ *Возможность построения аналитических решений*
  - Моделирование эксперимента
  - Тестовые задачи для новых вычислительных схем
- ❖ Алгоритмизуемость

# Примеры полуобратных представлений

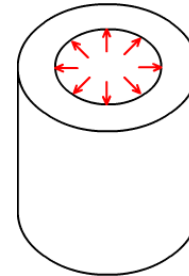
## ❖ Уровень 1

- Задача Ляме для цилиндра

$$R = P(r),$$

$$\Phi = \varphi,$$

$$Z = \lambda z$$

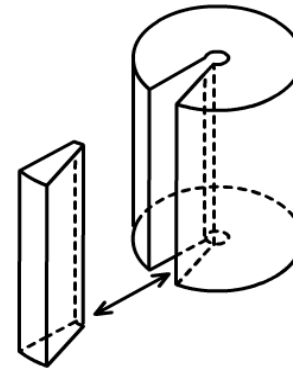


- Клиновая дисклинация

$$R = P(r),$$

$$\Phi = \kappa \varphi,$$

$$Z = z$$

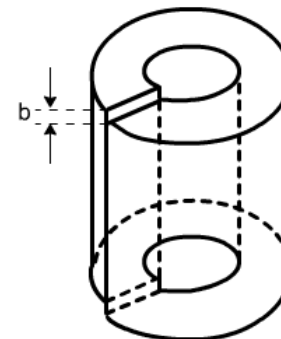


- Винтовая дислокация

$$R = P(r),$$

$$\Phi = \varphi,$$

$$Z = \frac{b}{2\pi} \varphi + z$$



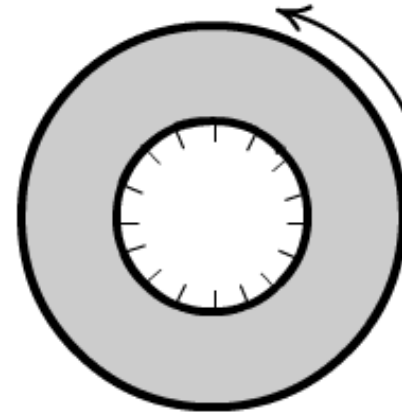


# Примеры полуобратных представлений

## ❖ Уровень 2

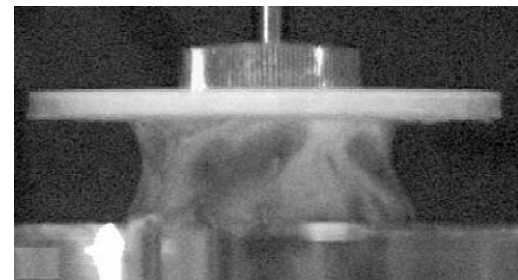
- Стесненное (плоское) кручение

$$\begin{cases} R = P(r) \\ \Phi = \varphi + F(r) \\ Z = z \end{cases}$$



- Растяжение «подкрепленного» цилиндра

$$\begin{cases} R = rf(z) \\ \Phi = \varphi \\ Z = g(z) \end{cases}$$



# Примеры полуобратных представлений

## ❖ Уровень 3

- Кручение и растяжение призматического тела (Зубов Л.М.)

$$X_1 = u_1(x_1, x_2) \cos \psi x_3 - u_2(x_1, x_2) \sin \psi x_3$$

$$X_2 = u_1(x_1, x_2) \sin \psi x_3 + u_2(x_1, x_2) \cos \psi x_3$$

$$X_3 = \lambda x_3 + w(x_1, x_2) \quad (\lambda, \psi = \text{const})$$

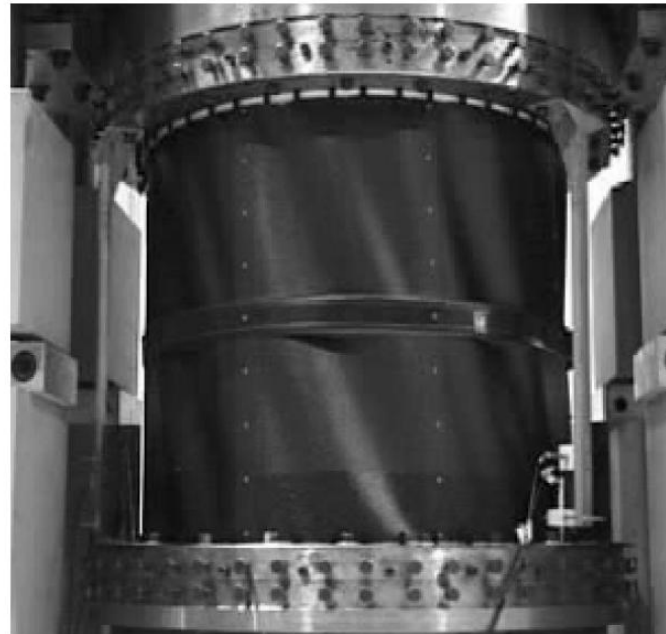
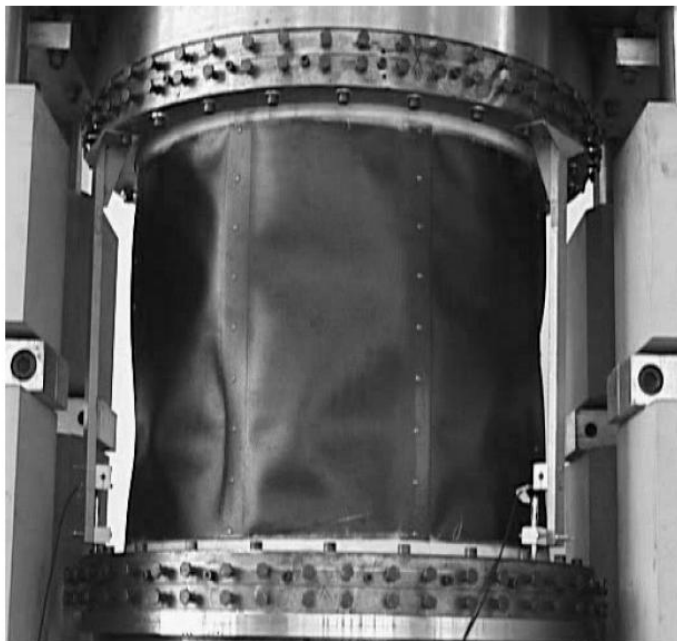
- Пространственный изгиб призматического бруса (Зубов Л.М., Зеленина А.А.)

$$X_1 = \rho(x_1, x_3) \cos[\omega x_2 + \beta(x_1, x_3)]$$

$$X_2 = \rho(x_1, x_3) \sin[\omega x_2 + \beta(x_1, x_3)]$$

$$X_3 = \alpha(x_1, x_3) + l x_2 \quad (\omega, l = \text{const})$$

# Устойчивость



Computational and Experimental Methods in Structures — Vol. 1  
 BUCKLING AND POSTBUCKLING STRUCTURES  
 Experimental, Analytical and Numerical Studies  
 Copyright © 2008 by Imperial College Press

# Бифуркационный анализ

- ❖ Наложение малой деформации на конечную

$$\begin{cases} R = P(r) + \varepsilon U_1(r, \varphi, z), \\ \Phi = \varphi + \psi z + \varepsilon U_2(r, \varphi, z), \\ Z = \gamma z + a\varphi + \varepsilon U_3(r, \varphi, z) \end{cases}$$

- ❖ Линеаризация краевой задачи

$$\operatorname{div} \overset{\circ}{\mathbf{D}} = 0$$

$$\mathbf{n} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{D}} = \overset{\circ}{\mathbf{f}}$$

где

$$\overset{\circ}{\mathbf{F}} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \mathbf{F}(\mathbf{R} + \varepsilon \mathbf{w}) \right|_{\varepsilon=0}$$

- ❖ Типичное разложение

$$U_1(r, \varphi, z) = u_1(r) \cos(n\varphi + bz),$$

$$U_2(r, \varphi, z) = u_2(r) \sin(n\varphi + bz),$$

$$U_3(r, \varphi, z) = u_3(r) \sin(n\varphi + bz),$$

# Автоматизация. Этап 1

- ❖ **Бурлуцкий Д.В.** Численный анализ уравнений равновесия нелинейно-упругого тела с дефектом. 1998 г.
- ❖ **Резниченко А.А.** Интегрированная система численного анализа канонических задач нелинейной теории упругости. 1999 г.
- ❖ **Гавриляченко Т.В.** Численный анализ деформирования нелинейно-упругих тел с использованием средств компьютерной алгебры. 2000 г.

# Автоматизация. Этап 1.

## ❖ Реализовано в среде Maple

Задаются системы координат

Задается (аналитически)  
полуобратное представление

Задается (аналитически) функция  
удельной потенциальной энергии

Генерируются уравнения  
равновесия и краевые условия

# Автоматизация. Этап 1.

```

E:\torsion.mw - [Server 3] - Maple 15
File Edit View Insert Format Table Drawing Plot Spreadsheet Tools Window Help
*coords.mws *functions.mws torsion.mw
Text Math Drawing Plot Animation
Maple Input Monospaced 12
> read `coords.m`;
read `functions.m`;
> Coordinates(Cylindrical, Cylindrical):
R:=P(r); Phi:=phi+psi*z; Z:=gamma*z;

R := P(r)
Φ := φ + ψz
Z := γz (1)

> alpha:=1/2: beta:=0:
SetPotential(1/2*mu*beta*(I1+1/alpha*(I3^(-alpha)-1)-3)+
1/2*mu*(1-beta)*(I2*I3^(-1)+1/alpha*(I3^(alpha)-1)-3));

Strain function is given by the expression
1/2 μ ( I2/I3 + 2√I3 - 5 ) (2)
Ready Memory: 0.68M Time: 0.06s Text Mode

```

# Автоматизация. Этап 1.

E:\torsion.mw - [Server 3] - Maple 15

File Edit View Insert Format Table Drawing Plot Spreadsheet Tools Window Help

\*coords.mws \*functions.mws torsion.mw

Text Math Drawing Plot Animation Hide

Maple Input Monospaced 12 B I U

```

> DeformationGradient(): CauchyGreenMeasure():
> PiolaStresses(): CauchyStresses():

> evalm(C_);

```

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dr} P(r) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{P(r)}{r} & 0 \\ 0 & P(r) \Psi \gamma \end{bmatrix} \quad (3)$$

```

> Eqs:=GetBVP():
Eq1:=subs(diff(P(r), r$2)='P'', Eqs[1]):
'P''=simplify(solve(Eq1, 'P''), sqrt, symbolic);

```

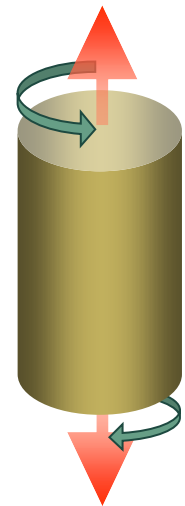
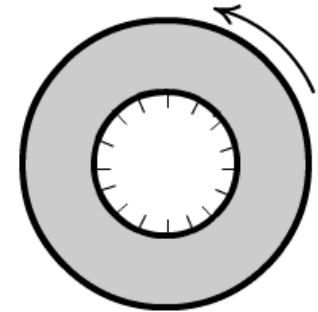
$$P'' = -\frac{1}{3} \frac{\left(\frac{d}{dr} P(r)\right) \left(-P(r)^3 + \left(\frac{d}{dr} P(r)\right)^3 r^3\right)}{P(r)^3 r} \quad (4)$$

● Ready Memory: 0.68M Time: 0.06s Text Mode



# Этап 1. Результаты.

- Изучена задача о кручении стержня, подкрепленного по боковой поверхности. Численно проанализированы поля напряжений и перемещений, а также нелинейные эффекты, возникающие в цилиндре при больших деформациях. Сделан вывод о том, что поведение вала существенно зависит от способа его закрепления и от констант материала.
- Для различных типов нелинейно-упругих сжимаемых сред изучены механические поля, возникающие при свободном кручении цилиндра, а также дана качественная и количественная оценка эффекта Пойнтинга. Показана непригодность т. н. «двухконстантной» («физически-линейной») модели для изучения кручения сжимаемых тел.



## Этап 1. Проблемы.

- ❖ Разработанной системой мог пользоваться только ее разработчик
- ❖ У системы отсутствовал интерфейс. Она представляла собой достаточно универсальную Maple-программу, но чтобы получить новый результат изменения нужно было вносить в текст самой программы
- ❖ При этом текст многих блоков программы никак не был защищен от случайных ошибок пользователя

# В поисках интерфейса

## ❖ Интеграция Maple-Excel

The image shows an Excel spreadsheet with two dialog boxes overlaid. The background is a grid with columns A-M and rows 1-23. Cell A1 is selected.

**Настройки (Settings) Dialog:**

- Title: Настройки
- Buttons: ? (Help), X (Close)
- Section: Доступные надстройки:
- List of add-ins:
  - Инструменты для евро
  - Пакет анализа
  - Пакет анализа - VBA
  - Поиск решения
- Buttons: OK, Отмена (Cancel), Обзор... (View...)

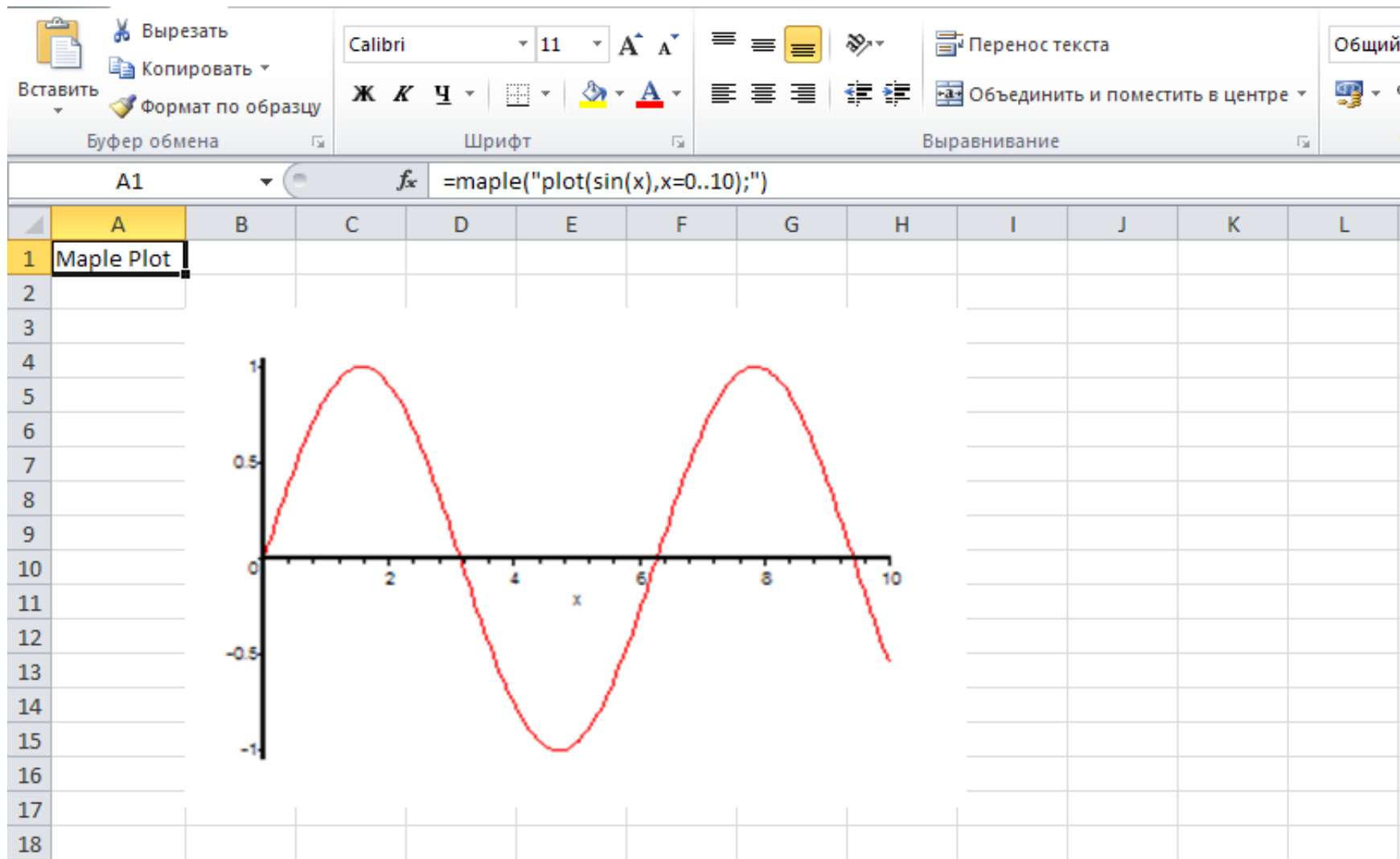
**Обзор (View) Dialog:**

- Title: Обзор
- Address bar: << Program Files >> Maple 15 > Excel
- Search bar: Поиск: Excel
- Navigation: Упорядочить, Новая папка
- Left pane:
  - Видео
  - Документы
  - Изображения
  - Музыка
  - Домашняя группа
  - Компьютер
  - Win7 (C:)
  - Distribs (D:)
- Right pane (File list):
 

Имя	Дата изменения	Тип
WMIMPLEX64.xla	02.12.2011 9:29	Надстрой

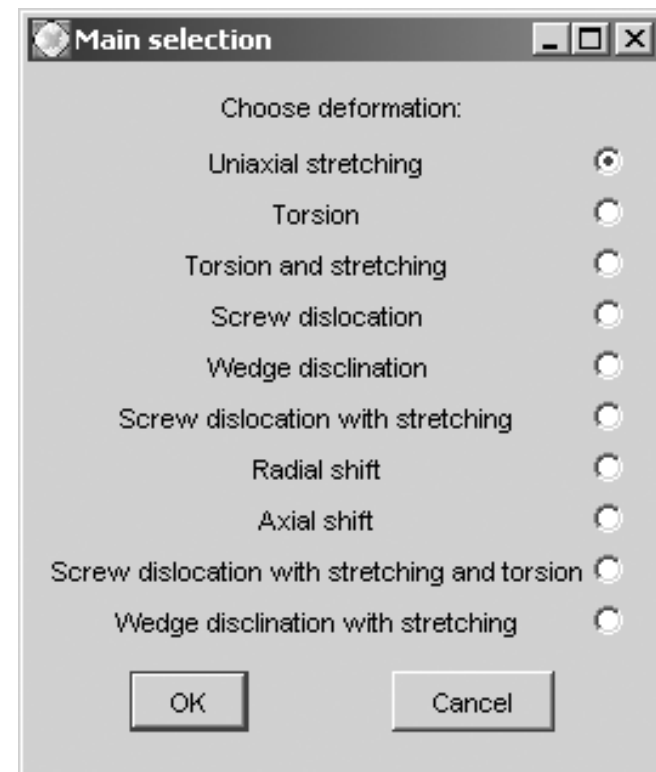
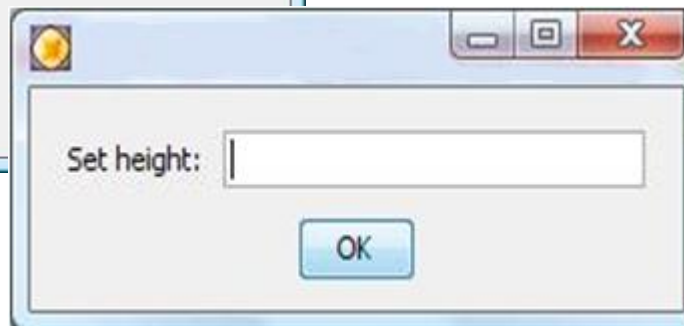
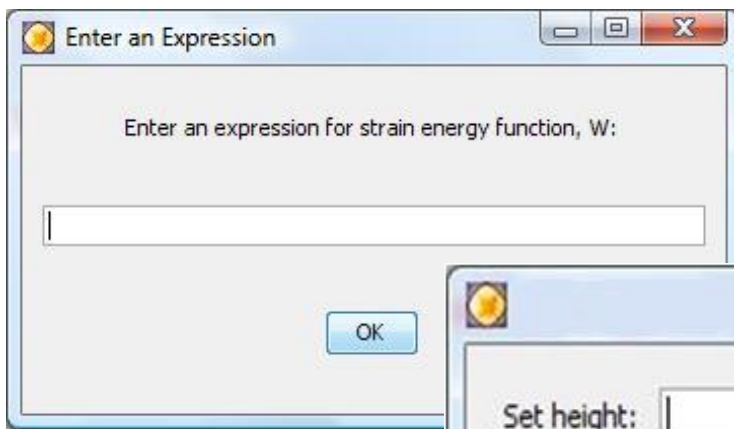
# В поисках интерфейса

## ❖ Интеграция Maple-Excel



# Этап 2

- Maple 8 + *Maplets* : 2002 г
- **Gavrilyachenko T. M., Karyakin M. I., Sukhov D. Y.**  
Designing of the interface for nonlinear boundary value problem solver using Maple // Proceedings of the International Conference on Computational Sciences and its Applications (ICCSA 2008). IEEE Computer Society, Los Alamitos-Washington-Tokyo, **2008**. P. 284-291.
- **Карякин М.И., Пустовалова О.Г., Сухов Д.Ю.**  
Компьютерная реализация полуобратного метода нелинейной теории упругости в среде Maple. **2008**



## Этап 2. Некоторые итоги

- ❖ Реализована система анализа задач нелинейной теории упругости, сводящихся к одному или нескольким обыкновенным дифференциальным уравнениям.
- ❖ В качестве входных параметров могут быть заданы (интегральные) условия на величину осевой силы, крутящего момента и т.п.
- ❖ Система автоматически определяет «зависимые» и «независимые» параметры
- ❖ Система основывается на внешнем решателе нелинейных краевых задач, реализованном в среде C++
- ❖ Разработаны два учебных модуля по использованию СКА для анализа задач нелинейной теории упругости

## Этап 2. Пример результатов

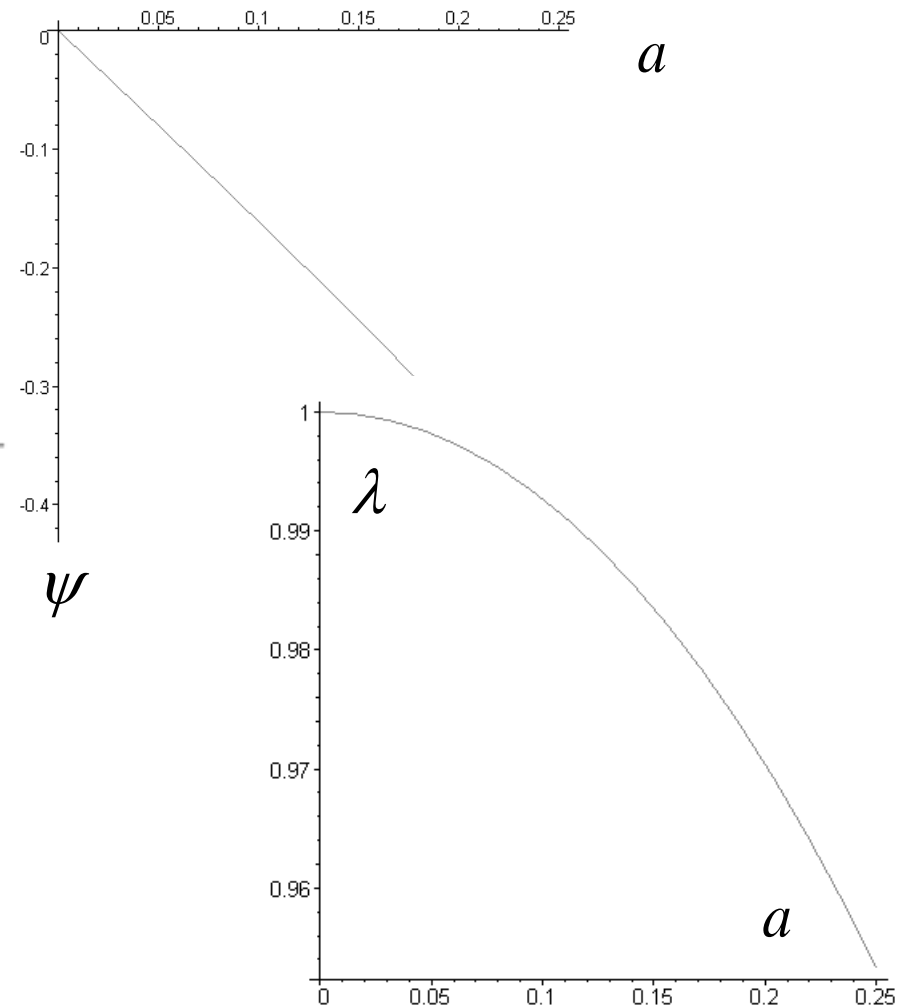
- ❖ Удлинение и закручивание цилиндра, содержащего винтовую дислокацию. Материал Блейтца и Ко.

$$\begin{cases} R = P(r) \\ \Phi = \varphi + \psi z \\ Z = a\varphi + \lambda z \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \left( (4a\lambda\psi - 2a^2\psi^2 - 2\lambda^2) \left( \frac{d}{dr} P(r) \right) + \right. \\ & \left. + 6 (ra^2\psi^2 + r\lambda^2 - 2ra\lambda\psi) \left( \frac{d^2}{dr^2} P(r) \right) \right) P(r)^3 + \\ & + 2 (\lambda^2 r^3 + ra^2) \left( \frac{d}{dr} P(r) \right)^4 = 0 \end{aligned}$$

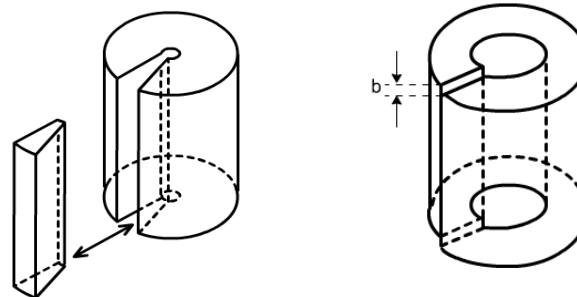
$$Q = \int_{r_0}^{r_1} \int_0^{2\pi} T_{zZ} d\varphi dr = 0$$

$$M = \int_{r_0}^{r_1} \int_0^{2\pi} RT_{\varphi Z} d\varphi dr = 0$$



## Этап 3. Добавлен анализ устойчивости

- ❖ Иллюстрация:  
цилиндр с внутренними напряжениями  
(например, вследствие дислокации  
или дисклинации)



- ❖ Потеря устойчивости  
при растяжении и сжатии

**Design of concrete-filled steel tubular columns under axial loading according to NBR 8800:2008 and Eurocode 4:2004: tests results and comparisons**

**Rem: Rev. Esc. Minas vol.62 no.1 Ouro Preto Jan./Mar. 2009**

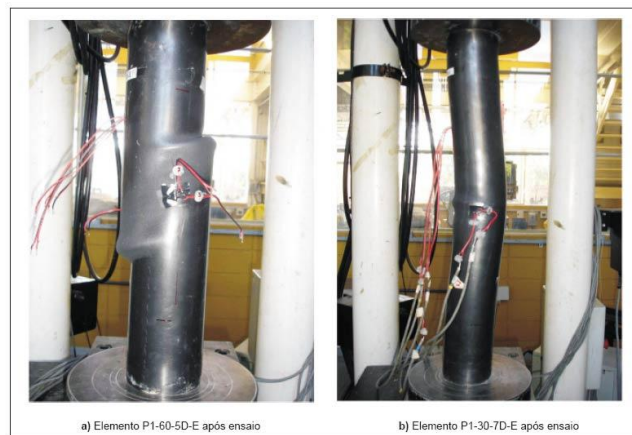
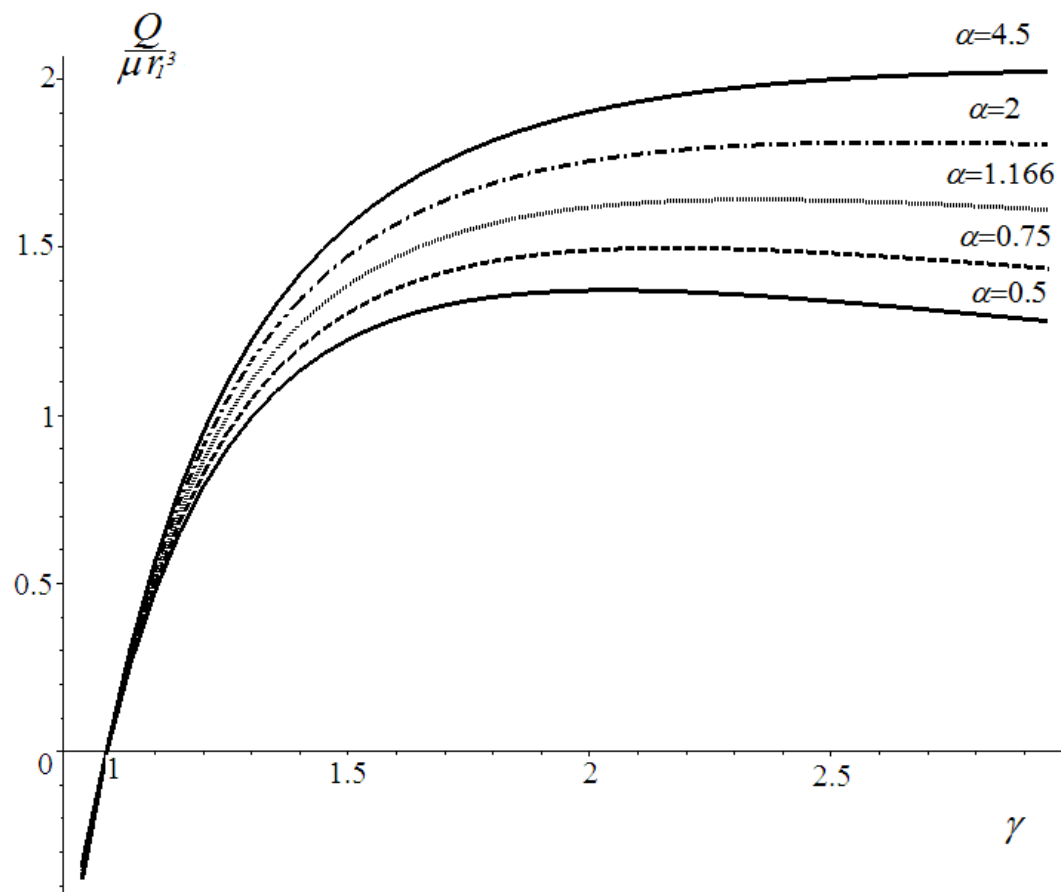


Figura 4 - Elementos com tubo de 3,35 mm de espessura.



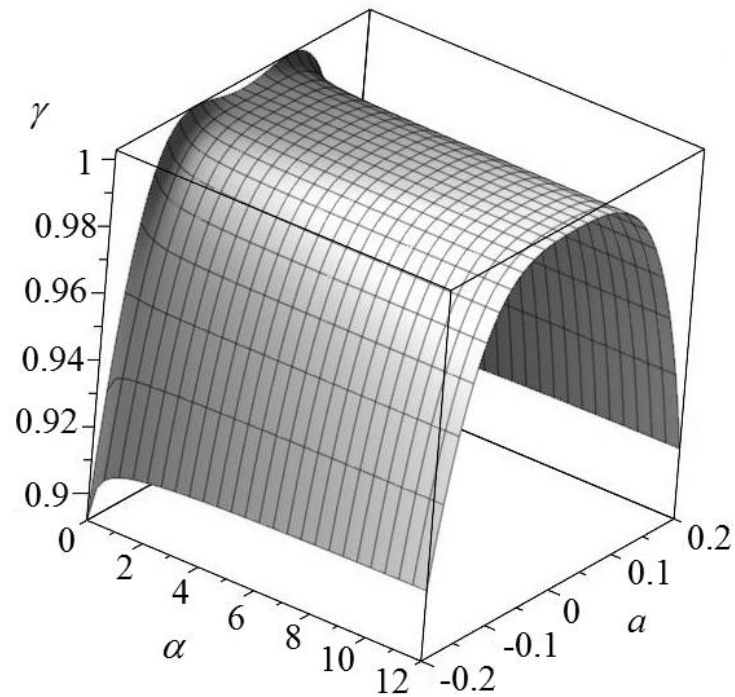
# Цилиндр с внутренними напряжениями

- ❖ Диаграмма нагружения (модель Блейтца и Ко)



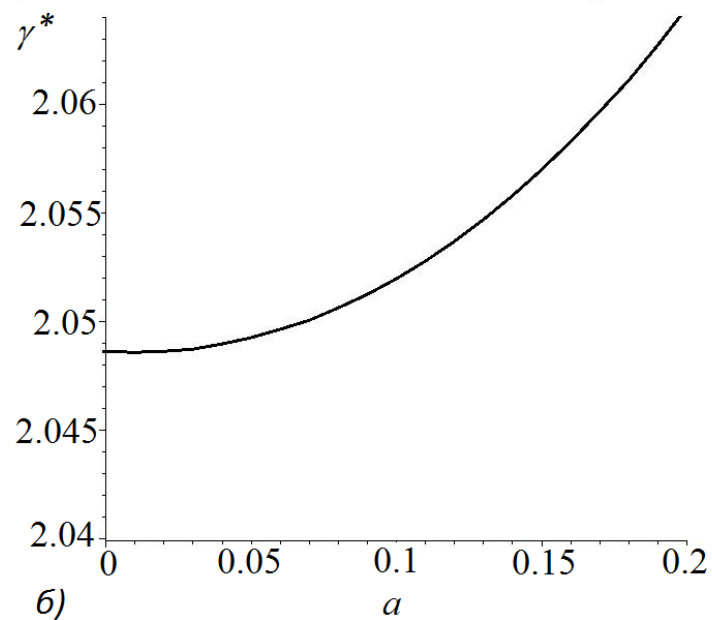
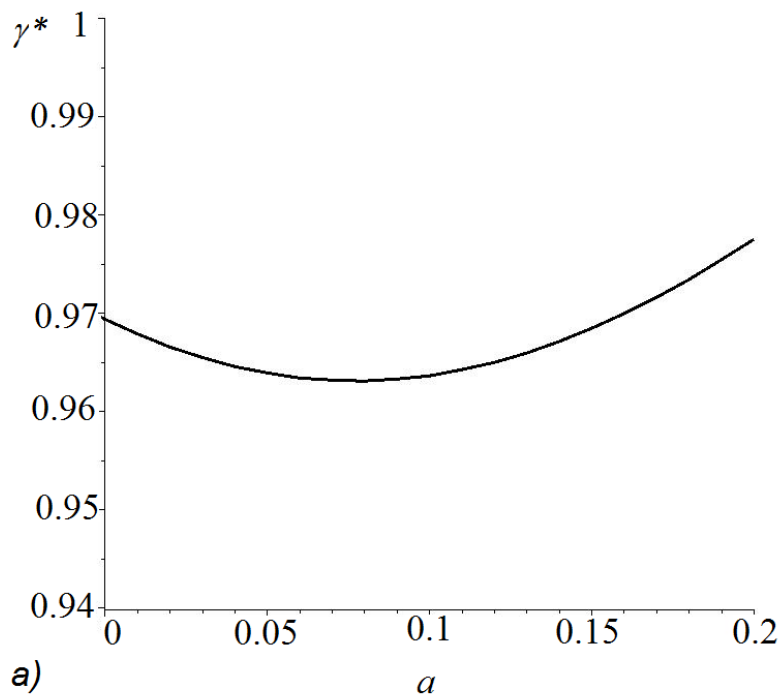
# Цилиндр с внутренними напряжениями

- ❖ Бифуркационный анализ:  
критические значения коэффициента растяжения/сжатия



# Устойчивость цилиндра с дислокацией

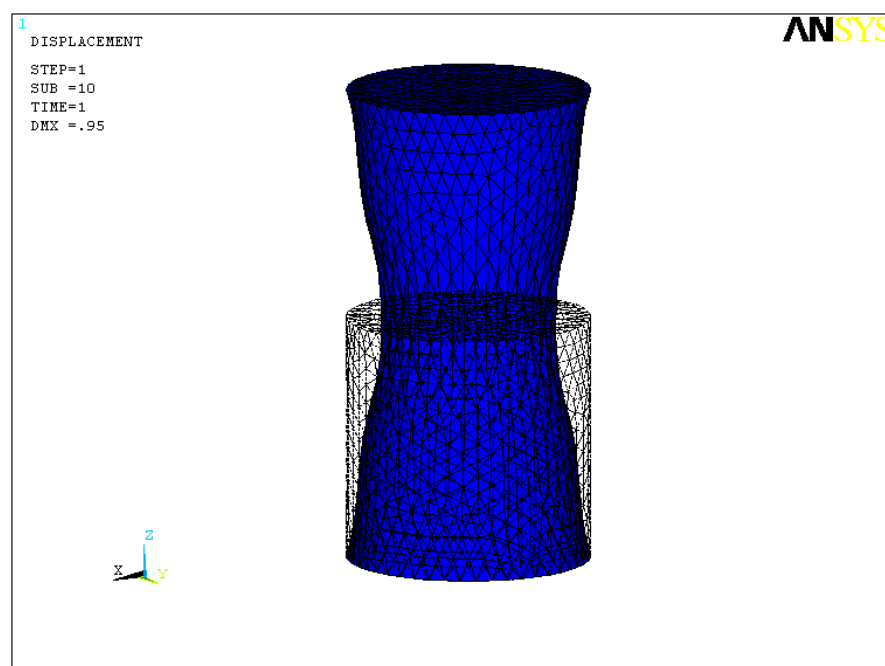
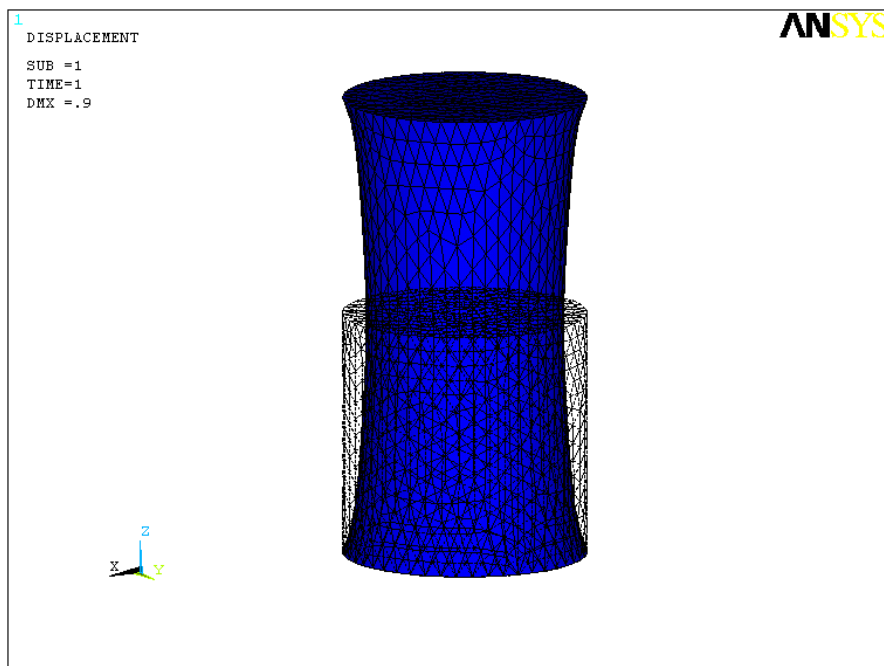
❖ Бифуркационные кривые: а) сжатие, б) растяжение



# Потеря устойчивости при растягивающих нагрузках

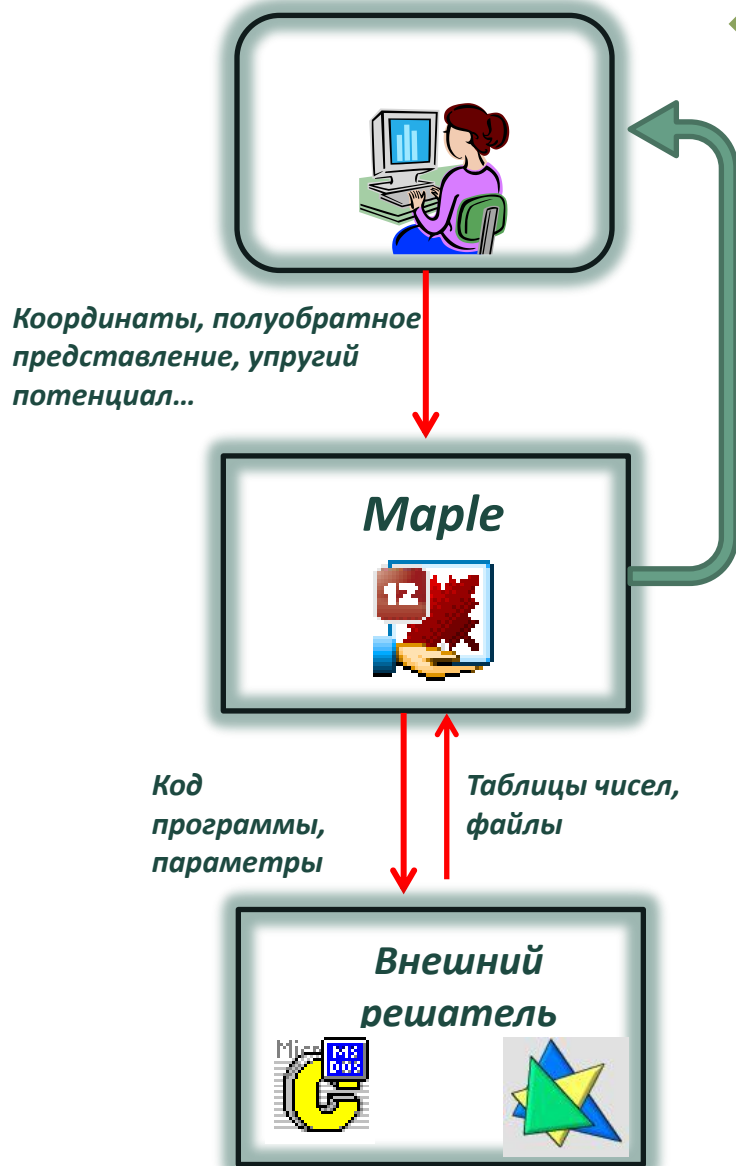
◆ Сверх-большое растяжение

◆ Потеря устойчивости вычислительной схемы



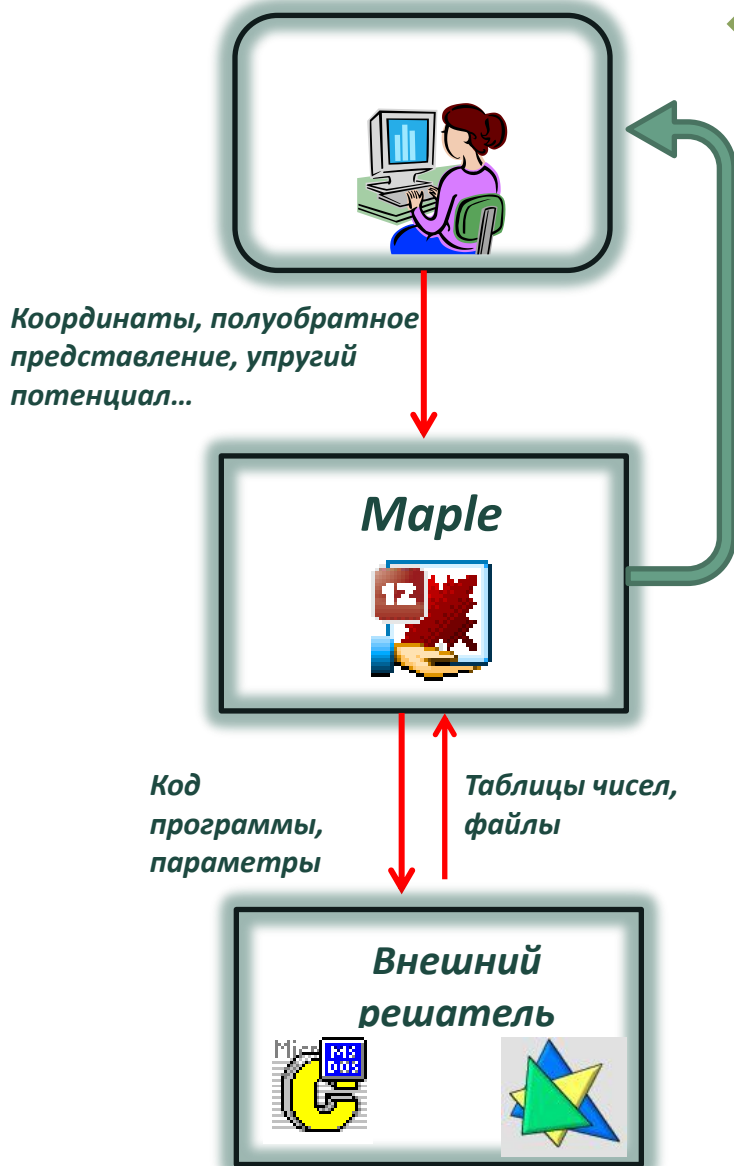
## Этап 4.

- ❖ Жеребко А.И. Программная оболочка анализа одномерных и двумерных задач нелинейной теории упругости. 2011.



# Этап 4.

❖ Жеребко А.И. Программная оболочка анализа одномерных и двумерных задач нелинейной теории упругости. 2011.

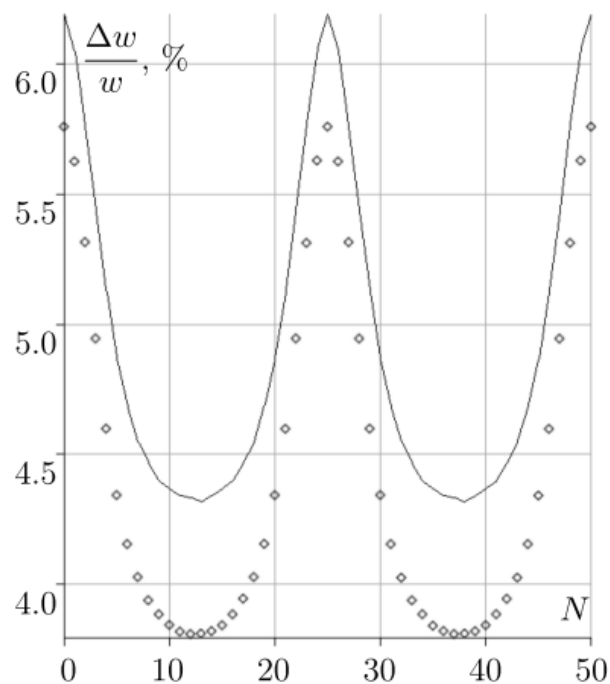
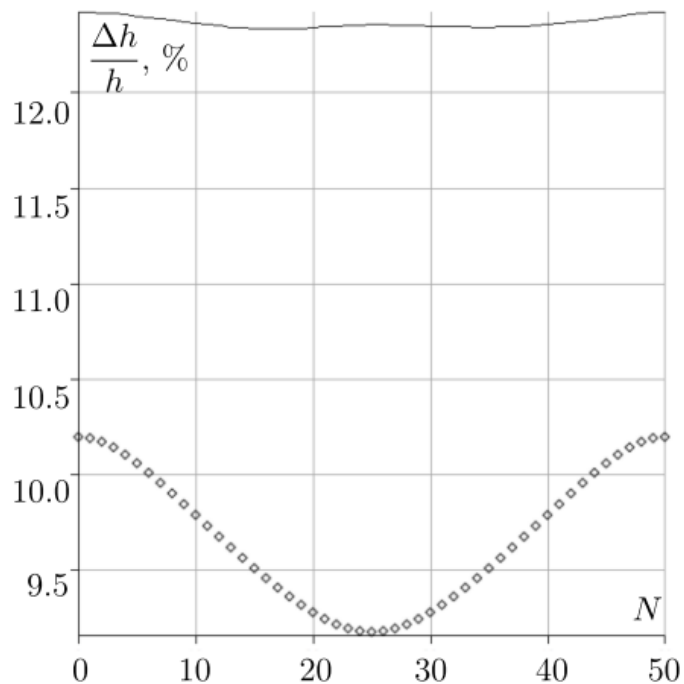
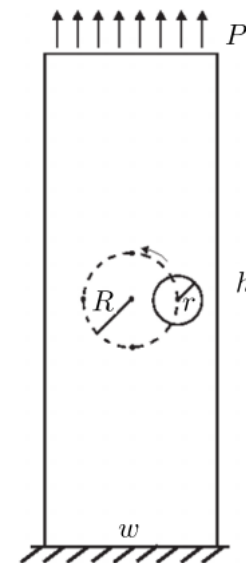


**PDE Solutions Inc**

Problem Solving Environments Since 1995

# Этап 4. Пример задачи - 1.

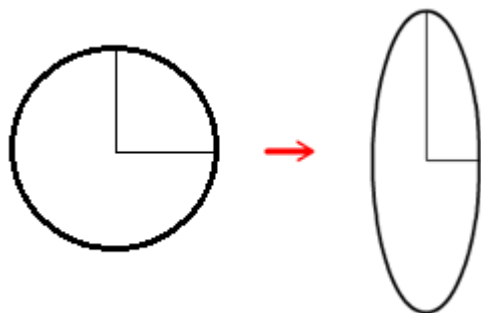
- Растяжение прямоугольника с круговым отверстием



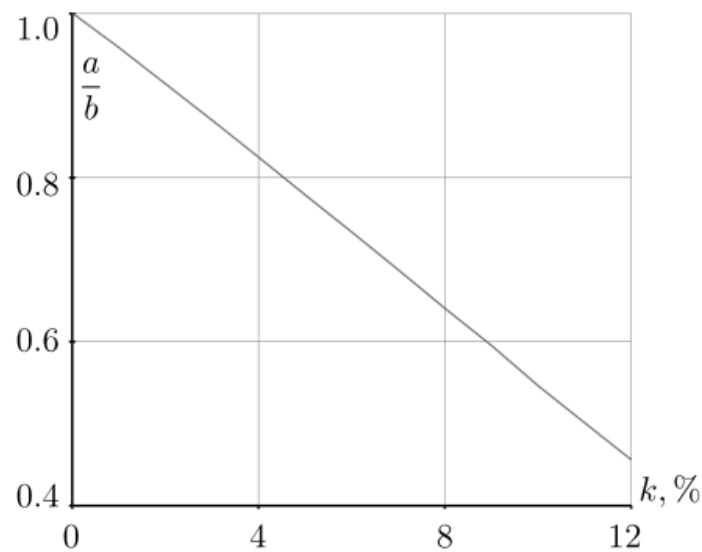
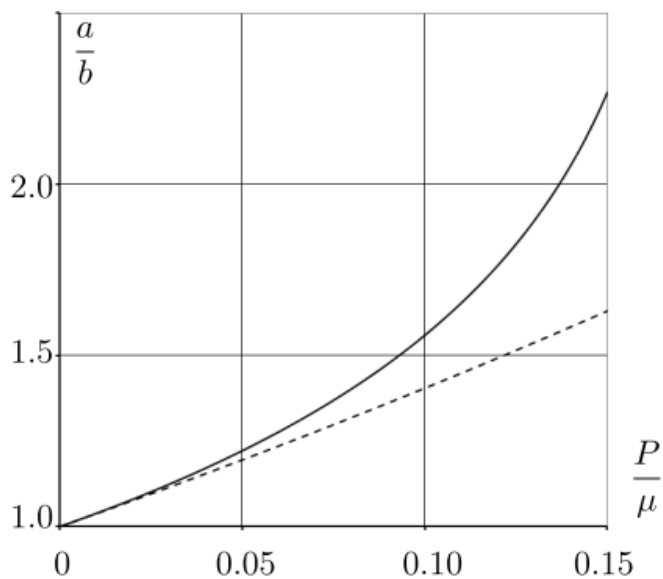
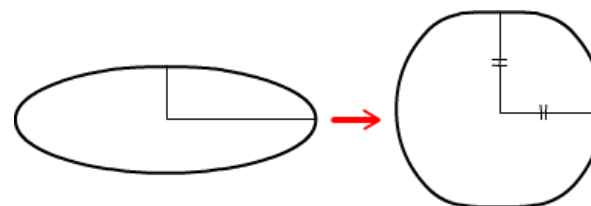
# Этап 4. Пример задачи - 2.

- Растяжение квадрата с отверстием

Прямая задача



Обратная задача





# Основные результаты

- ❖ Разработаны программные средства автоматизации полуобратного метода нелинейной теории упругости, предназначенные как для численного исследования задач равновесия, так и для аналитического изучения эффектов второго и высших порядков, а также автоматизированного генерирования уравнений нейтрального равновесия для исследования устойчивости упругих тел на основе бифуркационного подхода.
- ❖ С их использованием
  - решены новые задачи об эффектах второго порядка в задачах изгиба и кручения нелинейно-упругих тел;
  - изучено явление неустойчивости при растягивающей нагрузке в сжимаемых нелинейно-упругих телах;
  - исследованы новые задачи о равновесии, устойчивости и закритическом поведении нелинейно-упругих тел и конструкций с остаточными напряжениями

## Задачи на этап 5.

- ❖ Интегрировать в общую систему:
  - Блок анализа обратных задач (например, на основе генетических алгоритмов)
  - Блок анализа задач для сред с усложненными физико-механическими свойствами (например, сред с моментными напряжениями)
  - Блок анализа задач теории оболочек
  
- ❖ Научиться решать задачи Уровня 3.

**Спасибо за ваше внимание!**

**Может быть, есть вопросы?**