Моделирование кинетической неустойчивости теплого электронного пучка малой плотности в плазме методом частиц в ячейках

Месяц Е.А., Снытников А.В., Лотов К.В.

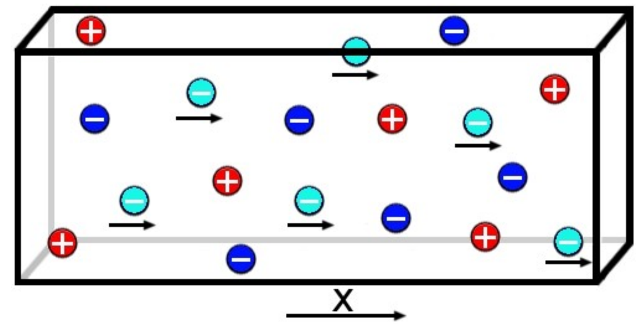
XVI Всероссийская конференция-школа молодых исследователей "Современные проблемы математического моделирования"

2015

Пучковая неустойчивость

кинетическое уравнение Власова

$$\frac{\partial f_{i,e}}{\partial t}+\vec{v}\frac{\partial f_{i,e}}{\partial \vec{r}}+\vec{F}\frac{\partial f_{i,e}}{\partial \vec{v}}=0, \qquad \vec{F}_{i,e}=q_{i,e}\left(\vec{E}+\frac{1}{c}[\vec{v},\vec{B}]\right),$$



уравнения Максвелла

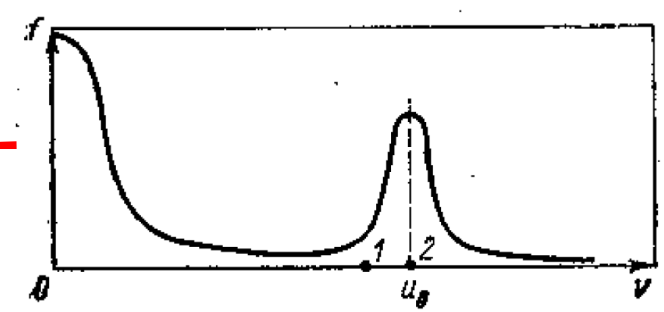
$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}=\mathrm{rot}\,\vec{B}-\vec{j},$$
$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}=-\mathrm{rot}\,\vec{E},$$
$$\mathrm{div}\,\vec{E}=\rho,$$
$$\mathrm{div}\,\vec{B}=0.$$

$$\vec{j}=\sum q_{i,e}\int f_{i,e}\vec{v}\,d\vec{v},$$
$$\rho=\sum q_{i,e}\int f_{i,e}\,d\vec{v},$$

Функция распределения электронов по скоростям для системы плазма-пучок

$$f(v)=\frac{1}{\Delta v\sqrt{2\pi}}\exp-\frac{(v-v_0)^2}{2\Delta v^2}$$

$$W\sim e^{2\gamma t},\ \gamma=\frac{1}{2}\frac{\partial \ln W}{\partial t}$$



$$g_x(0)=g_x(L_x),\ \ g_y=g(L_y),\ \ g_z=g(L_z)$$

$$(E_x,E_y,E_z),\ (B_x,B_y,B_z),\ (j_x,j_y,j_z),$$
$$(\rho_x,\rho_y,\rho_z),f$$

$v[c],\ t[1/\omega_p],\ r[c/\omega_p]$

$n[m_e\omega_p^2/4\pi e^2]$

$B,\ E[m_e c\,\omega_p/e]$

$j[m_e c\,\omega_p^2/4\pi e]$

скорость света $c=3\times10^{10}\ см/с$,

плотность плазмы $n_0=10^{14}\ \text{см}^{-3}$,

плазменная электронная частота

$$\omega_p=5.6\times10^{11}\ \text{сек}^{-1},\ \ \omega_p=\sqrt{\frac{4\pi n_0 e^2}{m_e}}.$$

Метод частиц в ячейках

Задание начальных условий

↓

Определение сеточных величин (плотность, ток)

$$n_i = \sum R(x_j, x_i)$$

↓

Эйлеров этап: вычисление сил на сетке

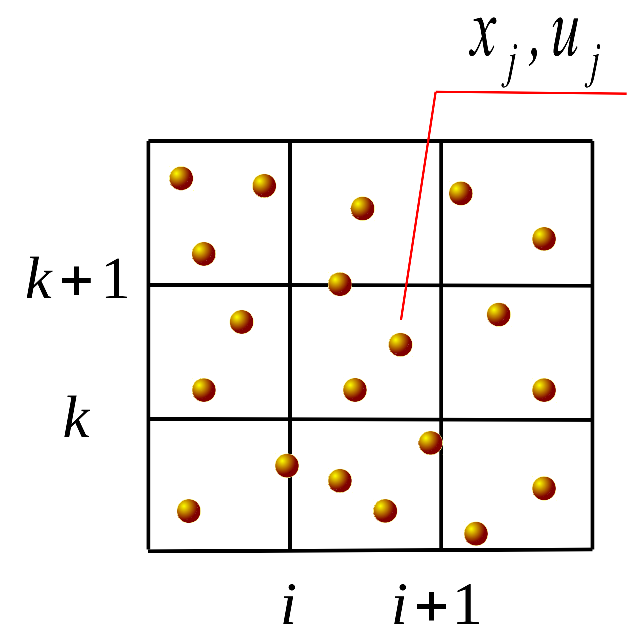
↓

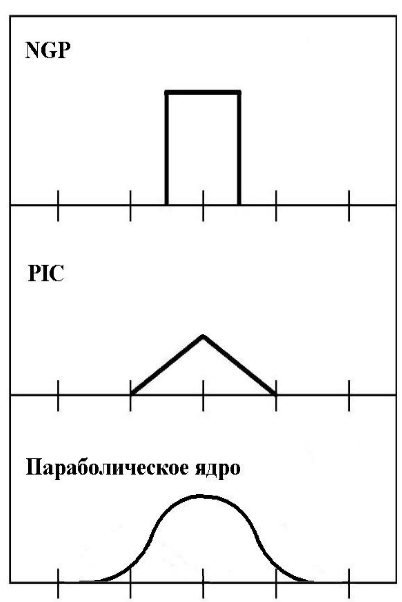
Аппроксимация силы в местоположение частицы

$$F(x_j^k) = \sum F_i S(x_i, x_j)$$

↓

Лагранжев этап: решение уравнений движения

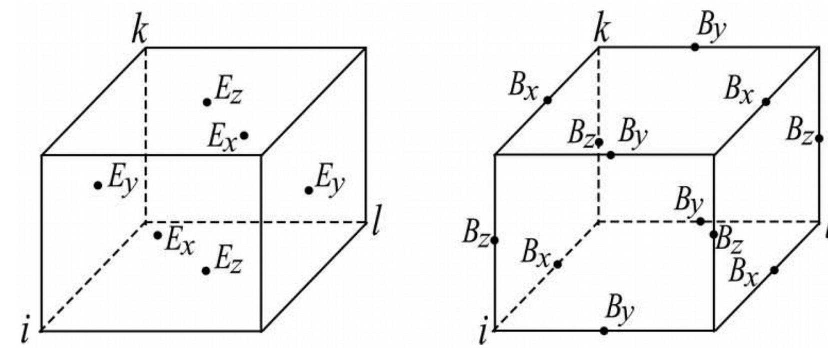




Эйлеров этап: вычисление полей

Схема Ленгдона-Лазинского

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{B^{m+1/2}-B^{m-1/2}}{\tau}=-\mathrm{rot}_h E^m\\&\frac{E^{m+1}-E^m}{\tau}=\mathrm{rot}_h B^{m+1/2}-j^{m+1/2}\end{aligned}}$$



$$\rho=\sum q_p v_p^{m+1/2}\overline{R}(x_p, x_i)$$

$$\boxed{\frac{\rho^{m+1}-\rho^m}{\tau}+\mathrm{div}_h\, j^{m+1/2}=0}$$

$$\mathrm{div}_h B=\frac{B_{x,i+1/2,k,l}-B_{x,i-1/2,k,l}}{h_x}+\frac{B_{y,i,k+1/2,l}-B_{y,i,k-1/2,l}}{h_y}+\frac{B_{z,i,k,l+1/2}-B_{z,i,k,l-1/2}}{h_z}$$

$$\mathrm{rot}_h B=\begin{pmatrix}\dfrac{B_{z,i,k,l-1/2}-B_{z,i,k-1,l-1/2}}{h_y}-\dfrac{B_{y,i,k-1/2,l}-B_{y,i,k-1,l-1}}{h_z}\\[2ex]\dfrac{B_{x,i-1/2,k,l}-B_{x,i-1/2,k,l-1}}{h_z}-\dfrac{B_{z,i,k,l-1/2}-B_{z,i-1,k,l-1/2}}{h_x}\\[2ex]\dfrac{B_{y,i,k-1/2,l}-B_{y,i-1/2,k,l}}{h_x}-\dfrac{B_{x,i-1/2,k,l}-B_{x,i-1/2,k-1,l}}{h_x}\end{pmatrix}$$

PIC-ядро

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{h}\left(1-\dfrac{|x|}{h}\right), & |x|\le h\\ 0, & |x|>h\end{cases}$$

Лагранжев этап: движение частиц

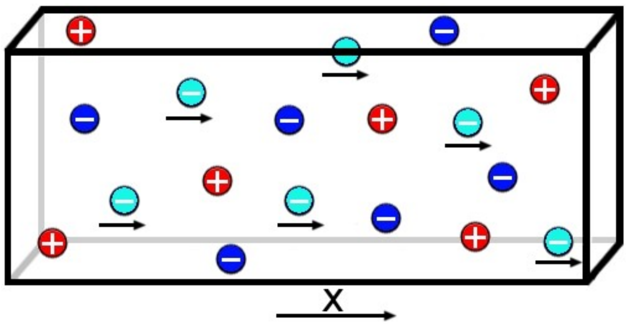
В методе частиц в ячейках среда разбивается на модельные частицы, траекториями движения которых являются характеристики кинетического уравнения Власова

$$\frac{\partial p_{i,e}}{\partial t} = \kappa\left(E + [v, B]\right),$$

$$\frac{\partial r_{i,e}}{\partial t} = v_{i,e}.$$

$$p_{i,e} = \frac{v_{i,e}}{\sqrt{1 - v_{i,e}^2}}, \quad \kappa_e = -1, \quad \kappa_i = m_e / m_{i.}$$

Основные параметры



$$x\in[0,L],\quad y,z\in[0,nh_x]$$

$$k=2\pi/L \longrightarrow W\sim e^{2\gamma t},\ \gamma=\frac{1}{2}\frac{\partial\ln W}{\partial t}$$

$$f(v)=\frac{1}{\Delta v\sqrt{2\pi}}\exp-\frac{(v-v_0)^2}{2\Delta v^2}$$

n_b – плотность пучка

$2(\Delta v)^2$ – температура пучка

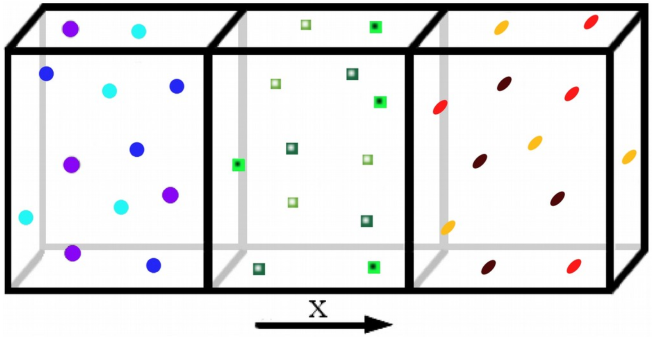
Гидродинамический режим $(k\Delta v\ll\gamma)$ — $n_b=2\cdot10^{-3}$, $\Delta v=0.035$

Переходный режим — $n_b=10^{-3}$, $\Delta v=0.14$

Кинетический режим $(k\Delta v\gg\gamma)$ — $n_b=2\cdot10^{-4}$, $\Delta v=0.14$

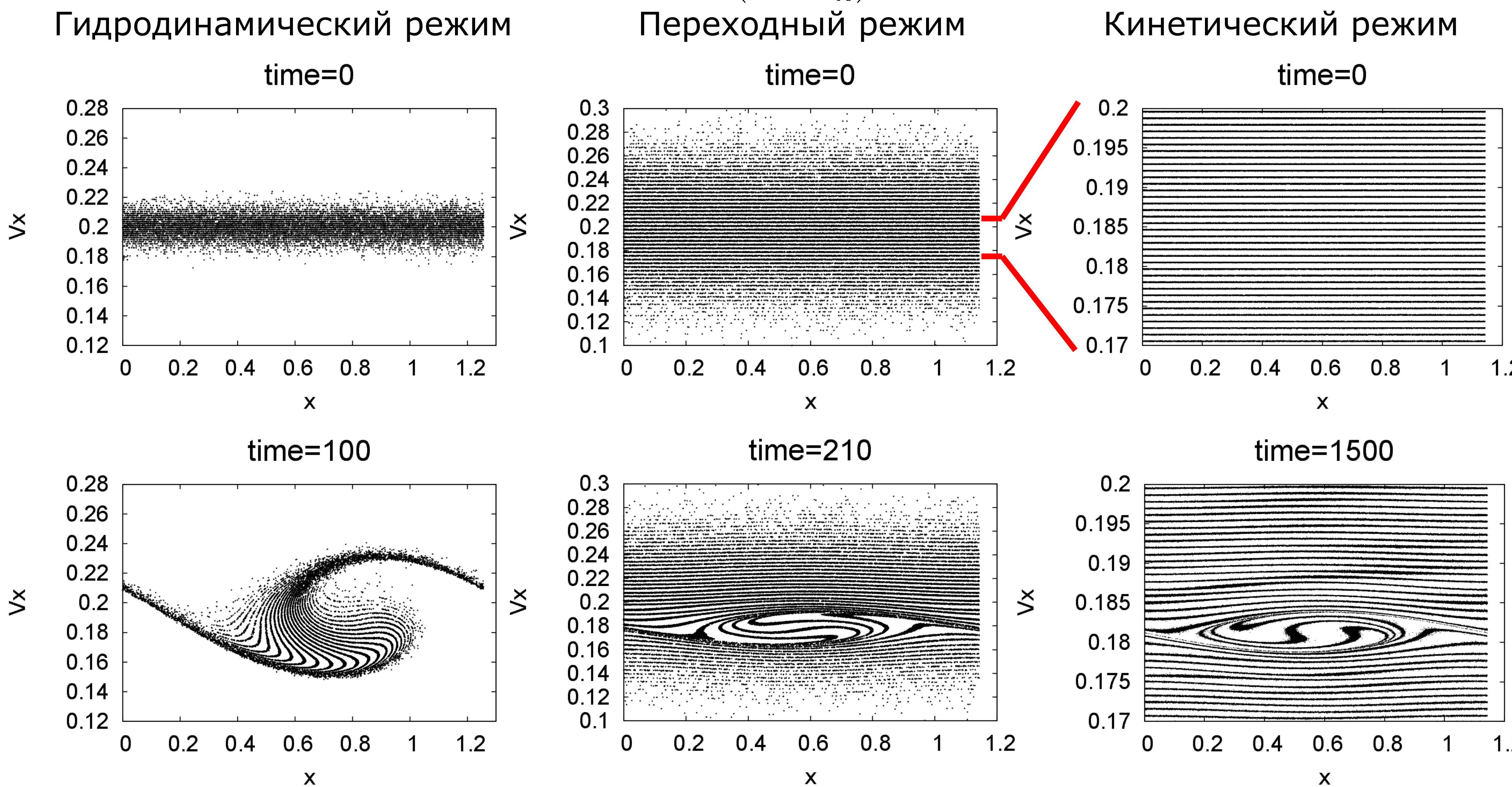
Счетные параметры:

Длина области $L=1.2566$, 1.1424
Сетка по пространству 100x4x4
Временной шаг $\tau=0.001$
Число частиц в ячейке $lp=50...20000$
Число процессоров $np=16...256$



Электроны пучка, фазовая плоскость

$$(x, v_x)$$



Электроны пучка в фазовой плоскости (x,v) для трех режимов развития неустойчивости:

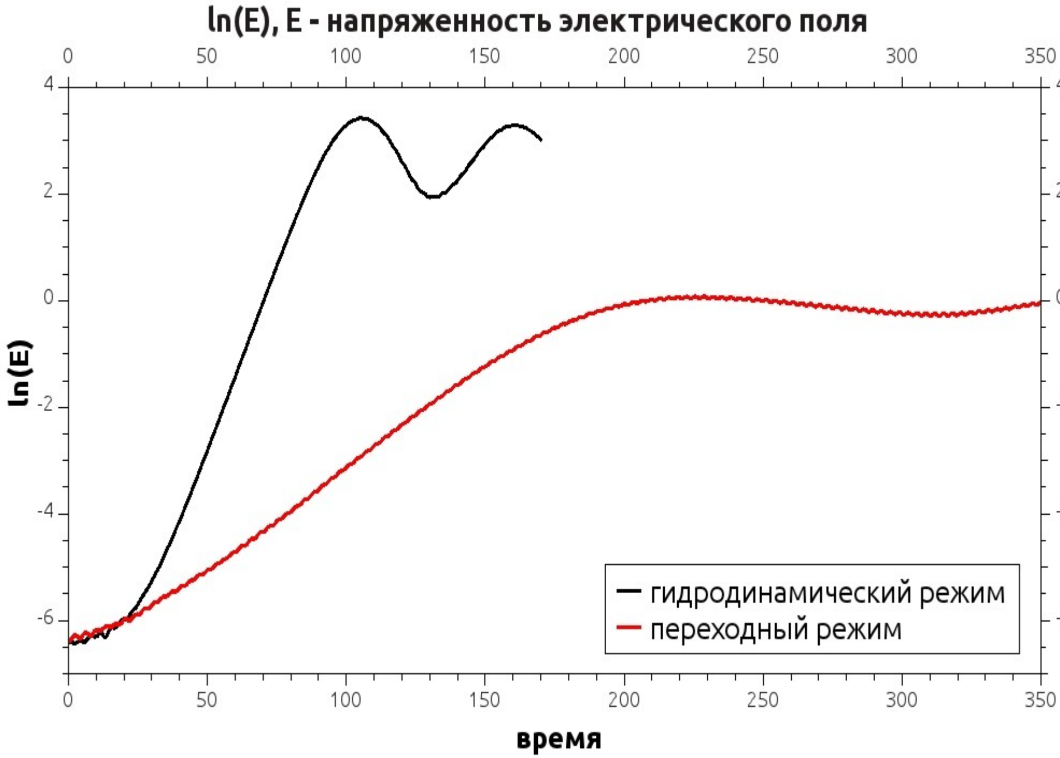
а) гидродинамический режим (γ =0.0722, lp=100),

б) переходный режим (γ =0.0232, lp=1000)

в) кинетический режим (γ =0.0027, lp=5000)

Точность и количество частиц в ячейке

Какого числа частиц в ячейке достаточно ?



1. По энегрии электрического поля

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial \ln W}{\partial t}$$

2. По амплитуде напряженности главной волны электрического поля

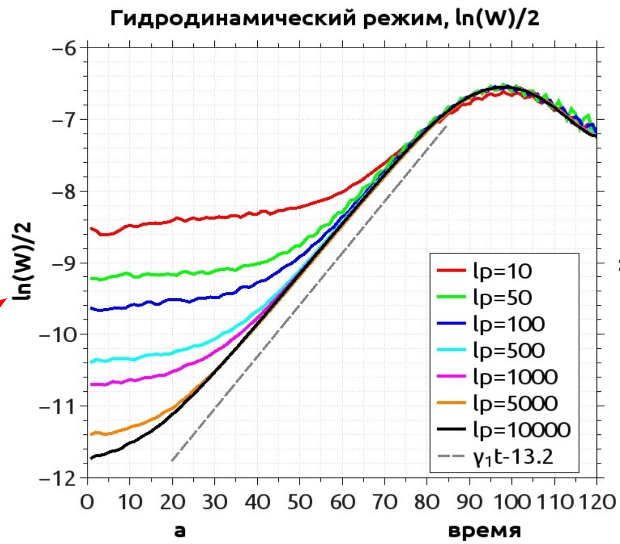
$$\gamma_2 = \frac{\partial \ln E_0}{\partial t}$$

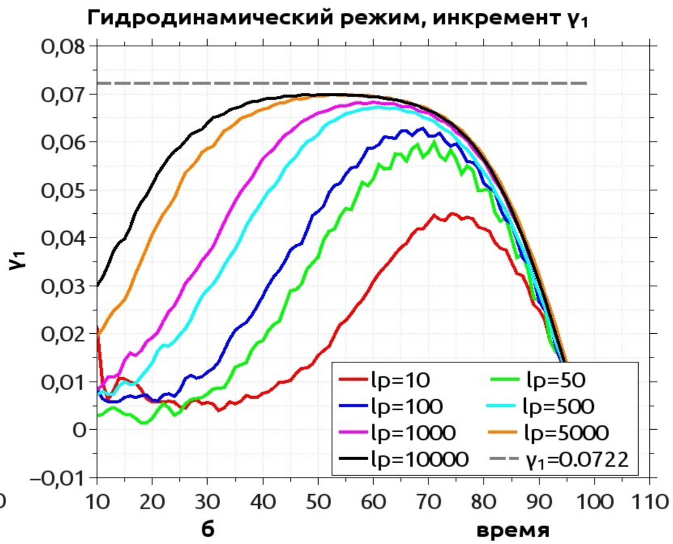
К.В. Лотов, И.В. Тимофеев Переходный режим одномерной двухпотоковой неустойчивости. // Вестник НГУ. Серия: Физика. 2008. Т. 3, вып. 1.

Гидродинамический режим, инкремент

1. Производная от логарифма энергии электрического поля

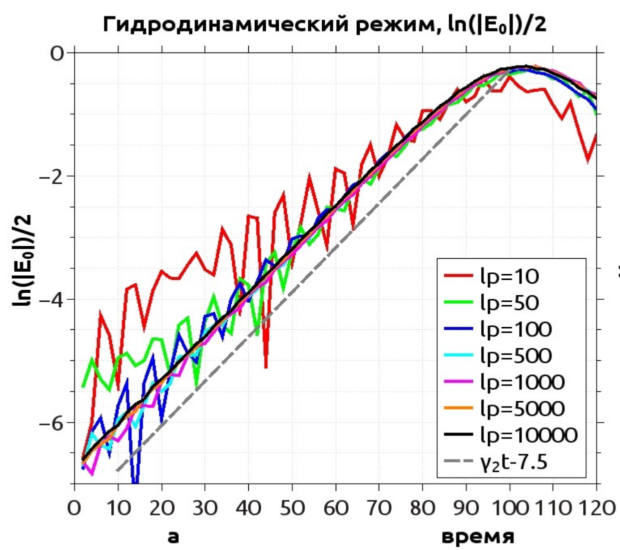
саморазогрев

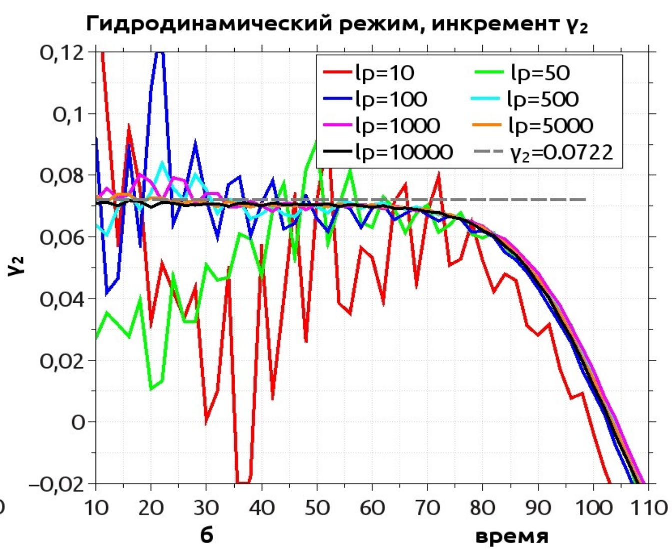




$$\gamma_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial \ln W}{\partial t}$$

2. Производная логарифма амплитуды главной волны напряженности электрического поля

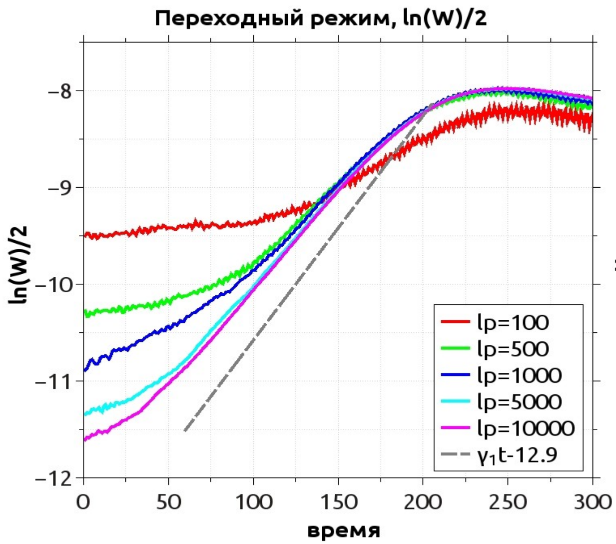


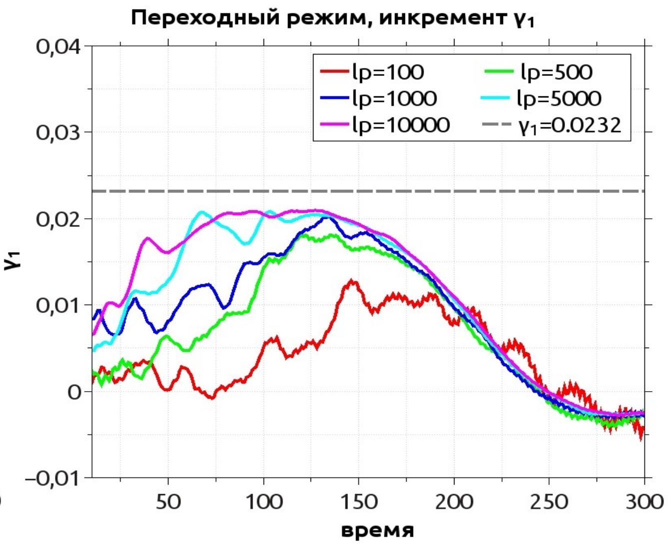


$$\gamma_2 = \frac{\partial \ln E_0}{\partial t}$$

Переходный режим, инкремент

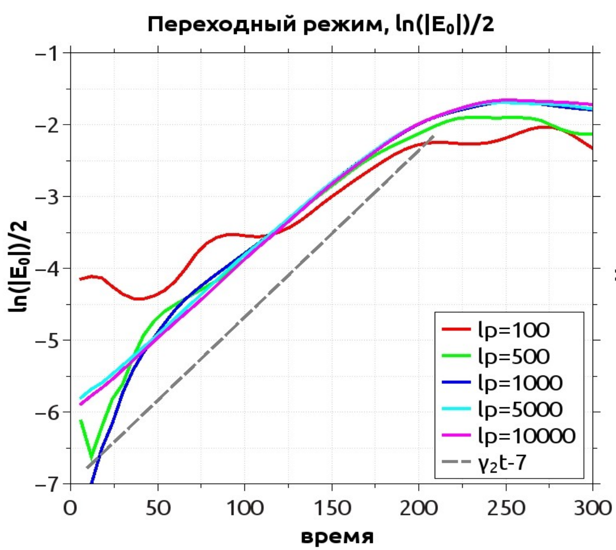
1. Производная от логарифма энергии электрического поля

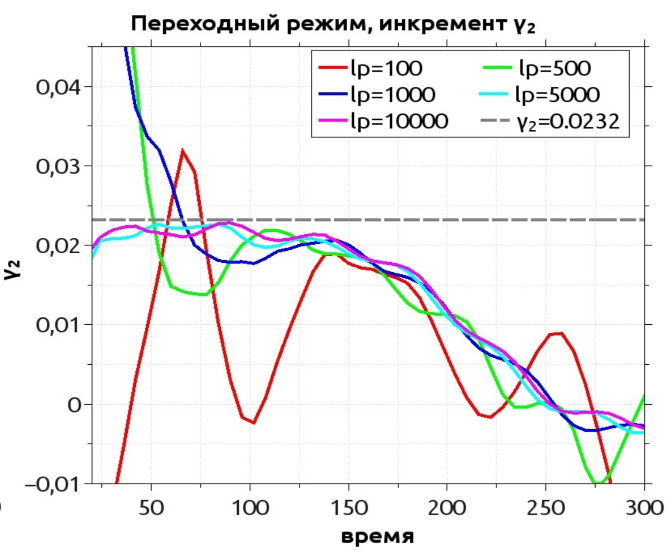




$$\gamma_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial \ln W}{\partial t}$$

2. Производная логарифма амплитуды главной волны напряженности электрического поля

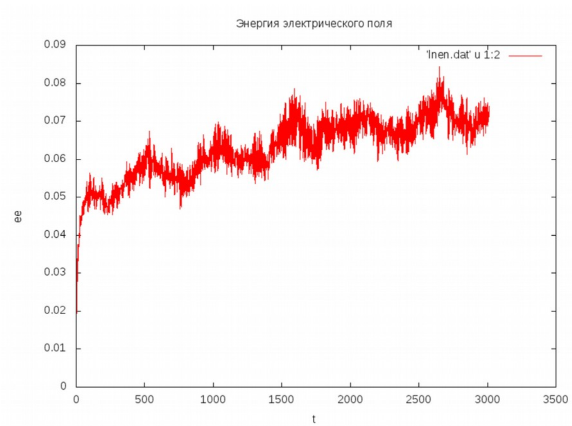




$$\gamma_2 = \frac{\partial \ln E_0}{\partial t}$$

Кинетический режим, инкремент

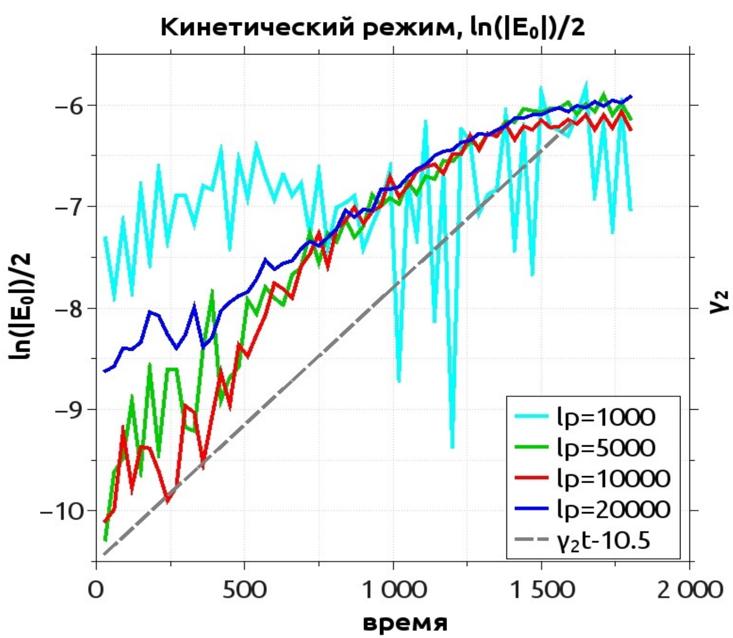
1. Производная от логарифма энергии электрического поля



В кинетическом режиме из-за шумов вычисление инкремента по энергии становится невозможным.

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial \ln W}{\partial t}$$

2. Производная логарифма амплитуды главной волны напряженности электрического поля



$$\gamma_2 = \frac{\partial \ln E_0}{\partial t}$$

Три режима, ошибка вычисления икремента

$\gamma_1^0 = 0{,}0722$

$$\Delta v = v_0 * 0.035 = 0{,}007$$
$$k = 2\pi / L,$$
$$L = 1.2566$$

$$\frac{\gamma}{k \Delta v} = 2{,}06 > 1$$

$\gamma_2^0 = 0{,}0232$

$$\Delta v = v_0 * 0.14 = 0{,}028$$
$$k = 2\pi / L,$$
$$L = 1.1424$$

$$\frac{\gamma}{k \Delta v} = 0{,}15 < 1$$

$\gamma_3^0 = 0{,}0027$

$$\Delta v = v_0 * 0.14 = 0{,}028$$
$$k = 2\pi / L,$$
$$L = 1.1424$$

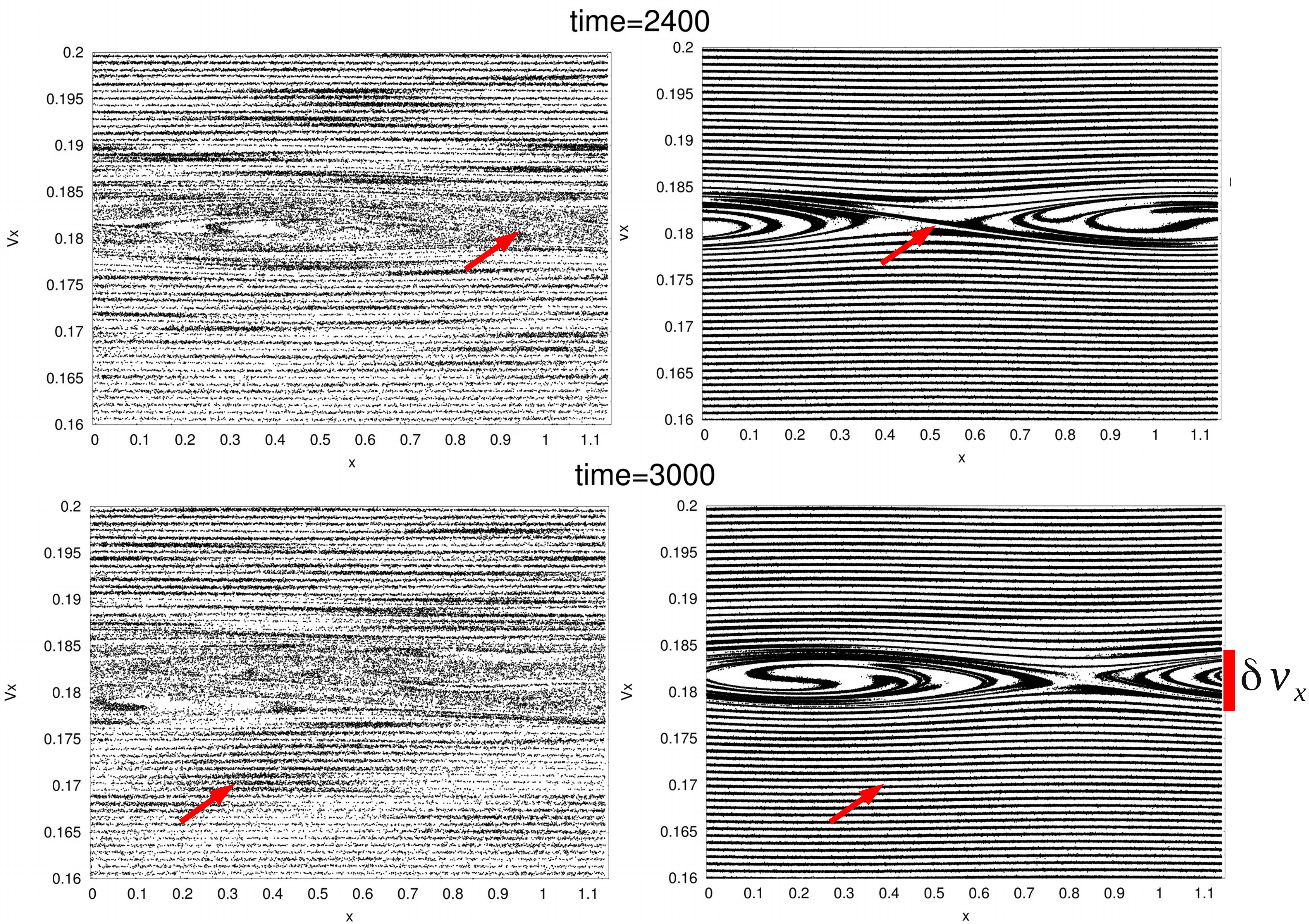
$$\frac{\gamma}{k \Delta v} = 0{,}017 \ll 1$$

$\mathit{ошибка}(\%)$ − относительная погрешность вычисления инкремента неустойчивой волны

γ_i − численное значение инкремента, γ_i^0 − аналитическое значение инкремента

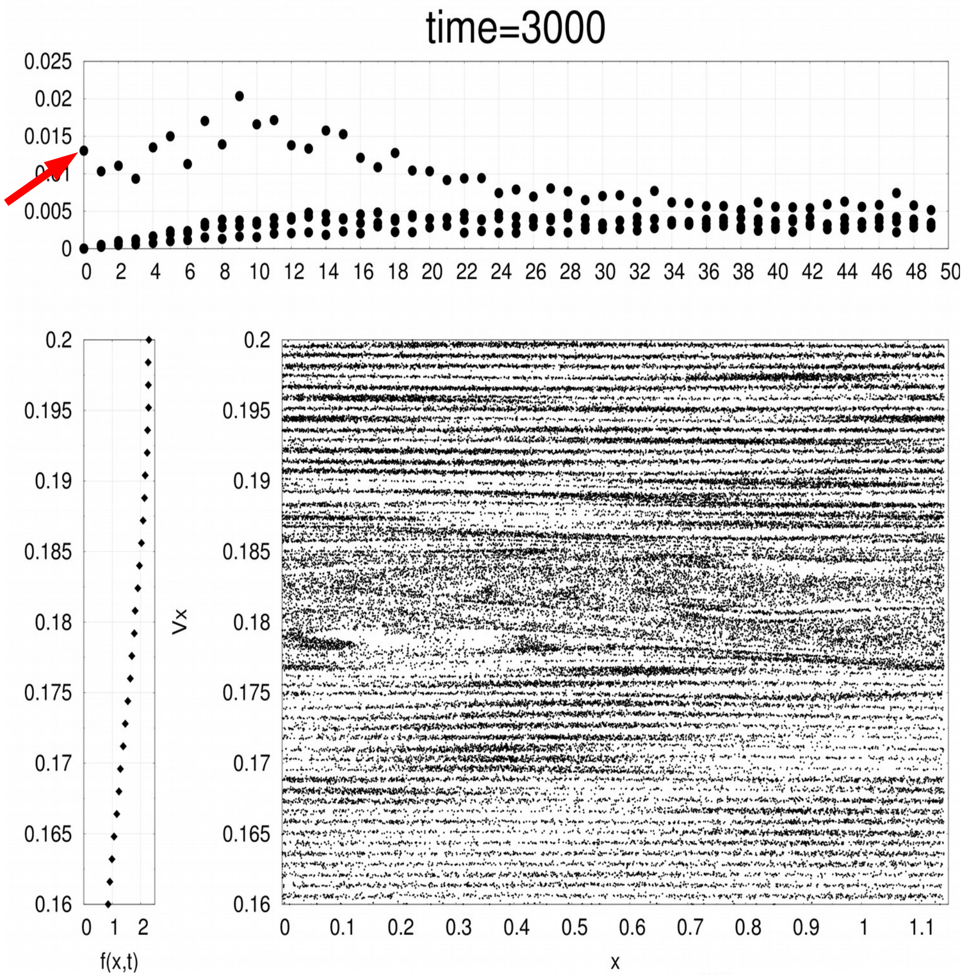
Ip	$\gamma_1 = \frac{\partial(\ln A_1)}{\partial t}$	$\mathit{ошибка}(\%)$	γ_2	$\mathit{ошибка}(\%)$	γ_3	$\mathit{ошибка}(\%)$
50	0,056	6	0,017	27	-	-
500	0,07	3	0,02	14	-	-
2500	0,071	2	0,021	9	0,002	20
5000	0,071	2	0,022	5	0,002	20
10000	0,071	2	0,022	5	0,002	20

Кинетический режим, lp=1000, 20000

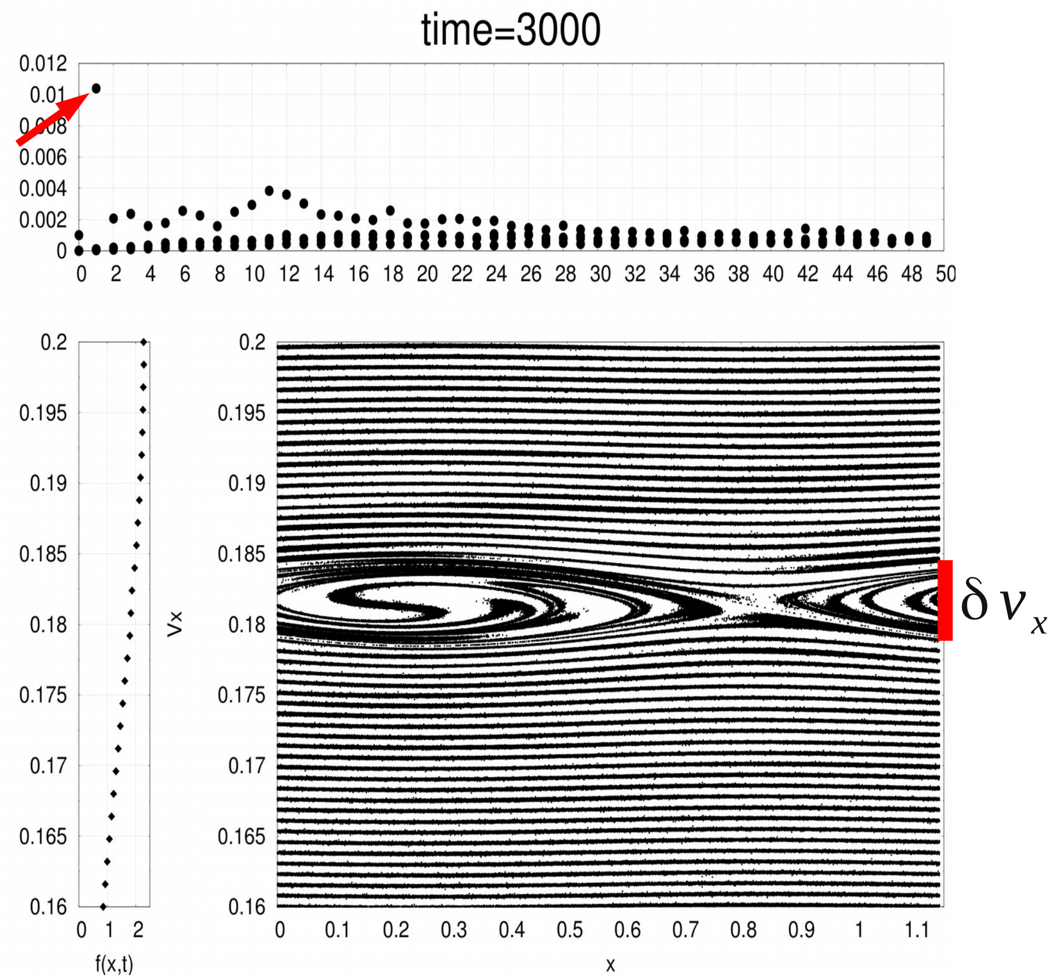


Кинетический режим: Ip=1000, 20000

Ip=1000



Ip=20000



Для вычисления инкремента с точностью 25% необходимо иметь около $2 \cdot 10^5$ модельных частиц пучка в интервале скоростей δv_x, в котором происходит взаимодействие пучка с неустойчивой волной.

Достаточное число частиц

- (в терминах числа частиц в ячейке)

Как показала дополнительно проведенная серия расчетов с разной шириной области и разным шагом по пространству, для данной задачи достаточным можно считать число частиц пучка в волновом пакете, равное $2 \cdot 10^5$.

Ширина волнового пакета по y и z $\sim k_s^{-1} = L/2\pi = 1.1424/2\pi \sim 0.18$
$h = L/100$
Получаем, что ширина волнового пакета по y и z $= 16h$.

Значит $2 \cdot 10^5 / (n_x n_y n_z) = 2 \cdot 10^5 / (100 \cdot 16^2) \sim 10$ частиц в ячейке достаточно для коректного моделирования в случае, когда весь пучок вступает во взаимодействие с волной.

Если же неустойчивость развивается в кинетическом режиме, и только малая часть
$\epsilon =$ полное число частиц пучка/число частиц в резонансе
электронов захватывается волной, то необходимое число частиц в ячейке $l_p \sim 10/\epsilon$.

K.V. Lotov, I.V. Timofeev, E.A. Mesyats, A.V. Snytnikov, V. A. Vshivkov
Note on quantitatively correct simulations of the kinetic beam-plasma instability // PHYSICS OF PLASMAS 22, 024502 (2015)

Направление дальнейшей работы

В настоящее время ведется разработка универсального пакета программ на GPU со встраиваемыми, в том числе и под данную задачу, модулями. Область моделирования реализуется в виде парамеризованного класса (шаблона) языка C++. Его параметром является класс ячейка, один из методов которого реализует ядро метода частиц. Данный пакет позволит не только проводить расчеты быстрее, но и даст возможность локально заменять некоторые блоки, такие как форма ядра модельной частицы и расчет токов. Таким образом технология шаблонов даст возможность быстро производить замену формы ядра частицы, а использование ядер модельных частиц повышенной гладкости позволит получать более точный результат с меньшим количеством частиц.

Спасибо за внимание