

**ГИБРИДНЫЙ ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ
НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ
СРЕДЫ С ПРИМЕНЕНИЕМ АДАПТИВНЫХ
НАЛОЖЕННЫХ СЕТОК**

Н.Г. Бураго¹, И.С. Никитин², В.Л. Якушев²

¹ИПМех РАН, ²ИАП РАН

Дюрсо - 2015

Рассматриваются

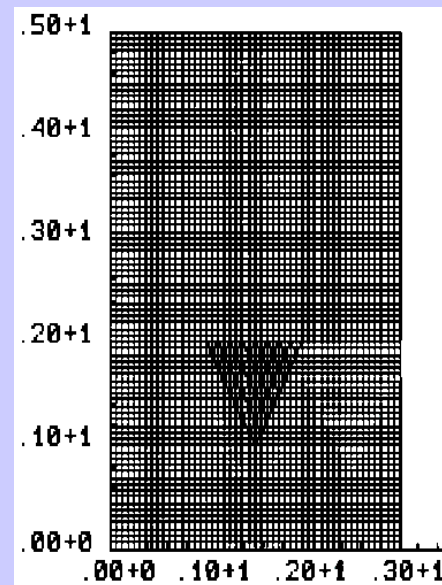
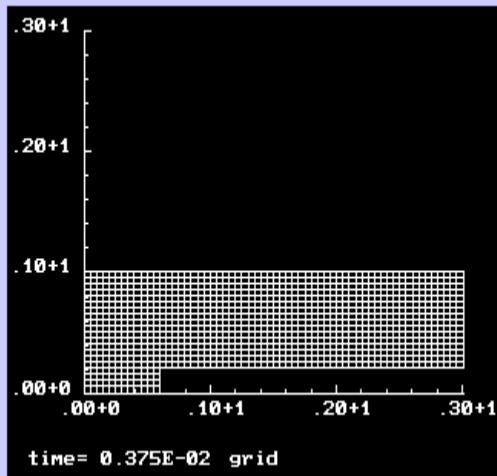
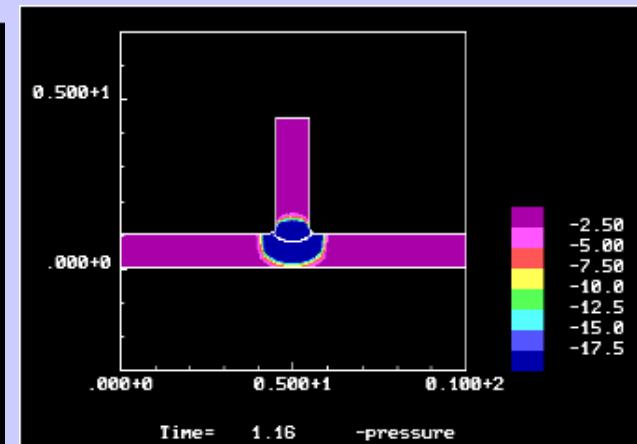
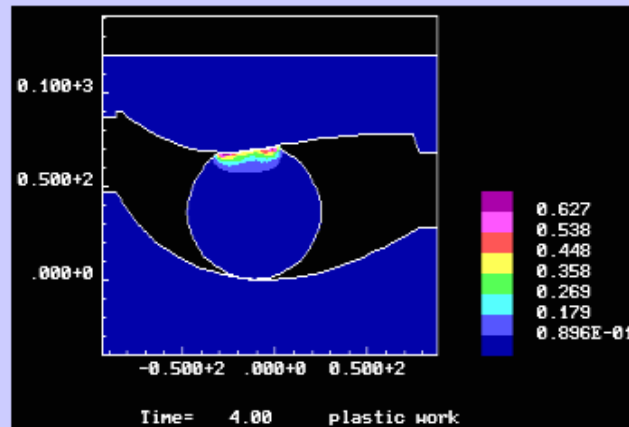
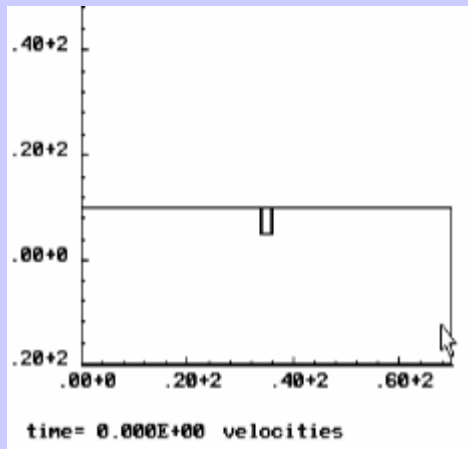
задачи механики сплошной среды в подвижных областях сложной геометрии

Доклад о том, что дает совместное применение трех составляющих:

1. Подвижные адаптивные сетки
2. Схема уравнивающей вязкости
3. Наложенные сетки

Типы адаптации сетки

- 1) Описание границ областей сложной переменной формы
- 2) Минимизация ошибок аппроксимации ($\min |hdy/dx|$)



Основа: уравнения нелинейной термоупругости для генерации адаптивных сеток

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tilde{\mathbf{x}}, t) : \quad \min_{\tilde{V}} \int \varphi(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tilde{\mathbf{T}}) d\tilde{V} \quad \mathbf{x}|_{\tilde{x} \in \partial\tilde{V}} = \mathbf{x}_*(\tilde{\mathbf{x}}, t)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0.5(\tilde{\mathbf{F}}^T \times \tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{I}) \quad \tilde{\mathbf{F}}^T = \tilde{\nabla} \otimes \mathbf{x} \quad \tilde{\mathbf{T}} = \| \tilde{\nabla} \otimes \mathbf{y} \|$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \neq 0 \Rightarrow \varphi > 0$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = 0 \Rightarrow \varphi = 0$$

Бураго Н.Г., Иваненко С.А. Применение уравнений теории упругости к построению адаптивных сеток // Труды Всеросс. Конф. по прикладной геометрии, построению сеток и высокопроизводительным вычислениям, М.: ВЦ РАН, 2004, 28 июня- 1 июля. С. 107-118

Сетка трактуется как изотропная термоупругая среда:

$$\min_{\tilde{\mathbf{V}}} \int [\tilde{\mathbf{K}}[(I_{3\varepsilon} - 1)/2 + I_{1\varepsilon}\tilde{\mathbf{T}}] + 2\tilde{\mu}I_{2\varepsilon}] J_*^{-\alpha} d\tilde{\mathbf{V}}$$

$$x|_{\tilde{x} \in \partial\tilde{\mathcal{V}}} = x_*(\tilde{x}, t) \quad \alpha \geq 0.5$$

$$I_{1\varepsilon} = \tilde{\varepsilon} : \mathbf{I} \quad I_{2\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}' : \tilde{\varepsilon}' \quad I_{3\varepsilon} = \det(\tilde{\mathbf{F}}^T : \tilde{\mathbf{F}}) = J^2$$

$$\tilde{\varepsilon}' = \tilde{\varepsilon} - (\tilde{\varepsilon} : \mathbf{I})\mathbf{I}/3 \quad J = \det(\tilde{\mathbf{F}}) \quad J_* = \max(J, 10^{-4})$$

Управление отображением

$$\min_{\tilde{V}} \int [\tilde{K}[(I_{3\varepsilon} - 1) / 2 + I_{1\varepsilon} \tilde{T}] + 2\tilde{\mu}I_{2\varepsilon}] J_*^{-\alpha} d\tilde{V}$$

$$\tilde{T} = \| \nabla \mathbf{y} \|$$

Формоизменение:

$$\mu > 0$$

Сжимаемость:

$$K > 0$$

Эффект «температурного расширения»

$$\tilde{T} = \| \nabla \mathbf{y} \|$$

способ расчета адаптивных сеток - установление

$$\int_{\tilde{V}} [M \partial_t x \cdot \delta x + (L : \tilde{\nabla} x) : \tilde{\nabla} \delta x - f \delta J] d\tilde{V} = 0$$

$$f = \alpha J^{-(1+\alpha)} (\dots) \quad \alpha \geq 0.5$$

$$X \Big|_{\tilde{x} \in \partial \tilde{V}} = X_* (\tilde{X}, t)$$

Алгоритм: явная двухслойная схема установления
с масштабированием, уравнивающим вклады от L и J

Подробности: ipmnet.ru/~burago

2. Схема уравновешивающей вязкости (вариант стабилизированной схемы Петрова- Галеркина)

Уравнения для задач механики жидкости и газа

$$\int_V \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} + \mathbf{v}_{art} \nabla \rho) \right) \cdot \delta \rho \right] dV = 0$$

$$\int_V \left[\left(\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathbf{I}) + \rho \mathbf{g} \right) \cdot \delta \mathbf{u} + \boldsymbol{\sigma}_v : \nabla \otimes \delta \mathbf{u} \right] dV = \int_S (\boldsymbol{\sigma}_v \cdot \mathbf{n}) \cdot \delta \mathbf{u} dS$$

$$\int_V \left[\left(\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho E + p) \mathbf{u}) - \rho r \right) \delta T - \mathbf{q} : \nabla \delta T \right] dV = - \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \delta T dS$$

$$\boldsymbol{\sigma}_v = 2\mu_v (\mathbf{e} - (\mathbf{e} : \mathbf{I}) \mathbf{I} / 3) + \mathbf{v}_{art} \nabla \otimes (\rho \mathbf{u}) \quad p = (\gamma - 1) \rho U$$

$$\mathbf{q} = -k_T \nabla T - \mathbf{v}_{art} \nabla (\rho E) \quad E = U + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} / 2$$

$$\mathbf{e} = 0.5(\nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T)$$

Уравнения для твердых деформируемых сред аналогичны

Упрощенная явная схема SUPG FEM¹ (вариант стабилизированного метода Петрова-Галеркина)

$$v_{art}^{(k)} = \alpha_k^n \frac{d_{1k}^n}{d_{2k}^n} \quad \begin{array}{l} \text{если} \\ \text{иначе} \end{array} \quad \begin{array}{l} |u|/c \geq 1 \wedge \nabla \cdot \mathbf{u} < 0 \\ \alpha_k^n = 1.0 \end{array} \quad \text{то} \quad \alpha_k^n = 0.5$$

$$(d_{1k}^n)^2 = \sum_{l=1}^M [\langle \nabla \cdot (\xi^n \mathbf{u}^n + \pi) \rangle_k d_{kl}^0]^2 \quad \langle \xi \rangle_k = \sum_{l=1}^M d_{kl}^0 \xi_{J(k,l)} \quad \xi = \rho, \rho u_x, \rho u_y, \rho u_z, \rho E$$

$$(d_{2k}^n)^2 = \sum_{l=1}^M [\langle \nabla \xi^n \rangle_k \cdot \nabla_{kl}]^2 \quad \langle \nabla \xi \rangle_k = \sum_{l=1}^M \nabla_{kl} \xi_{J(k,l)}$$

¹Brooks A.N., Hughes T.J.R. *Streamline Upwind Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows* // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 32. (1982) pp. 199-259.

Искусственная диффузия “уравновешивает” по норме невязкие потоки

Невязкие потоки = конвективная + консервативная части потока

Упрощение: центральные разности

Коррекция физической вязкости по А.А.Самарскому (“схема экспоненциальной подгонки”)

$$\tilde{\sigma}_v = 2\tilde{\mu}_v(\mathbf{e} - (\mathbf{e} : \mathbf{I})\mathbf{I}/3) \quad \tilde{\mathbf{q}} = -\tilde{k}_T \nabla T$$

$$\tilde{\mu}_v / \rho = \frac{\mu_v / \rho}{1 + \frac{v_{\text{art}}}{\mu_v / \rho}} + v_{\text{art}} \quad \tilde{k}_T / \rho = \frac{k_T / \rho}{1 + \frac{v_{\text{art}}}{k_T / \rho}} + v_{\text{art}}$$

Условие устойчивости (Курант-Фридрихс-Левы)

$$\Delta t^n < \min_{k=1, N_2} \left[\frac{h_k^n}{(c_k^n + |\mathbf{u}_k^n| + (D+1)v_k^n / h_k^n)} \right]$$

Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У. *Равномерные численные методы решения задач с погранслоем*. М.: Мир, 1983. 199 с.

Физическая вязкость уменьшается с ростом искусственной

Резюме численного метода.

Формулировка Галеркина. Симплекс-элементы. Адаптивная подвижная сетка. Все неизвестные в узлах.

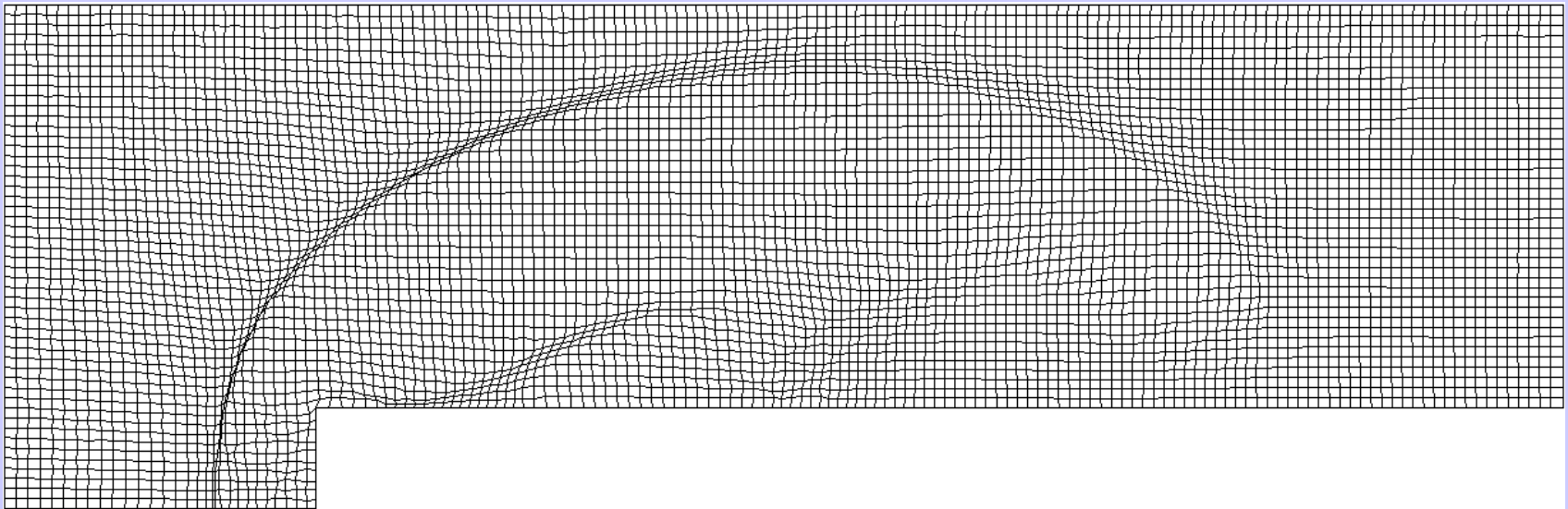
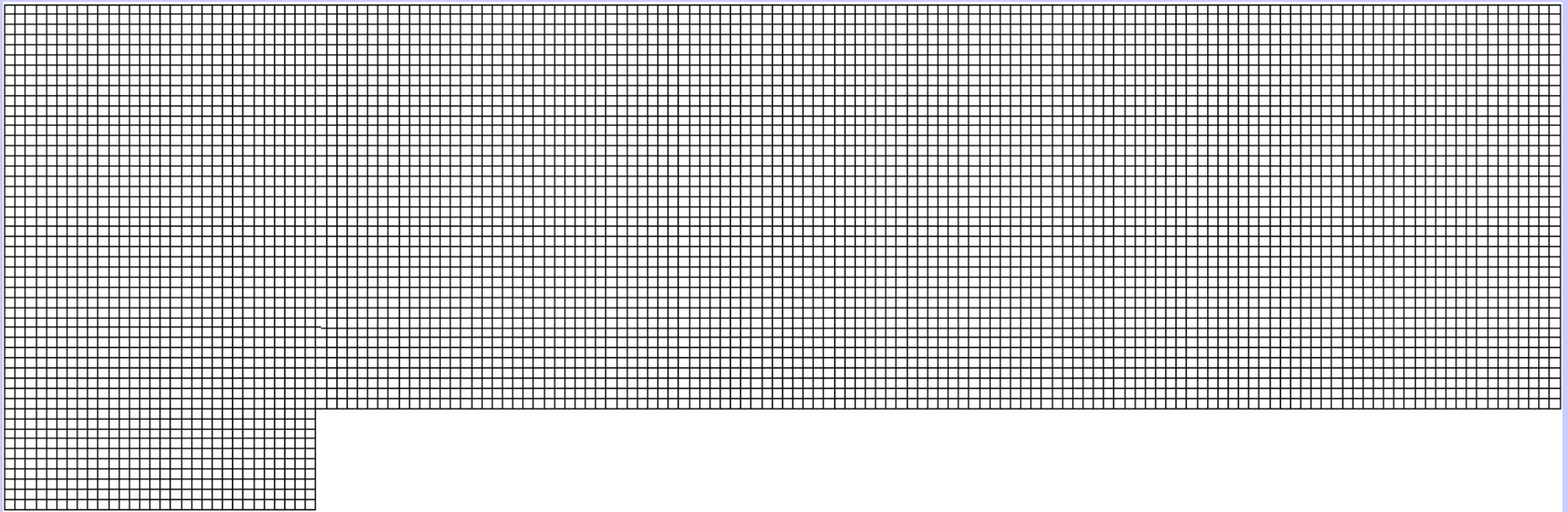
МКЭ аналог центрально-разностных схем по пространству.

Явная схема для сжимаемых сред:

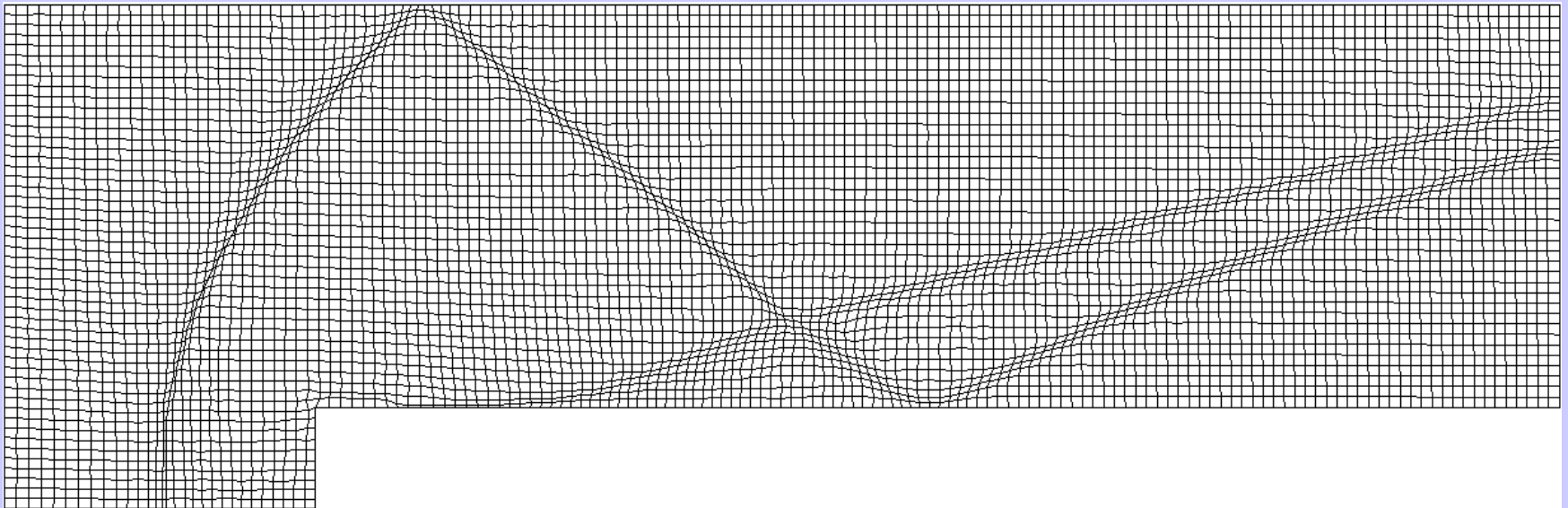
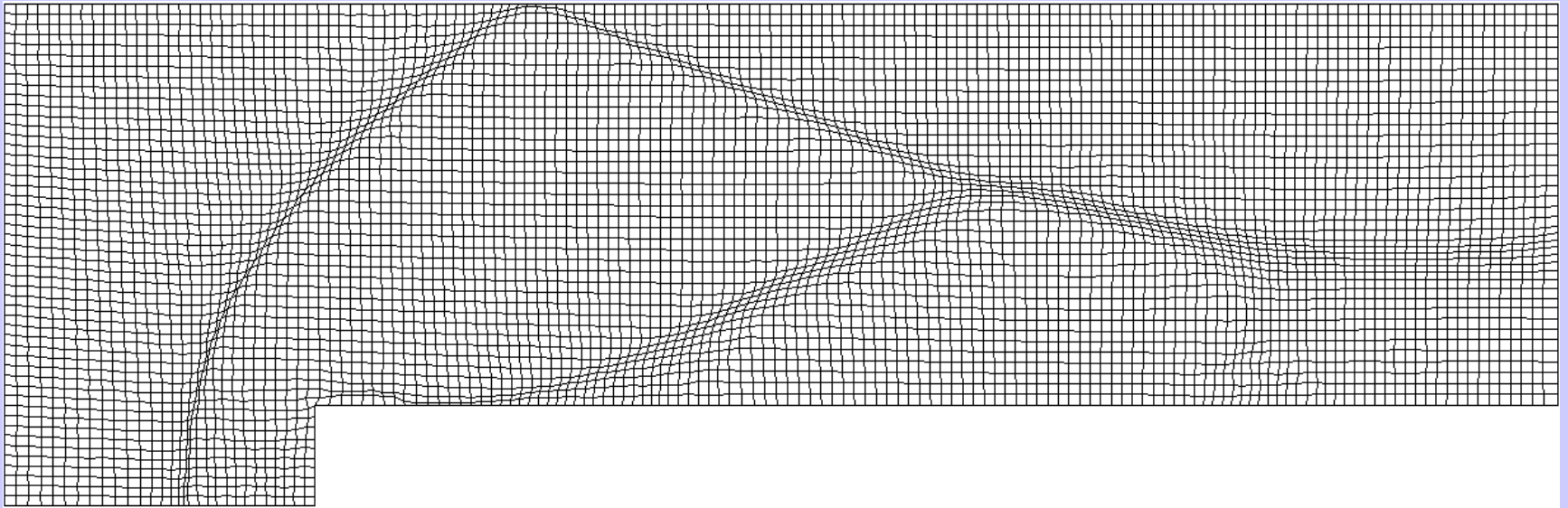
Вариант стабилизированной схемы Петрова-Галеркина

Экспоненциальная подгонка физической вязкости.

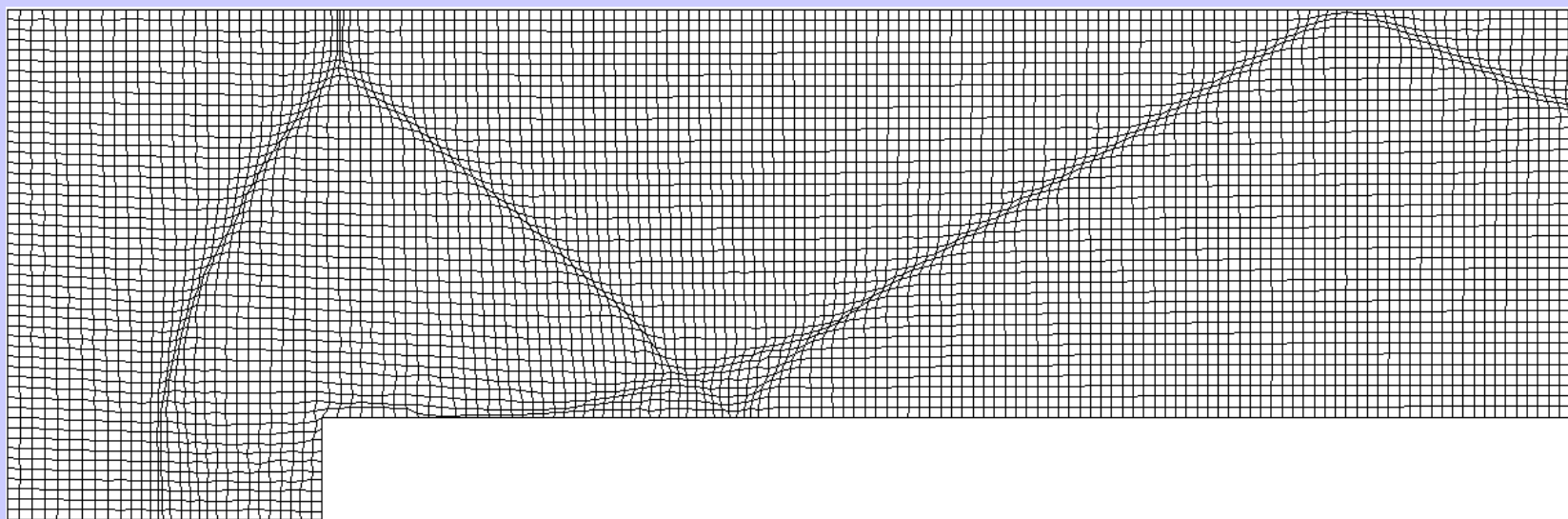
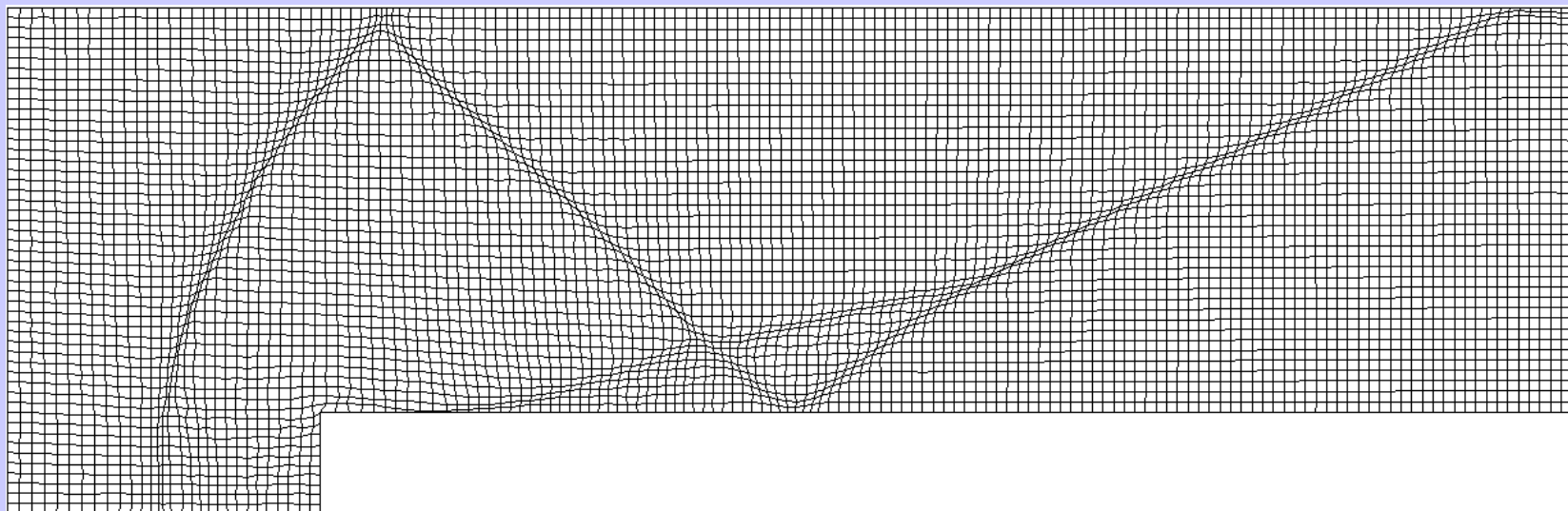
Адаптация: отдельный этап на каждом шаге по времени



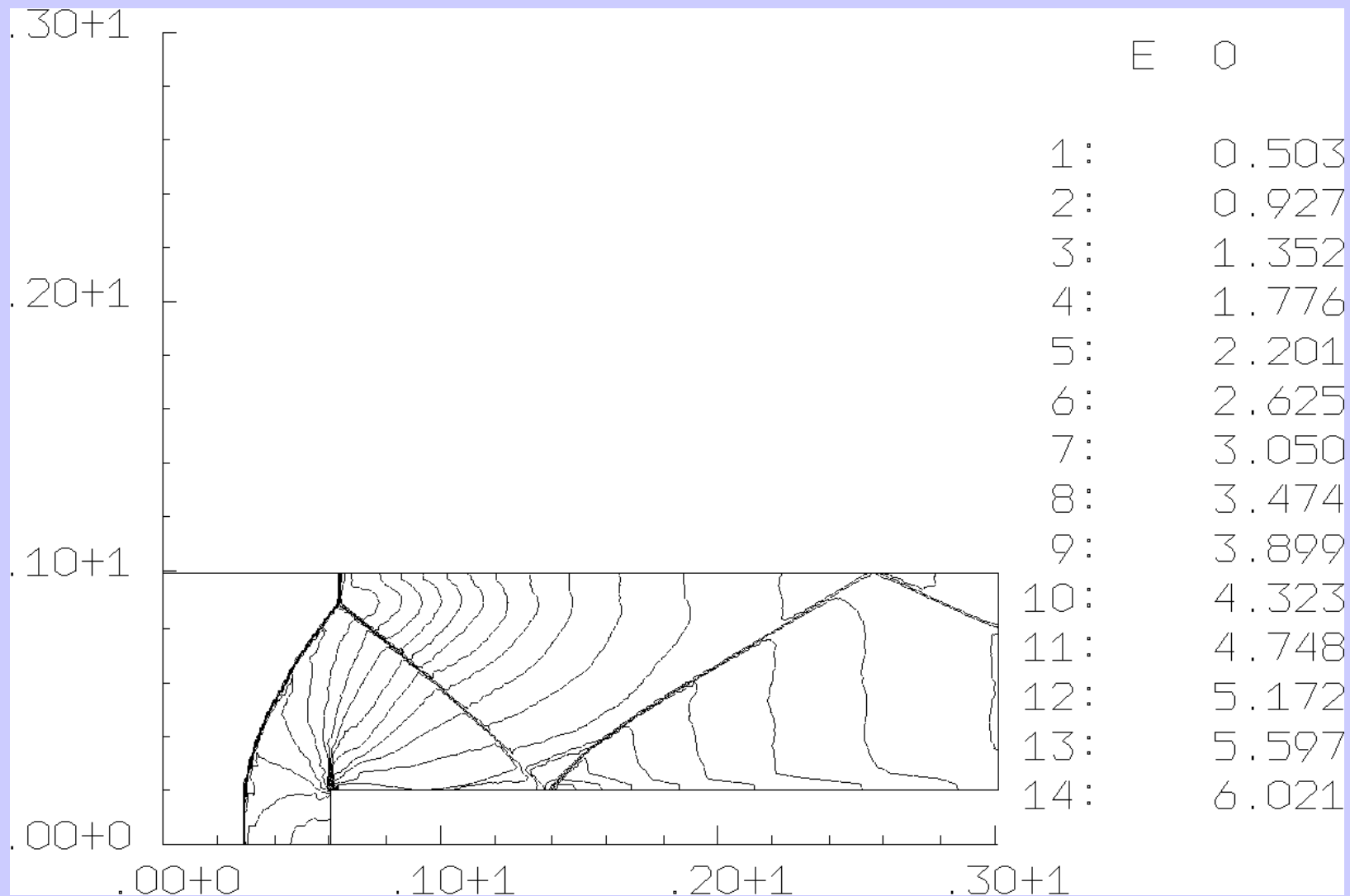
Течение идеального газа в канале $M=3$; $\gamma=1.4$; $t = 0; 0.5$;



Течение идеального газа в канале $M=3$; $\gamma=1.4$; $t = 1.0$; 2.0 ;



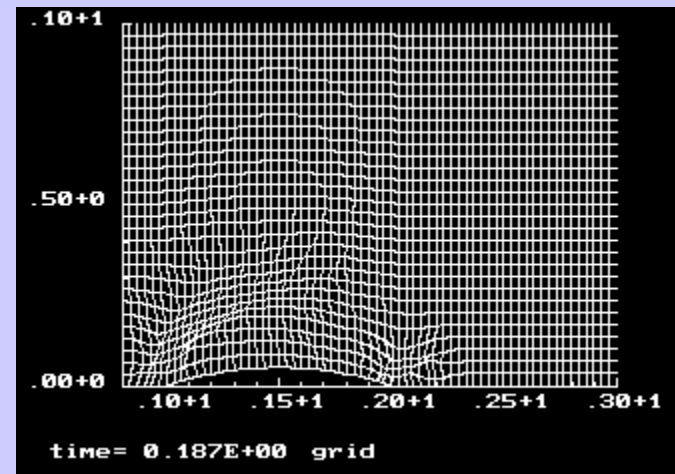
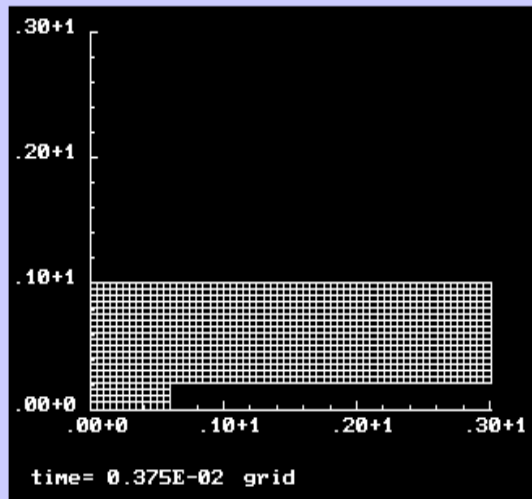
Течение идеального газа в канале $M=3$; $\gamma=1.4$; $t = 3.0$; 4.0 ;



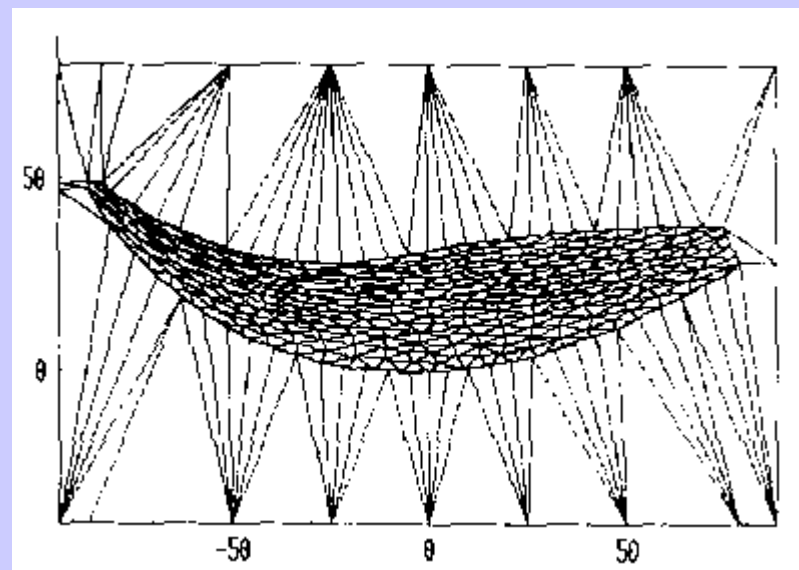
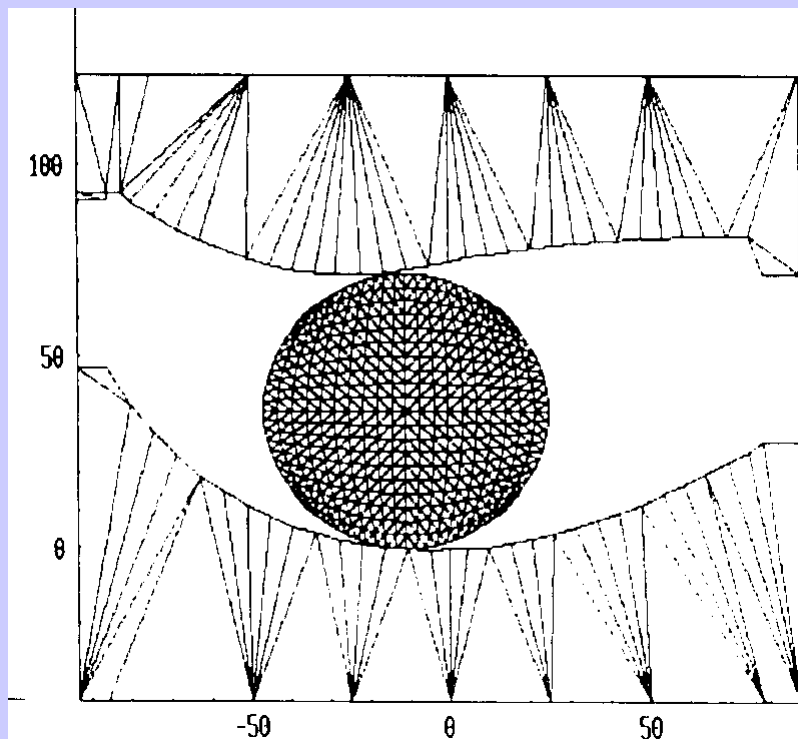
Течение идеального газа в канале $M=3$; $\gamma=1.4$; $t = 4.0$;

Изолинии плотности; Адаптация по дивергенции скорости

Адаптивные сетки для сверхзвуковых течений в каналах с препятствиями



Адаптивная сетка для штамповки лопатки турбины.



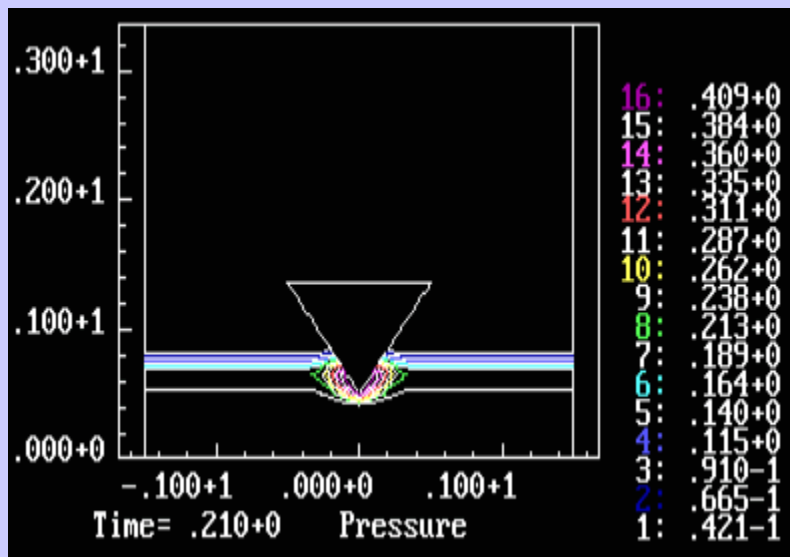
$$\tilde{K} \gg \tilde{\mu} \quad \tilde{T} = 0$$

поддержание равномерного распределения узлов

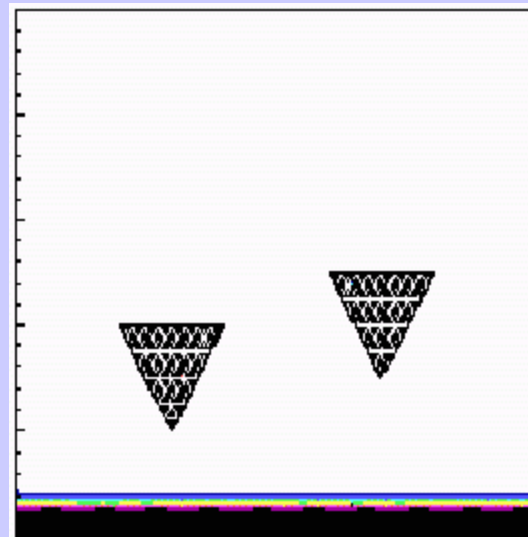
3. Наложённые сетки для описания сложной геометрии

Наложенные сетки – зачем они?

Примеры расчета сверхзвукового обтекания тел



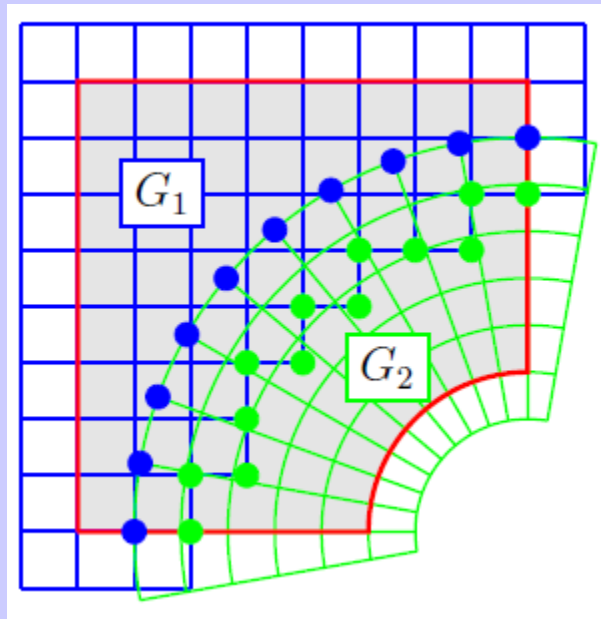
Сетка с вырезом



Наложенные сетки

Метод наложенных сеток (Overlapping or Chimera grids)

*Основная
окаймляющая сетка*



+

Наложённые сетки

Расчет проводится шагами по явной схеме или итерациями по неявной схеме отдельно на основной сетке и на наложенных сетках, при этом после каждого шага (итерации) с помощью интерполяции проводится обмен расчетными данными между сетками в зоне наложения.

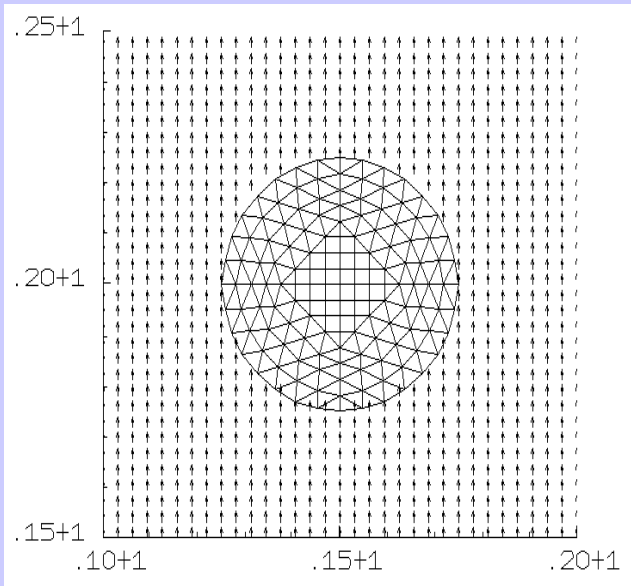
Упрощенный метод наложенных сеток

Цель: простое решение проблемы сложной геометрии

*Основная
окаймляющая сетка*

+

Наложённые сетки

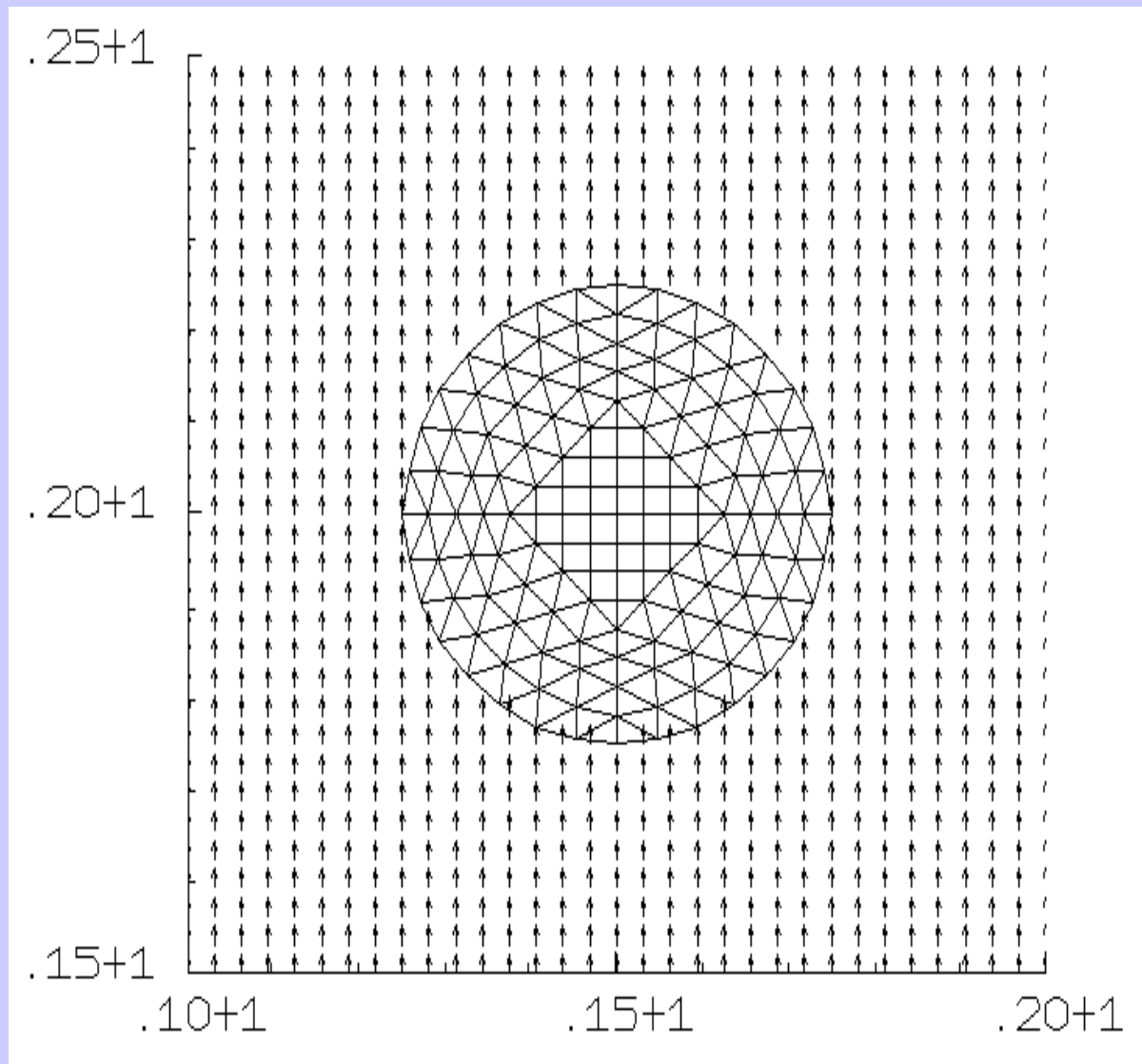


Наложённые сетки используются только для приближенного задания границ и граничных условий на основной сетке

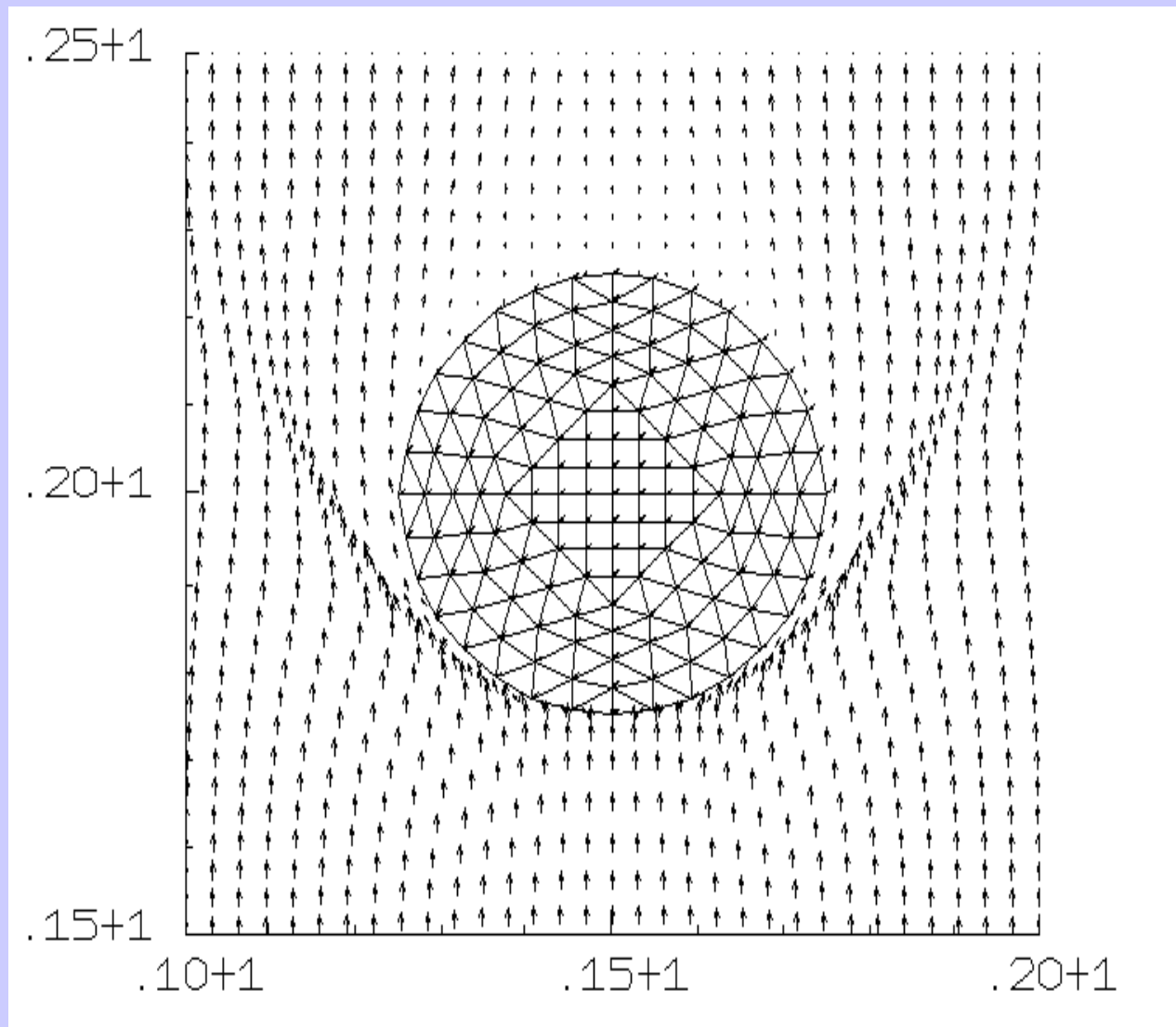
=====

Вместо наложенных сеток можно использовать наложенные области, определяемые набором условий

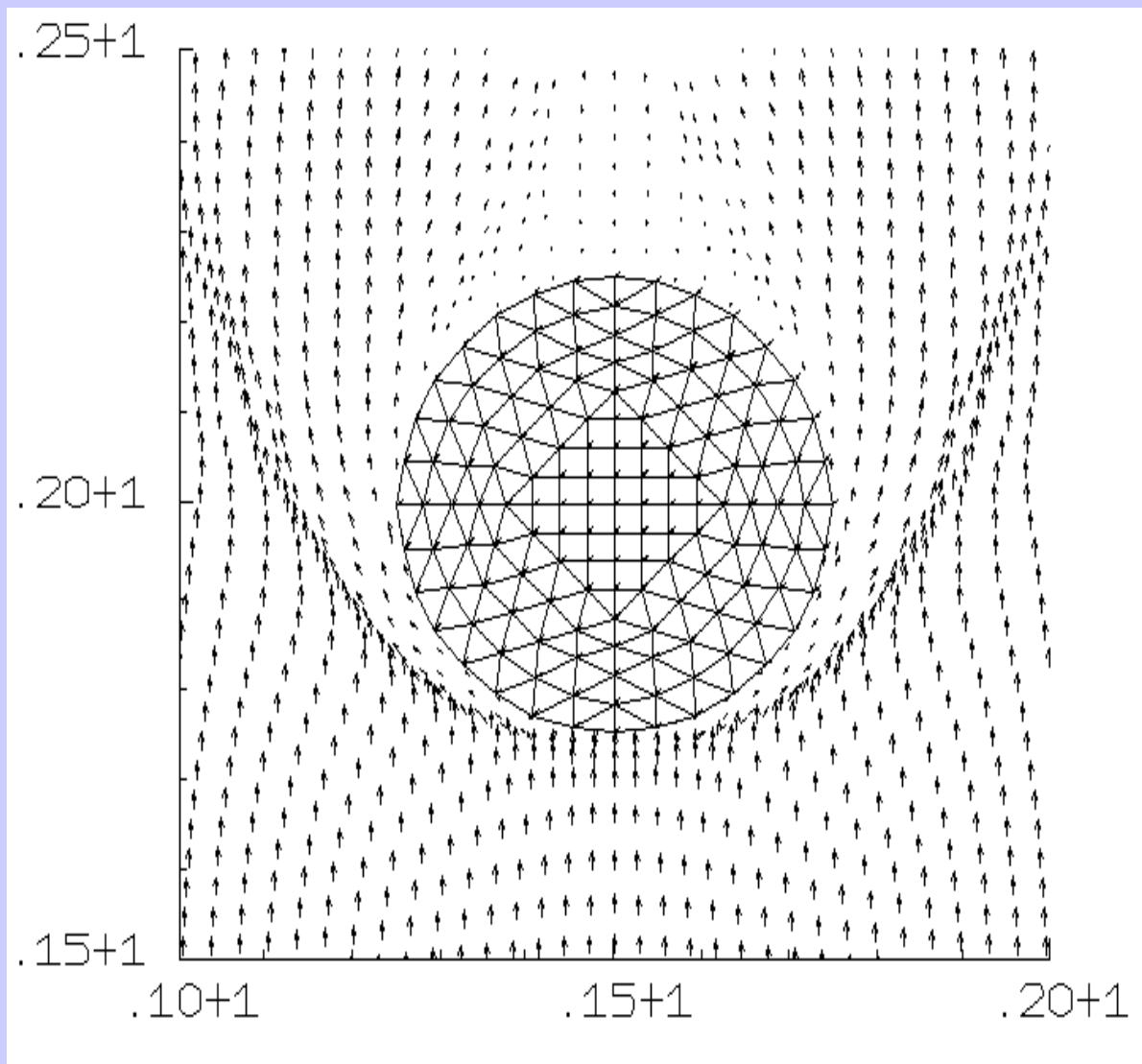
Фрагмент области решения около наложенной сетки поле скоростей ($t=0$)



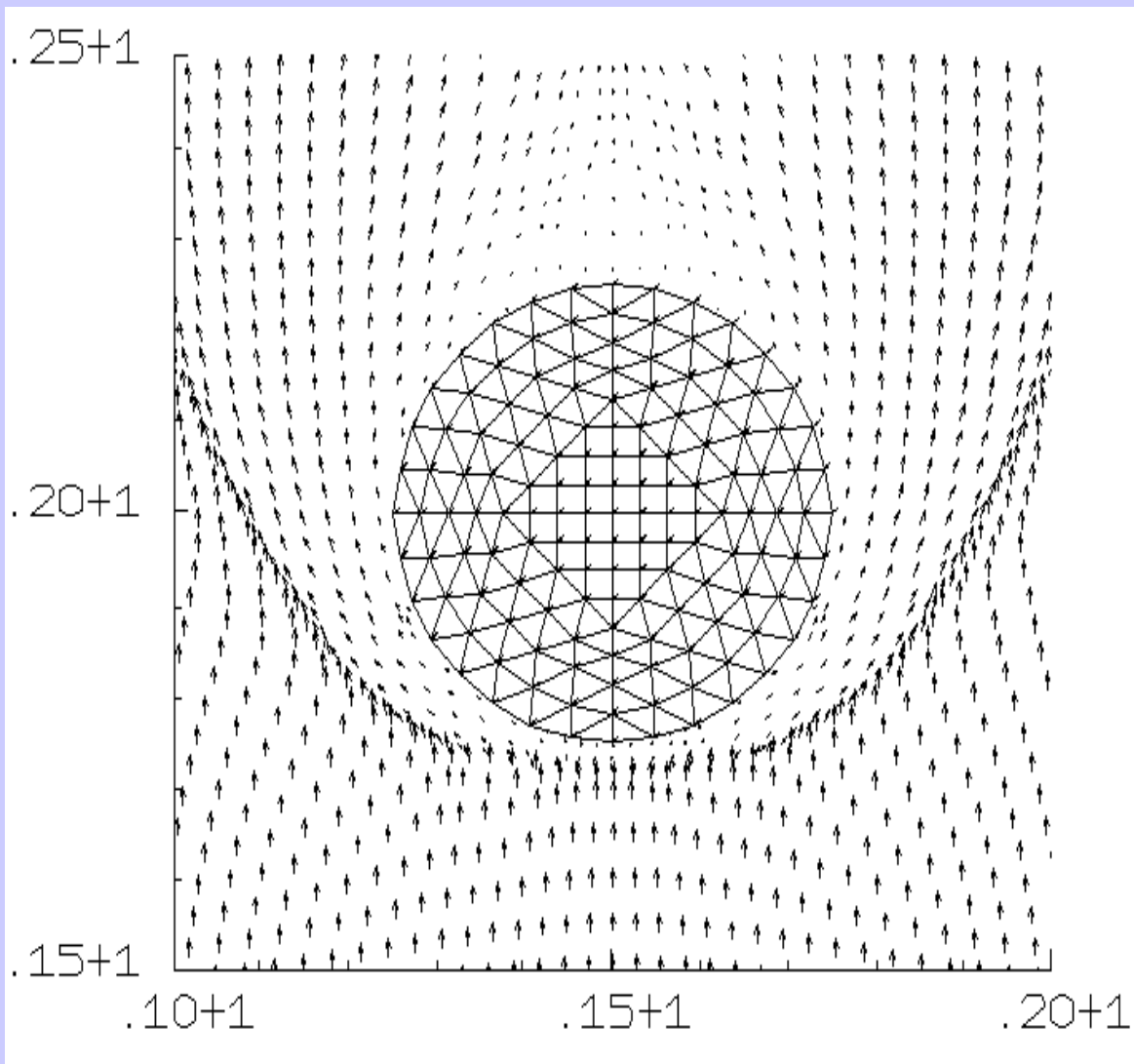
Фрагмент области решения около наложенной сетки поле скоростей ($t=0.1$)



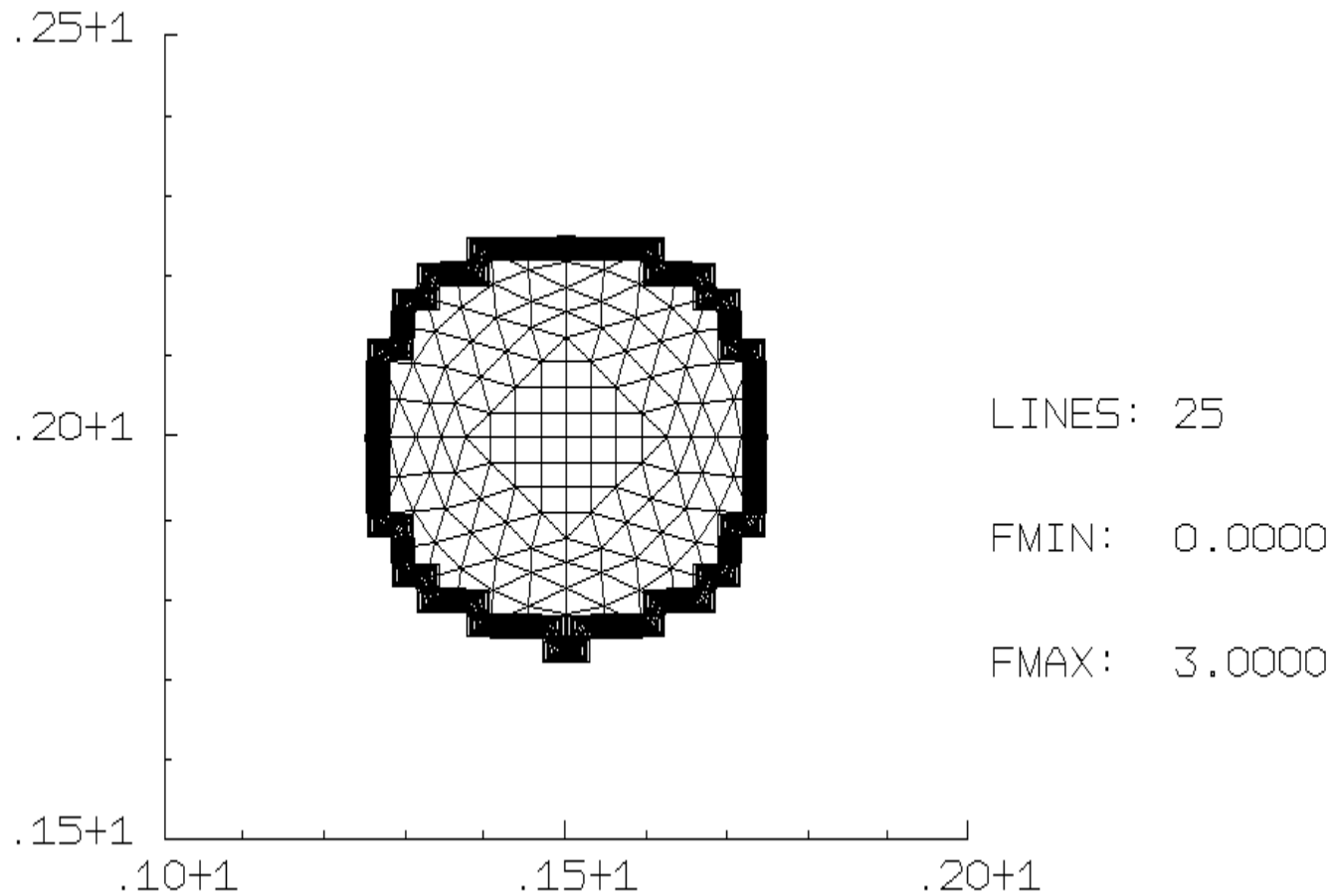
Фрагмент области решения около наложенной сетки поле скоростей ($t=0.2$)



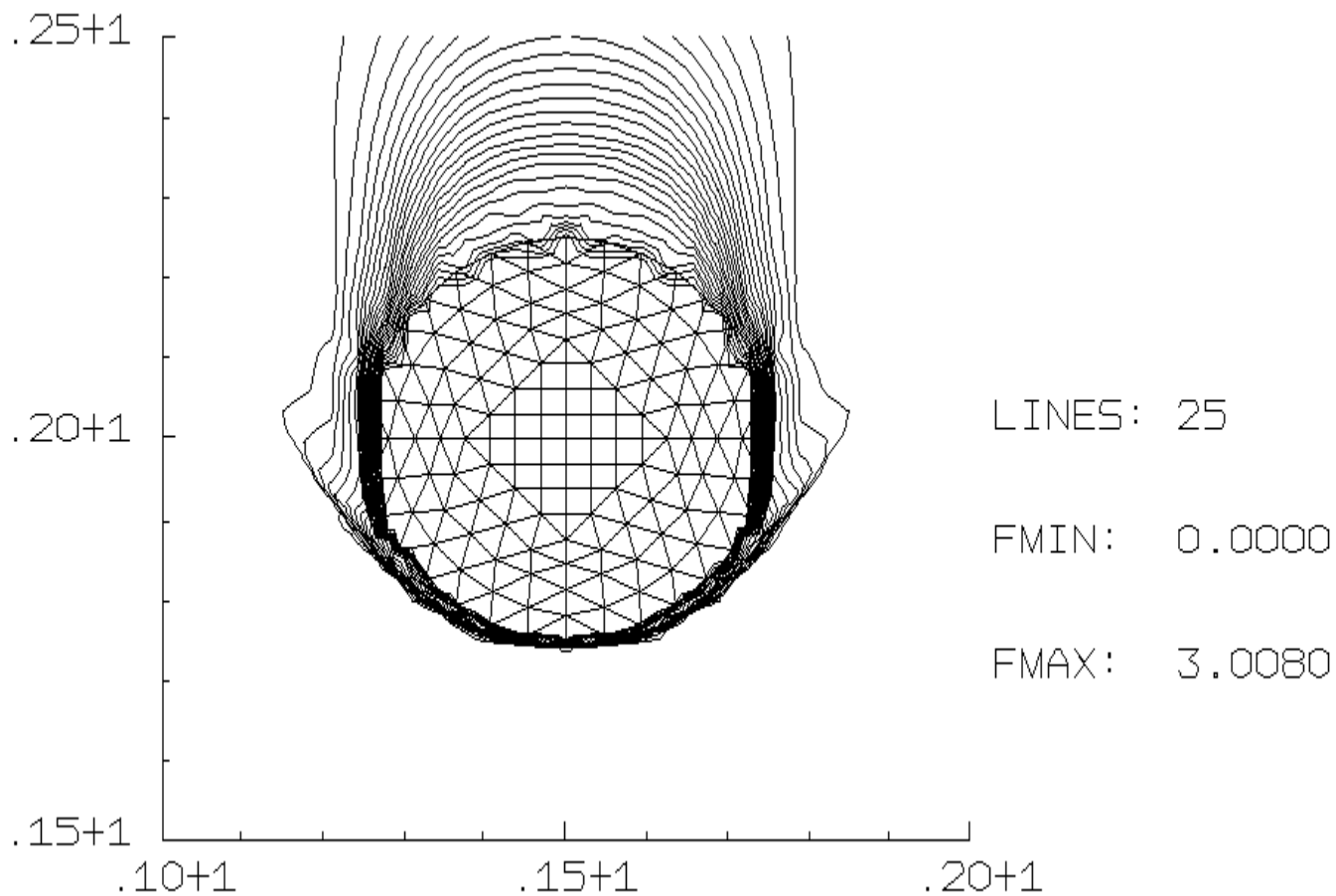
Фрагмент области решения около наложенной сетки поле скоростей ($t=0.3$)



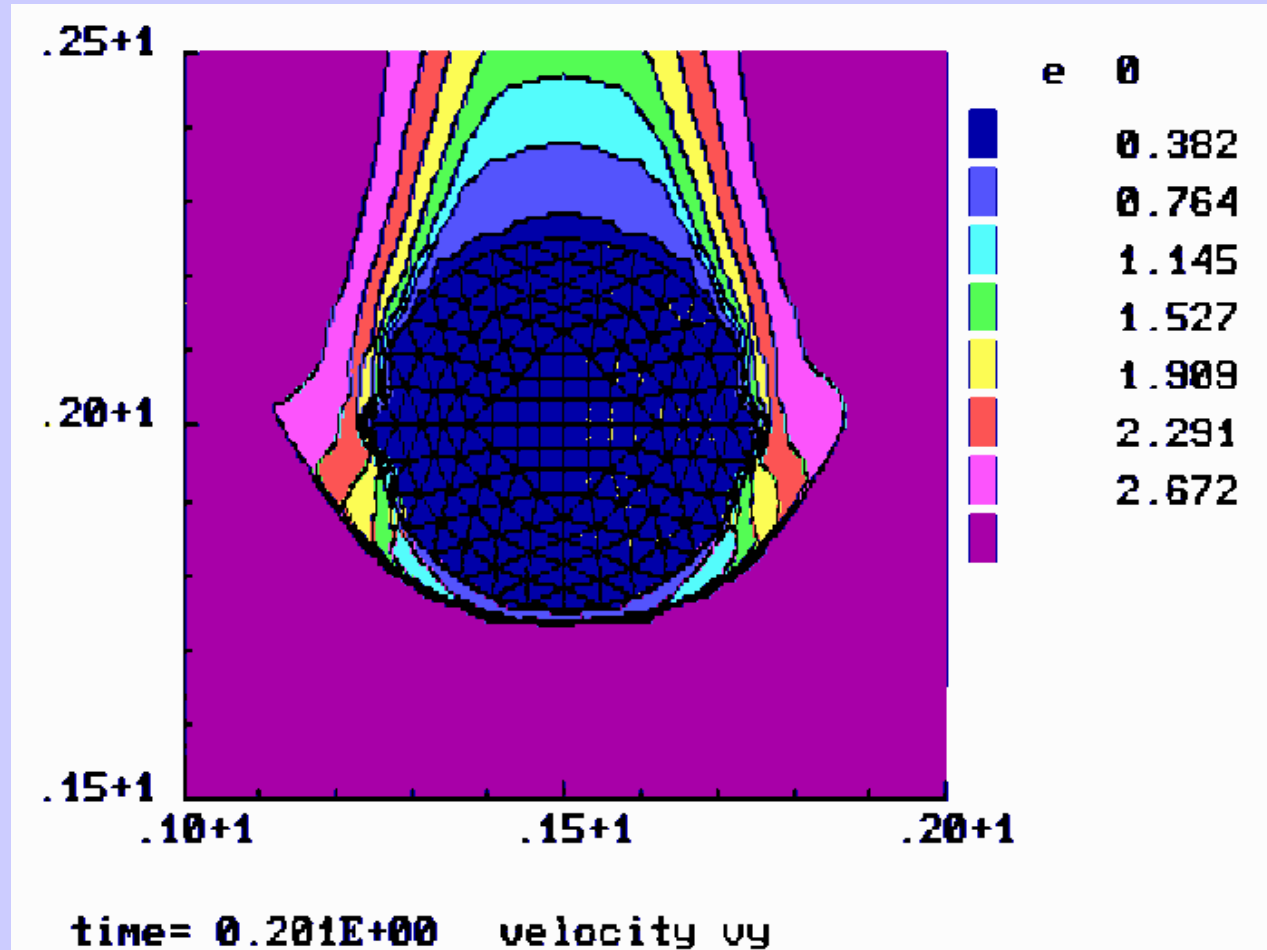
Фрагмент области решения около наложенной сетки изолинии вертикальной скорости



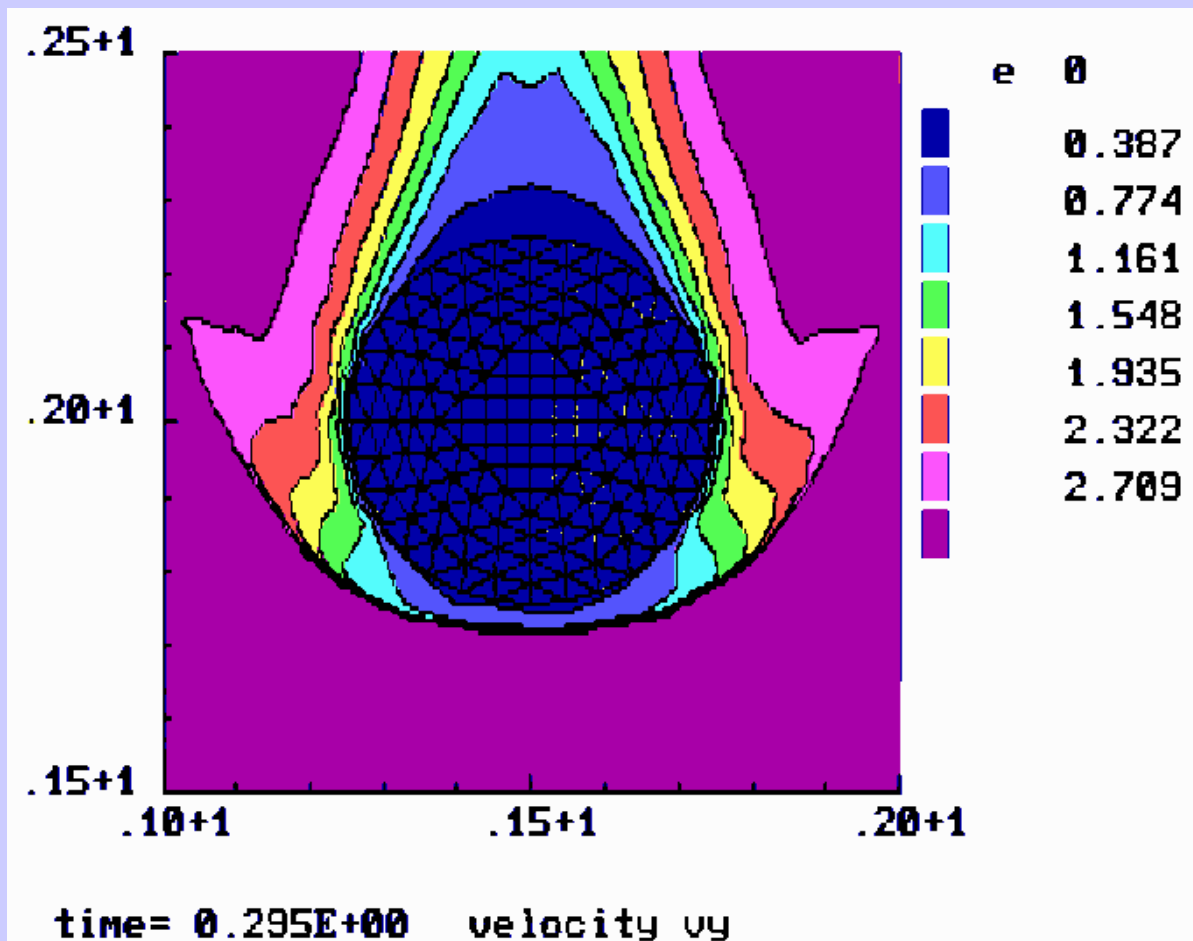
**Фрагмент области решения около наложенной сетки
изолинии вертикальной скорости (t=0.1)**



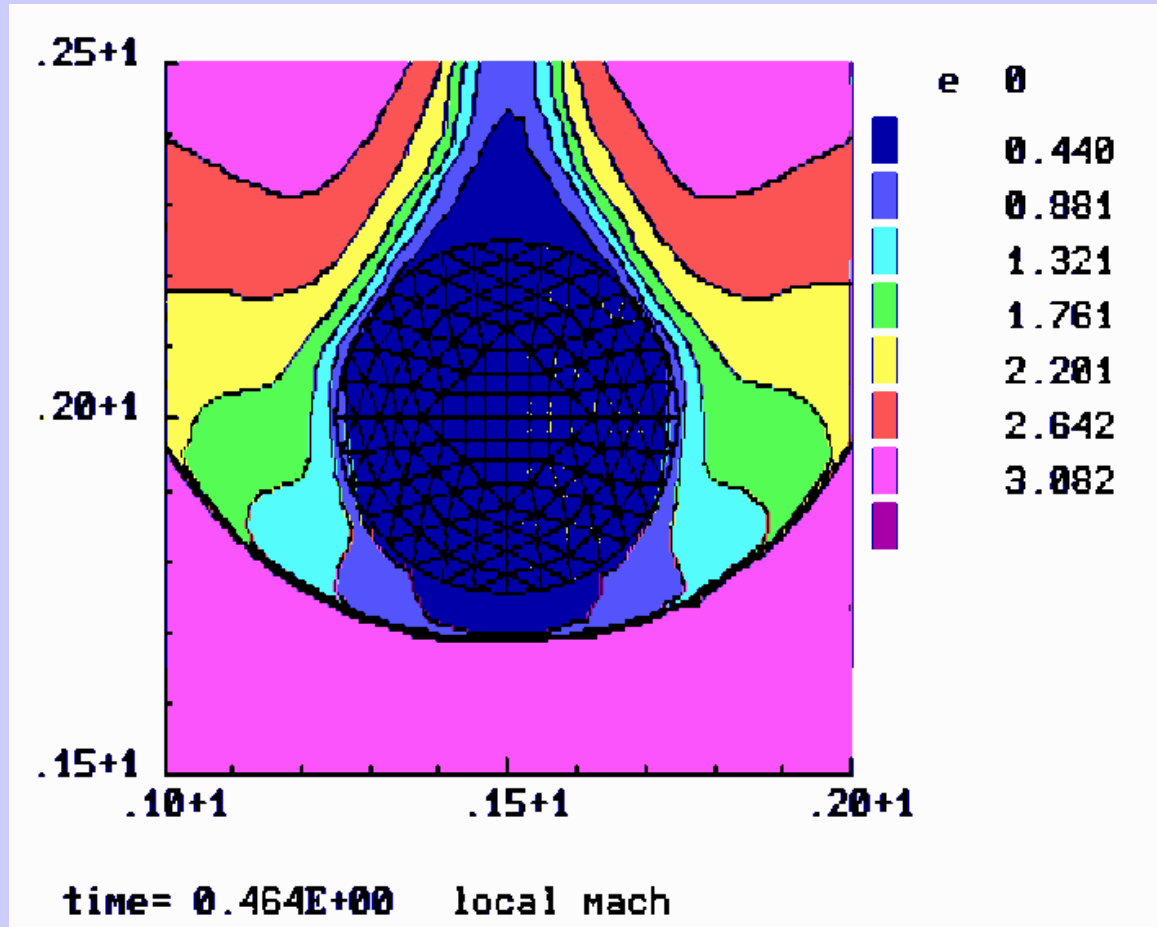
Фрагмент области решения около наложенной сетки
изолинии вертикальной скорости ($t=0.2$)



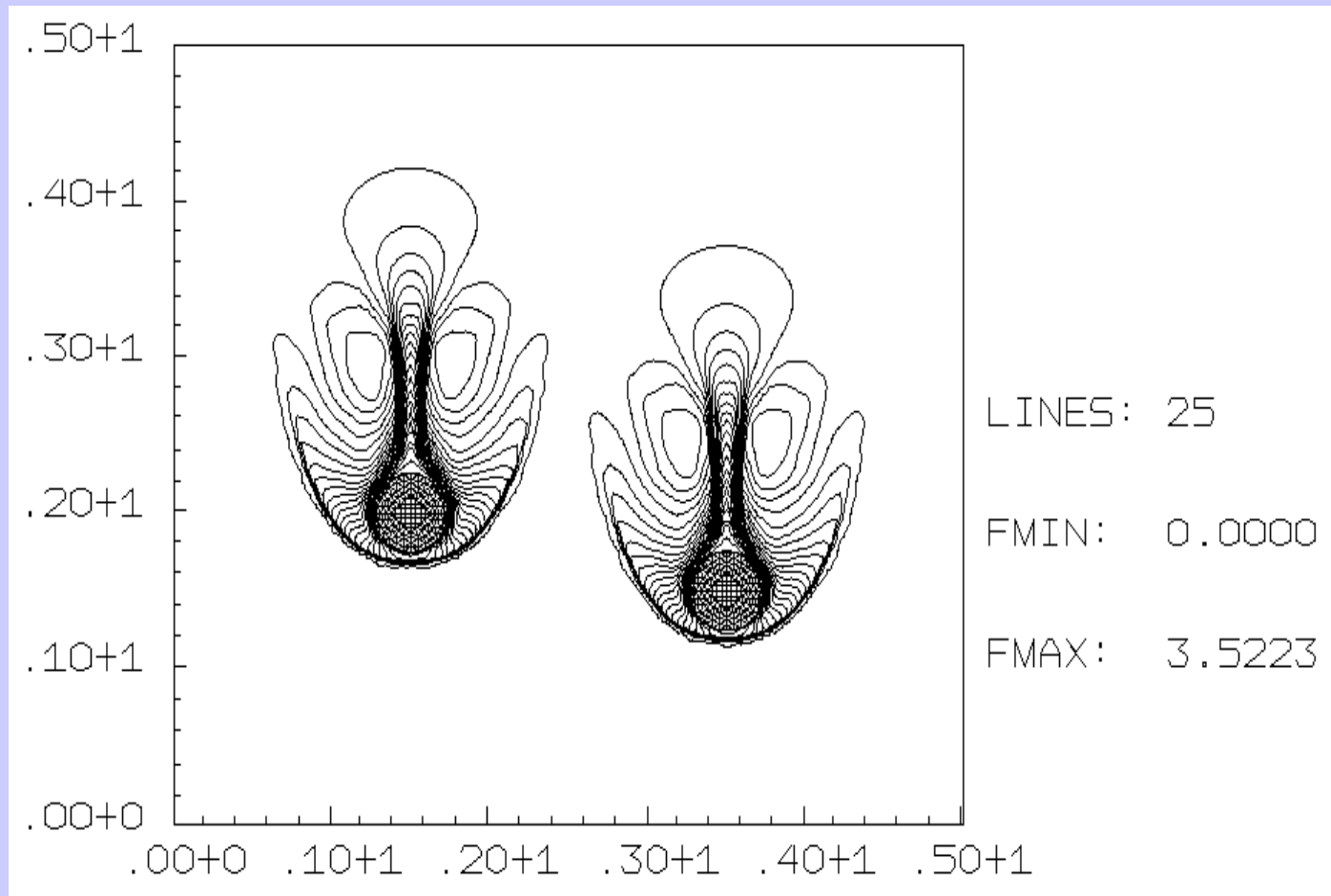
Фрагмент области решения около наложенной сетки
изолинии вертикальной скорости ($t=0.3$)



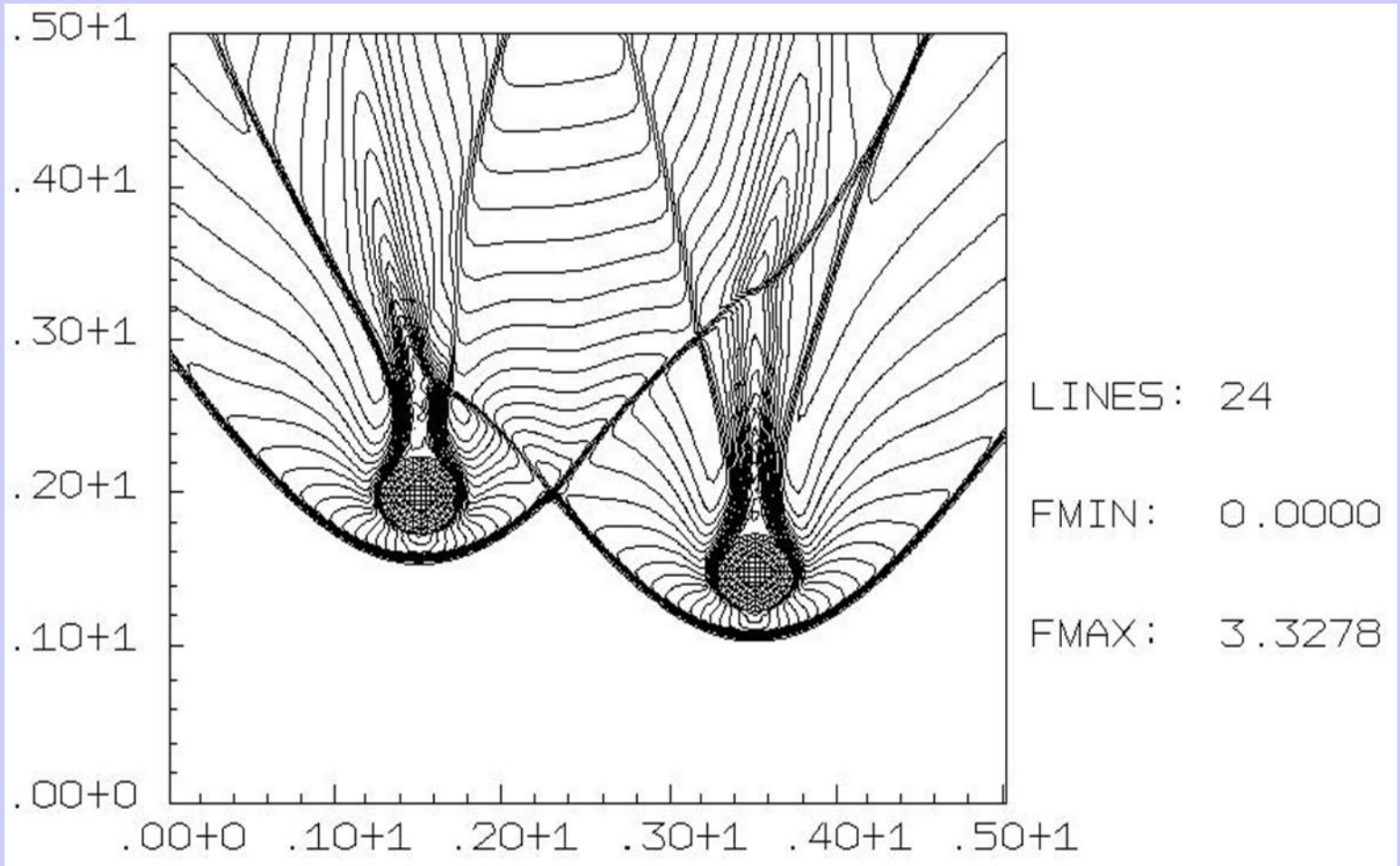
Фрагмент области решения
изолинии местного числа Маха ($t=0.45$)



**Полная область решения
изолинии местного числа Маха ($t=0.45$)**

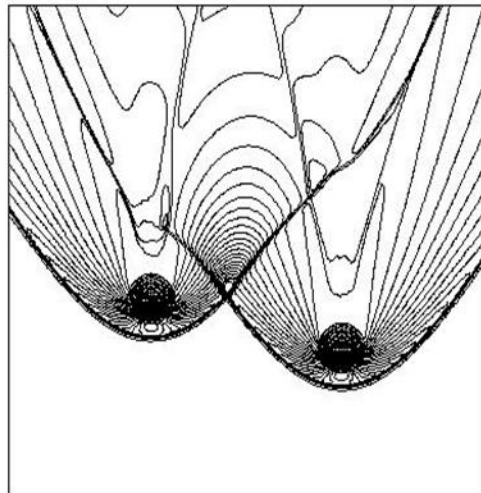


**Полная область решения
изолинии местного числа Маха ($t=7.00$)**

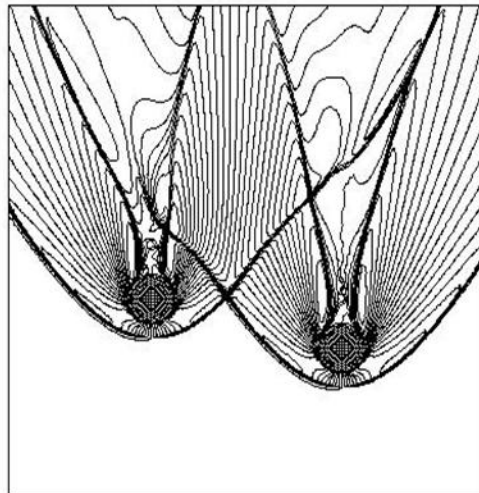


Полная область решения

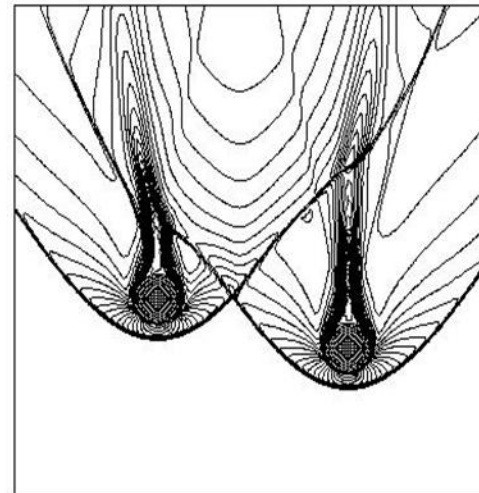
TIME= 0.322E+01



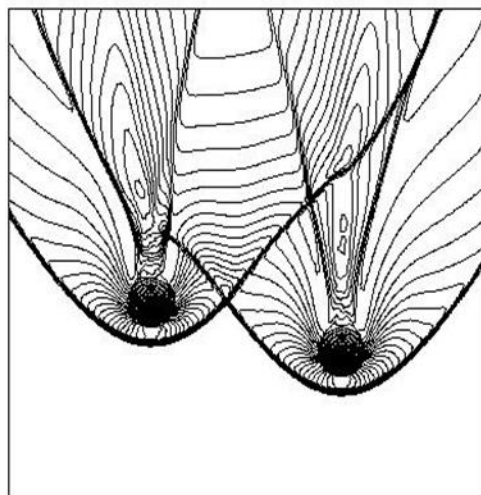
DENSITY



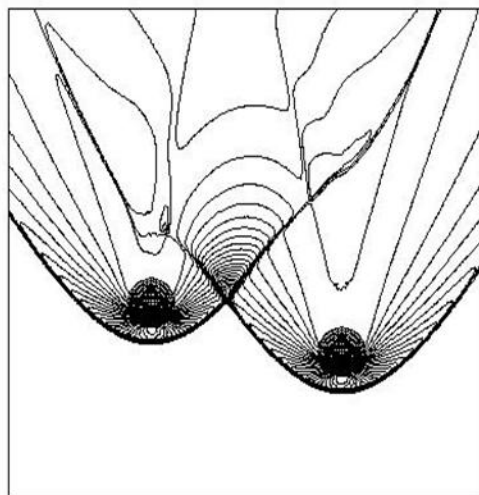
VELOCITY VX



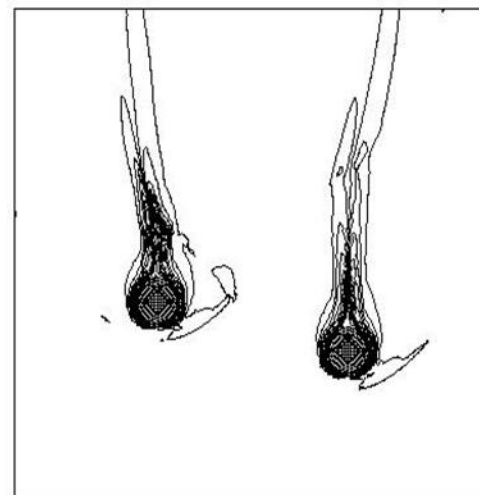
VELOCITY VY



INT. ENERGY

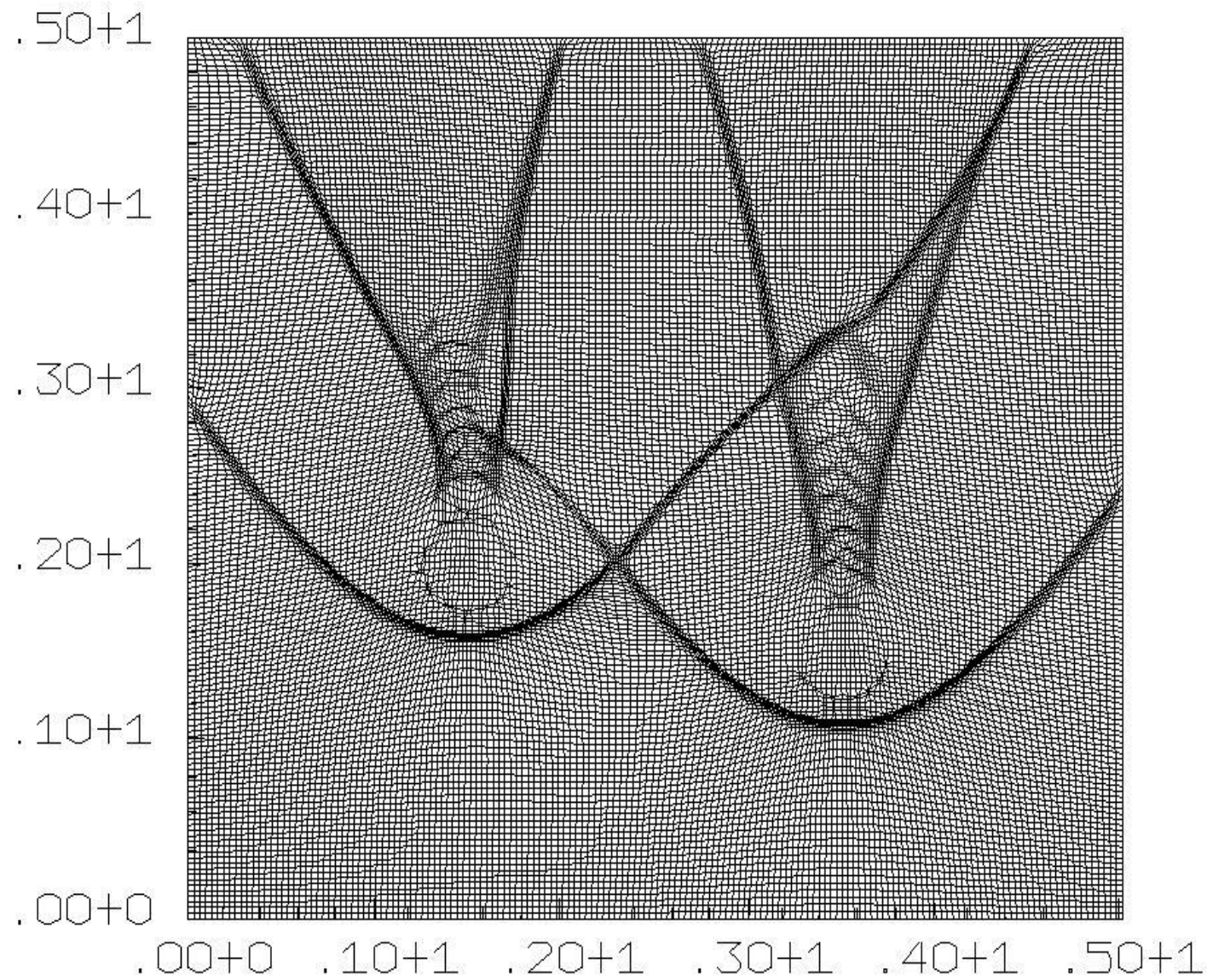


PRESSURE



VORTICITY

Полная область решения. Адаптивная сетка.



Выводы по применению упрощенного метода наложенных сеток.

Реализация: к любой газодинамической программе, решающей задачи в прямоугольнике или параллелепипеде, достаточно добавить блок задания наложенных областей и блок пошаговой коррекции решения в наложенных областях.

Достоинства. Упрощенный метод наложенных сеток позволяет легко описать сложную геометрию и учесть граничные условия.

Недостатки: Описание геометрии и задание граничных условий является очень приближенным.

Копия данной презентации доступна на сайте

<http://www.ipmnet.ru/~burago>

Конец