

*Санкт-Петербургский институт
информатики и автоматизации РАН*

Вычислительная модель популяции с переопределяемой скоростью роста в раннем онтогенезе

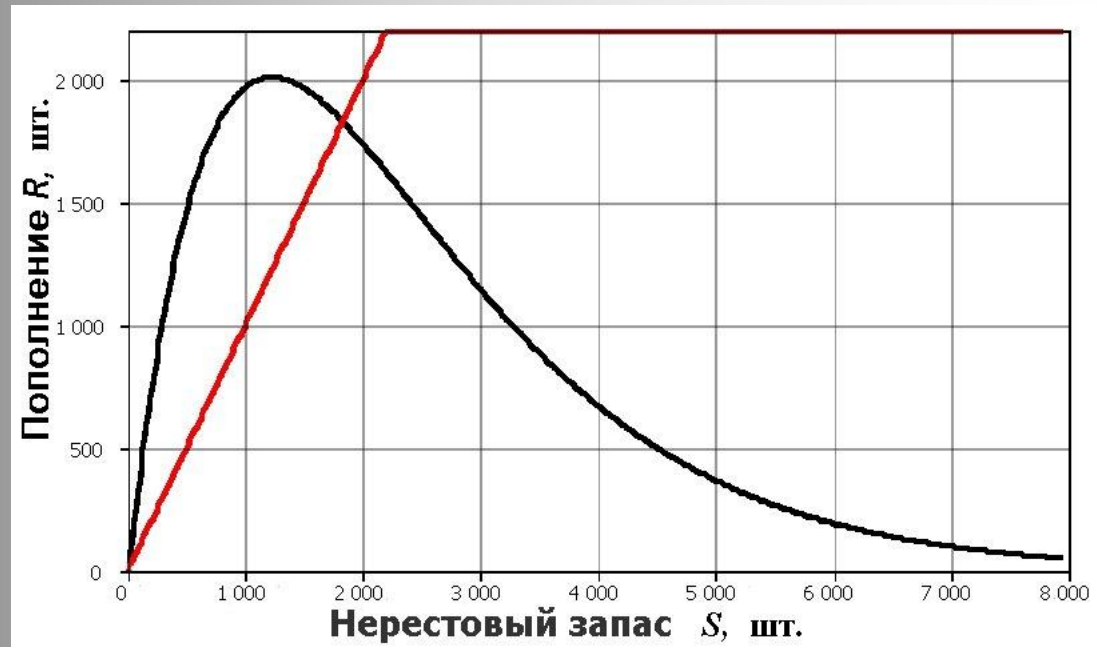
- Нелинейные эффекты в простых дискретных моделях теории пополнения

Биолог У. Рикер обосновал теорию

$$R = aS \exp(-bS)$$

В семействе

SU -отображений



Переход к хаосу через каскад субгармонических бифуркаций по сценарию М.Фейгенбаума.

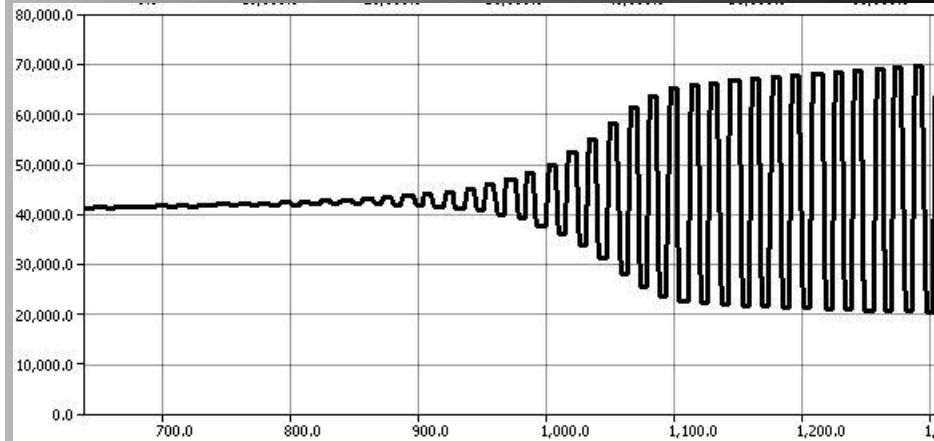
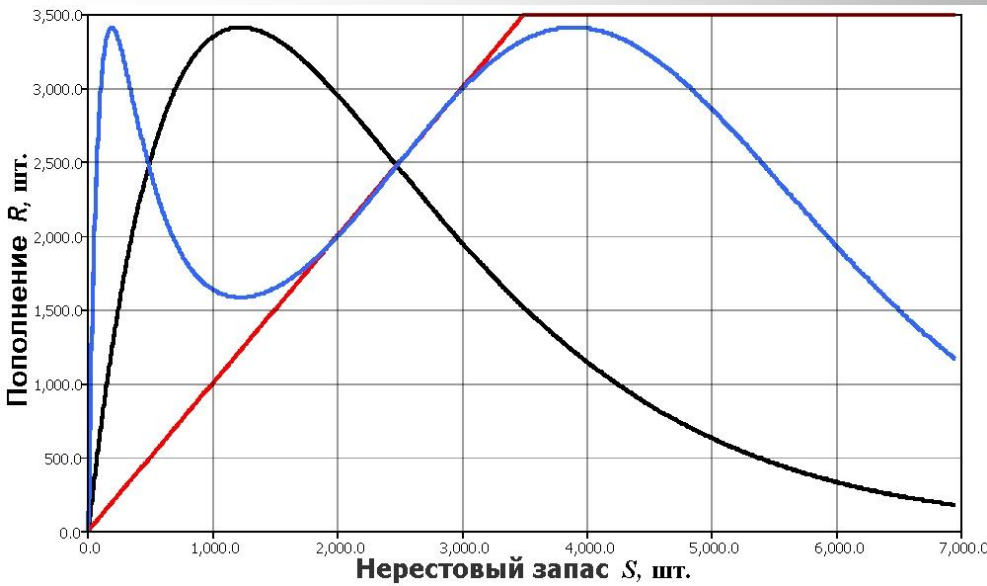
Реализуется в отображениях с отрицательным шварцианом

$$S_{\psi} = \frac{\psi'''(R)}{\psi'(R)} - \frac{3}{2} \left(\frac{\psi''(R)}{\psi'(R)} \right)^2.$$

- Бесконечный Каскад бифуркаций удвоения

Возможны три вида бифуркаций, и ряд нелинейных эффектов

Нарушение критерия устойчивости стационарной точки.



$$\delta_n = \frac{\Lambda_{n+1} - \Lambda_n}{\Lambda_{n+2} - \Lambda_{n+1}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 4,6692.$$

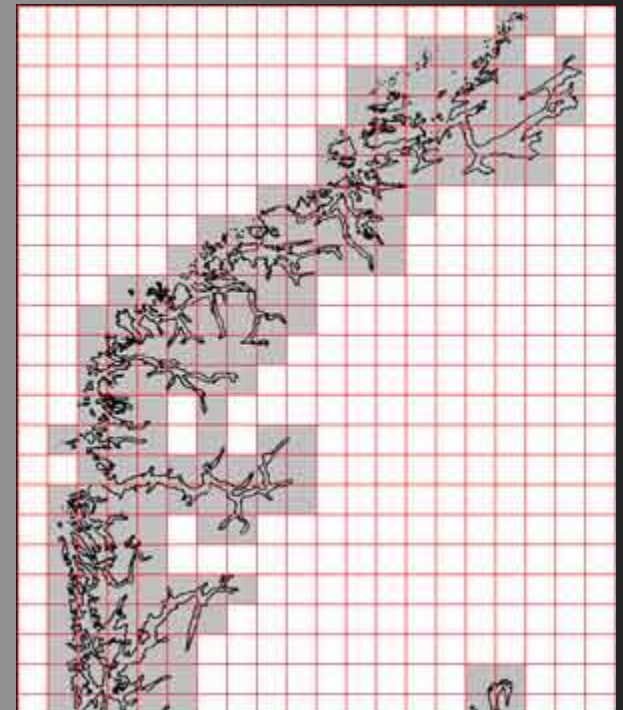
Период становится бесконечным

- Фрактальная топологическая размерность

box-counting dimension

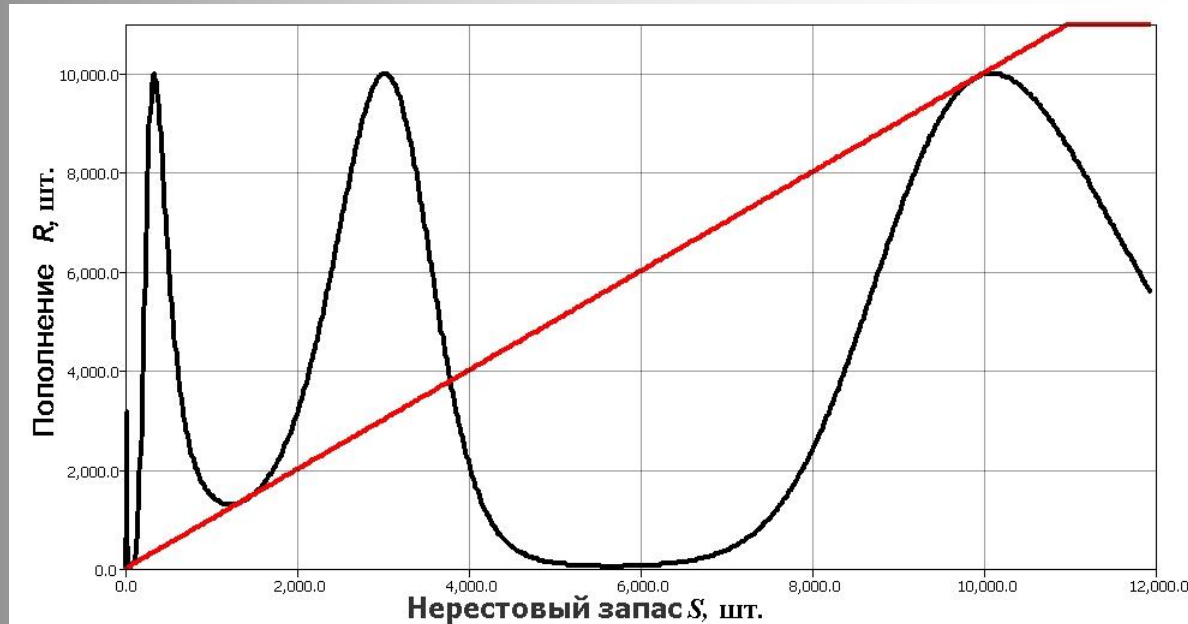
$$d = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln Z(\delta)}{\ln(1/\delta)} < 1,$$

Cantor-like set



- За пределами каскада Фейгенбаума.
Всё сложно.

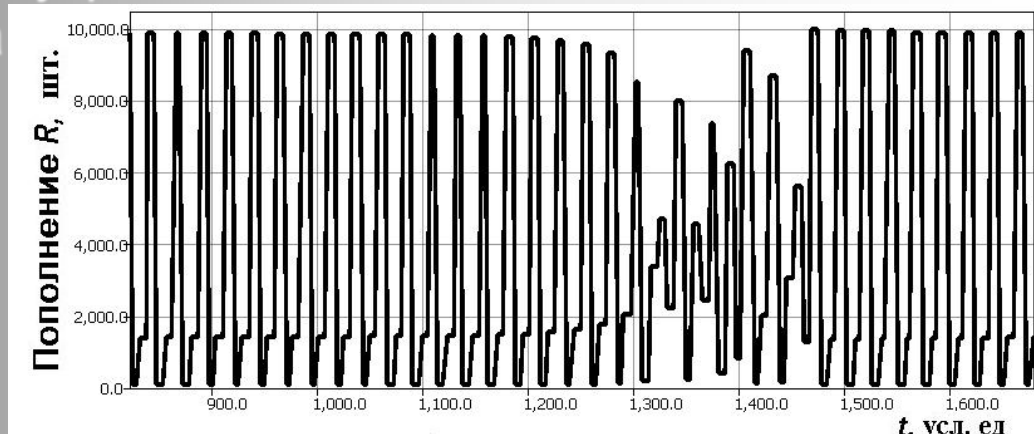
Касательная
 бифуркация. жесткая
 потеря устойчивости
 «Окно периодичности»
 Цикл 3 означает Хаос и
 теорема Шарковского



Переменяемость, Субдукция, Внутренний
 кризис хаотического аттрактора

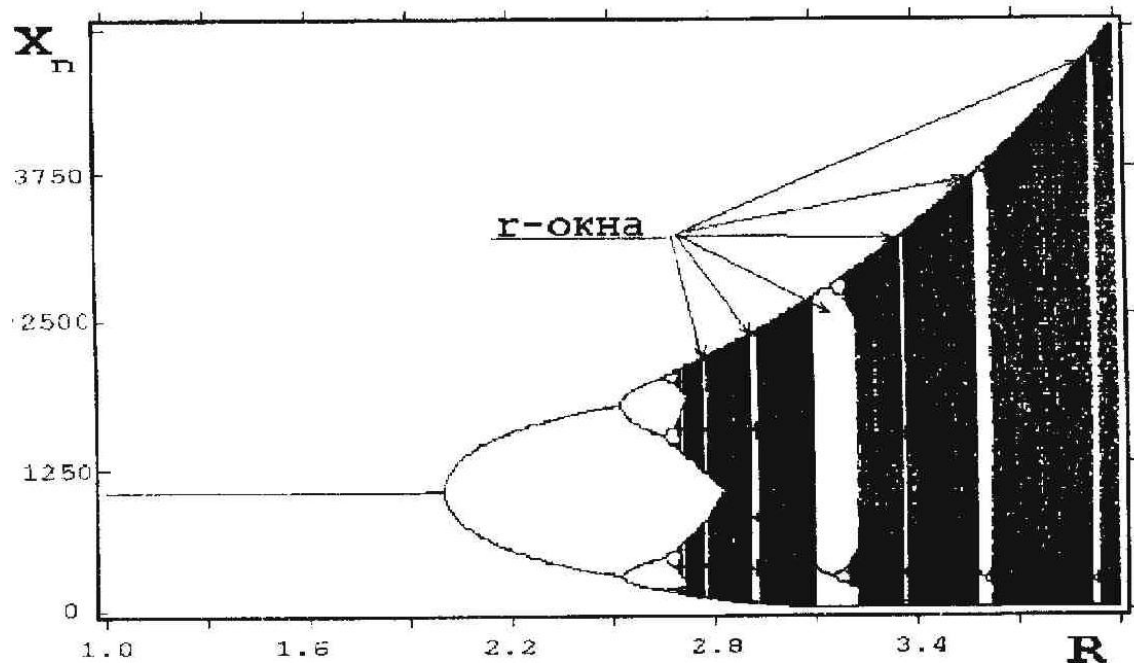
$$R_{n+1} = \Psi_3(R)$$

Возникновение
 сложных границ
 областей притяжения

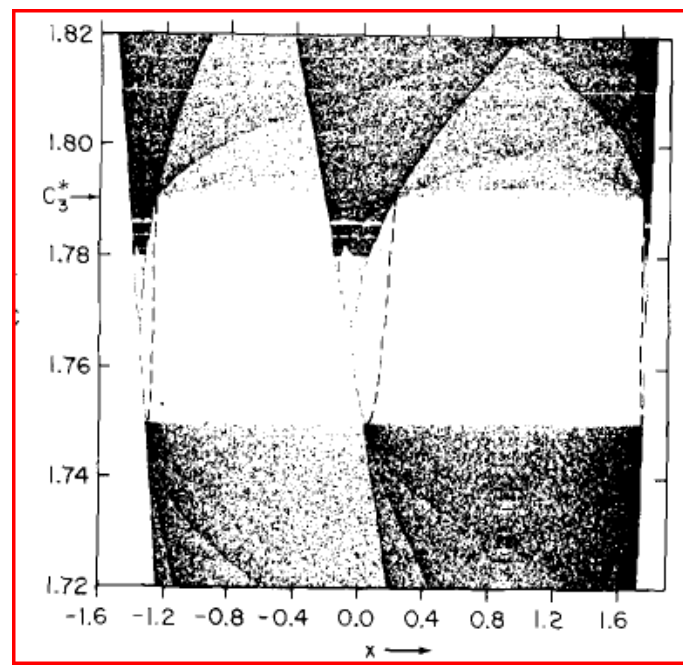


Проблема интерпретации результатов моделирования

Нелинейная динамика отображений с отрицательным шварцианом. Противоречивая сущностная оценка роли управляющего параметра



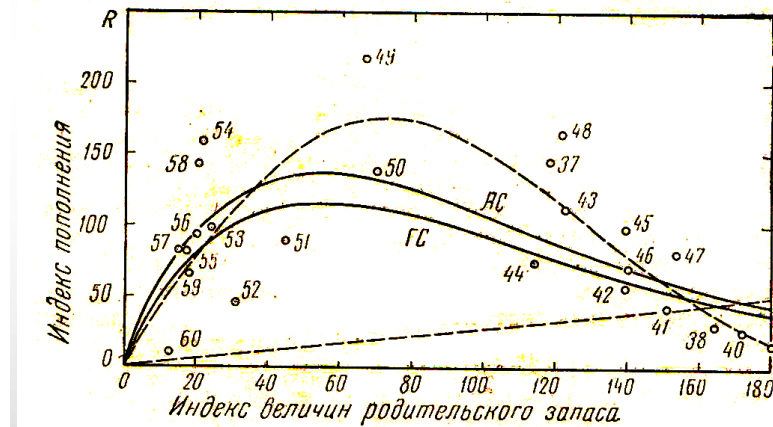
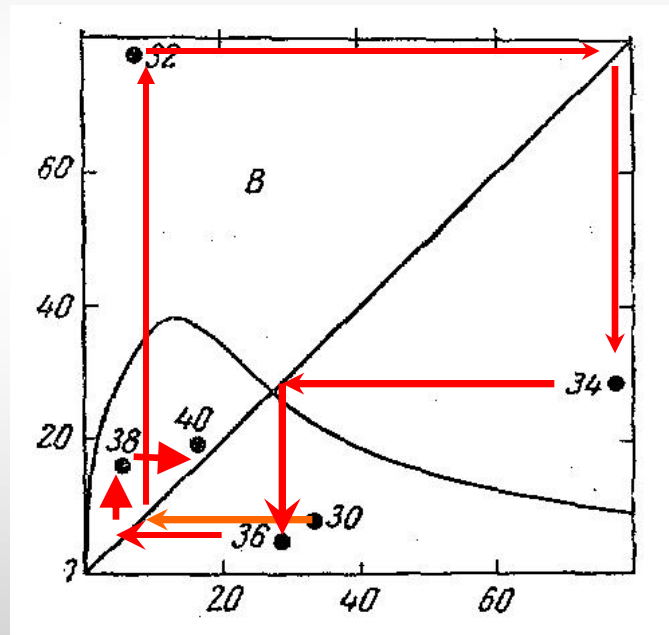
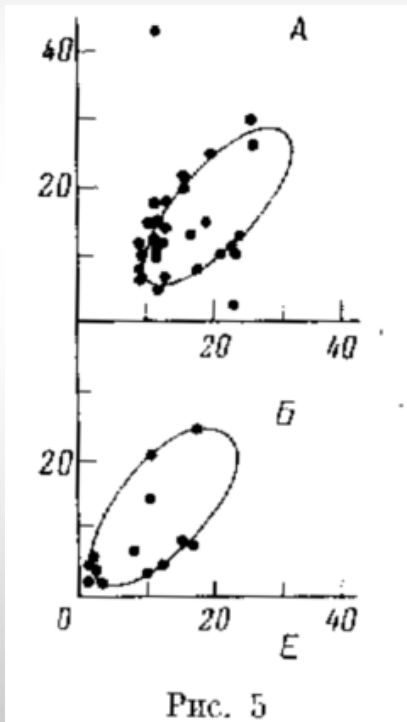
Сложные нелинейные эффекты связаны с «окнами периодичности»



$$\delta_n = \frac{\Lambda_{n+1} - \Lambda_n}{\Lambda_{n+2} - \Lambda_{n+1}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 4,6692.$$

Проблема использования модели и данных

- Построенные кривые не могут соответствовать динамике популяций.



Новая модель запас-пополнение

С учетом изученных данных Разработана модель убыли первоначальной численности поколения на интервале уязвимости $t \in [0, T]$ в виде системы дифференциальных уравнений.

Предлагаемая модель базируется на факте, что увеличение численности замедляет темп развития особей.

Модель учитывает качественный эффект Олли и влияние уровня размерного развития, определяющего изменение пищевых потребностей на смертность.

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = -(\alpha w(t)N(t) + \theta(S)\beta)N(t) \\ \frac{dw}{dt} = \frac{gN^n(t)}{N^k(t) + \zeta}, \\ \theta(S) = \frac{1}{1 - \exp(-cS)} \\ R = N|_{t=T}, N|_{t=0} = \lambda S, w|_{t=0} = w_0. \end{cases}$$

$\theta(S) \rightarrow 1$ при $S \rightarrow \infty$ отражает снижение воспроизводства при деградации популяции, уменьшения вероятности встречи особей при нересте. $k > n$.

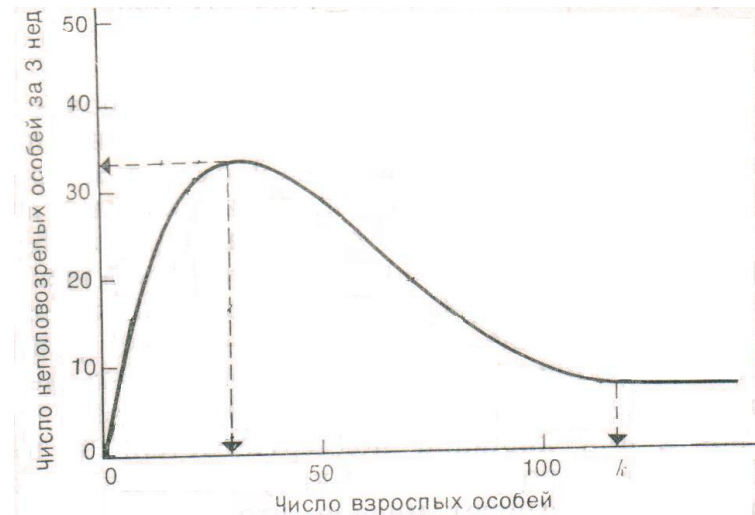
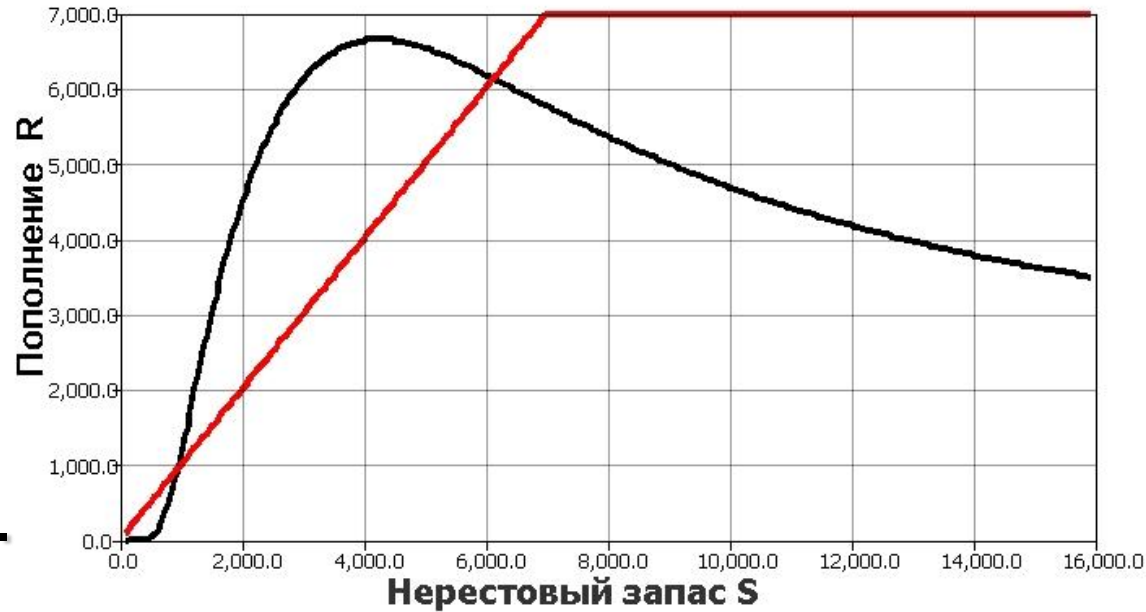
Динамическая система имеет 2 области притяжения, ограниченные репеллером: возможность вымирания / равновесия.

Свойства модели

Частично преодолены
недостатки
существующих
моделей пополнения

Унимодальная кривая:
с уменьшающимся
наклоном. Ненулевая
горизонтальная асимптота.
2 нетривиальных
пересечения с
биссектрисой.
Незнакопостоянный
шварциан.
Лабораторные
эксперименты Р.Риклевса
подтверждают
адекватность гипотезы.

Кривая запас-пополнение модели автора



Моделирование стадийности

- Анализ данных о воспроизводстве двух видов осетровых Каспия и исследование динамики деградации поставило задачу моделирования сложной зависимости с учетом влияния отрицательного эффекта группы [Олли.]
- Разработан метод дифференцированного описания изменений численности изменяющимися уравнениями для разных стадий развития молоди с использованием непрерывно-дискретного представления времени:

$$\tau = \left\{ \left\{ \text{Gap}_{pre_1}, [0, T_1], \text{Gap}_{post_1} \right\}_1, \dots, \left\{ \text{Gap}_{pre_n}, [T_{n-1}, T_n], \text{Gap}_{post_n} \right\}_n \right\}.$$

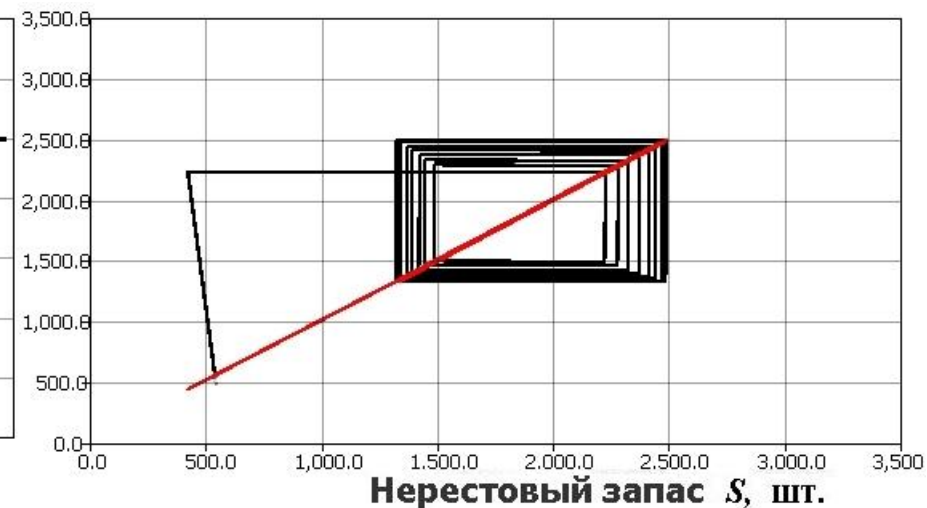
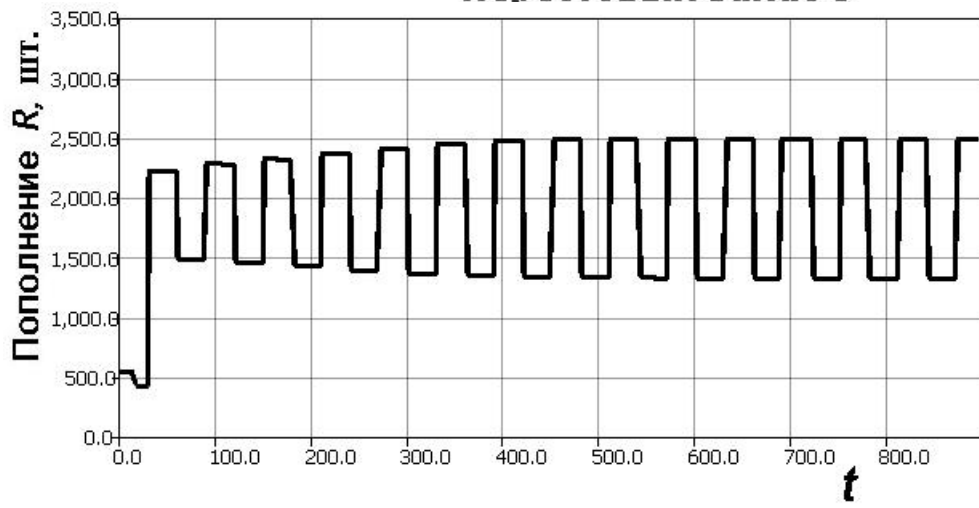
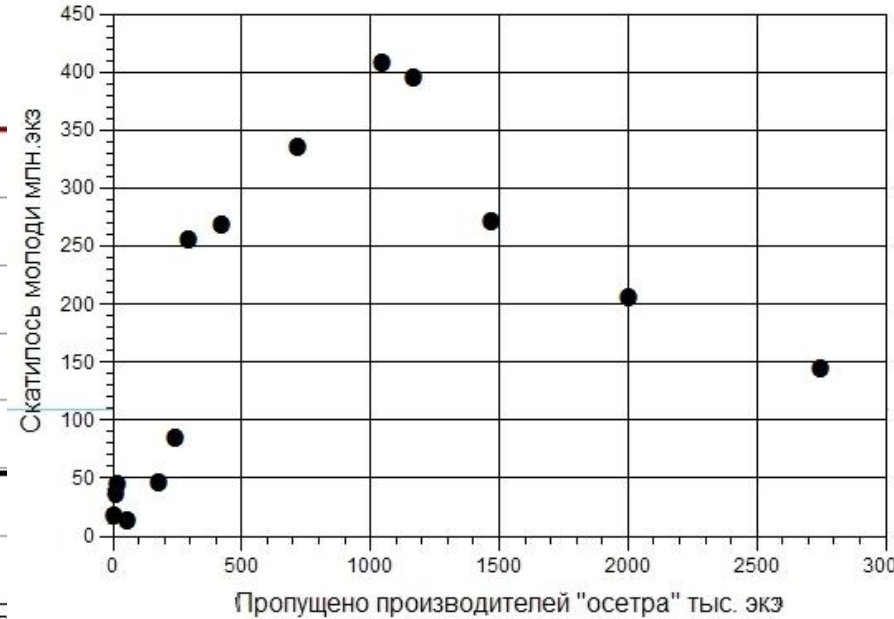
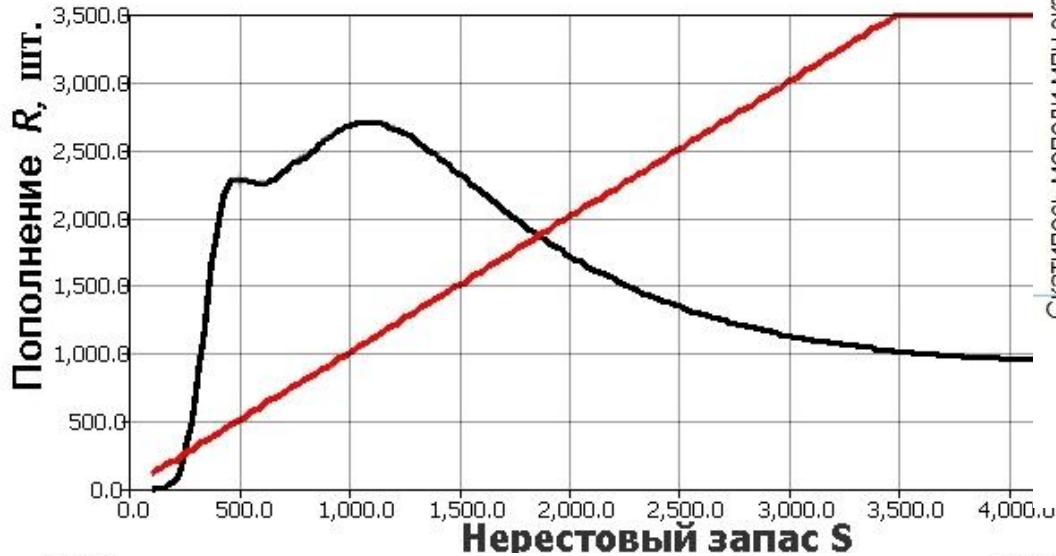
- Модель основывается на теории этапности развития: действию скачкообразных изменения - переход на активное питание и потерю тактильного контакта с грунтом.

$$\frac{dN}{dt} = \begin{cases} -(\alpha w(t)N(t) + \theta(S)\beta)N(t), & 0 < t \leq \tau \\ -(\alpha_1 N(\tau) / w(\tau) + \beta)N(t), & t > \tau, \quad w(t) < w_{k1} \\ -(\alpha_2 w(t)N(t))N(t), & w_{k1} < w(t) < w_{k2} \end{cases}$$

Уравнение для текущей численности поколения $N(t)$ заменяется уравнением с дважды изменяющейся правой частью

Циклический режим $\psi^n(R^*) = \psi^{n+2}(R^*)$.

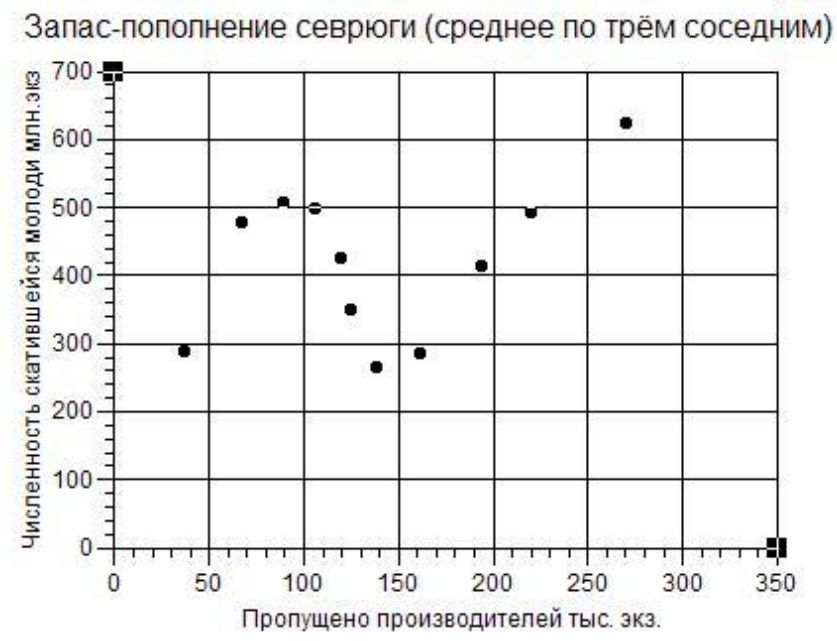
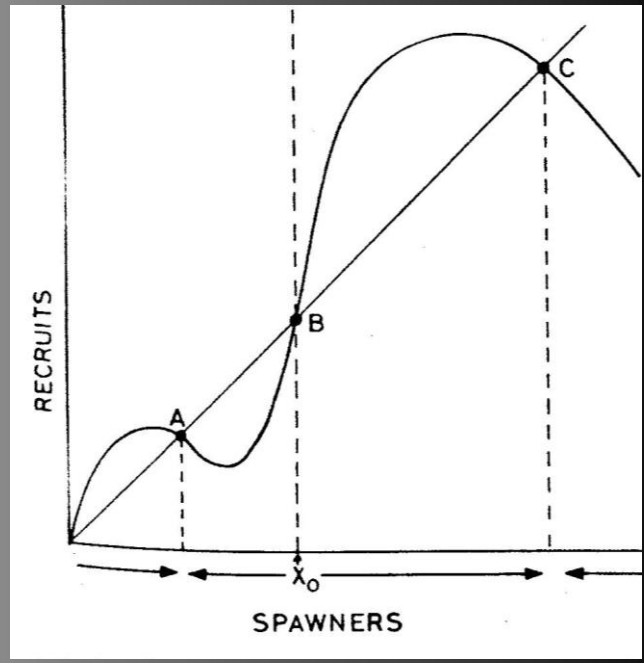
Модель исследована при реализации гибридного автомата в среде *AnyLogic*.



Гибридная модель с изменяемым размерным развитием

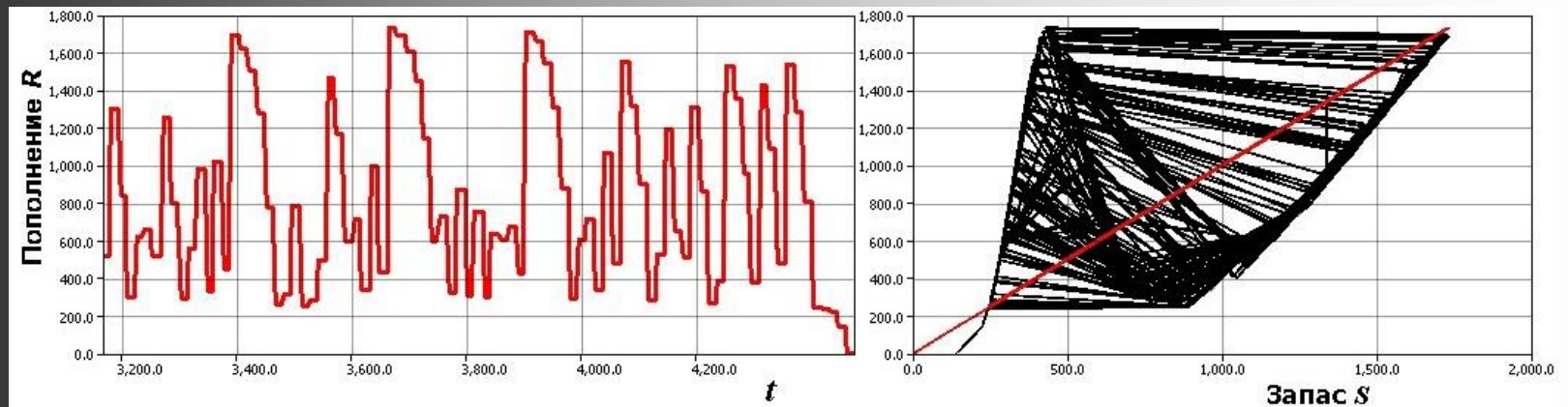
Для популяции севрюги выявлена неунимодальность кривой зависимости

$$\frac{dw(t)}{dt} = \begin{cases} \rho, & t < \tau \\ \zeta \frac{g}{\sqrt{N}} w(t), & t > \tau, w(t) < w_1 \\ \eta \sqrt{w(t)^2} - \vartheta w(t), & w(t) > w_1, t < T \end{cases}$$

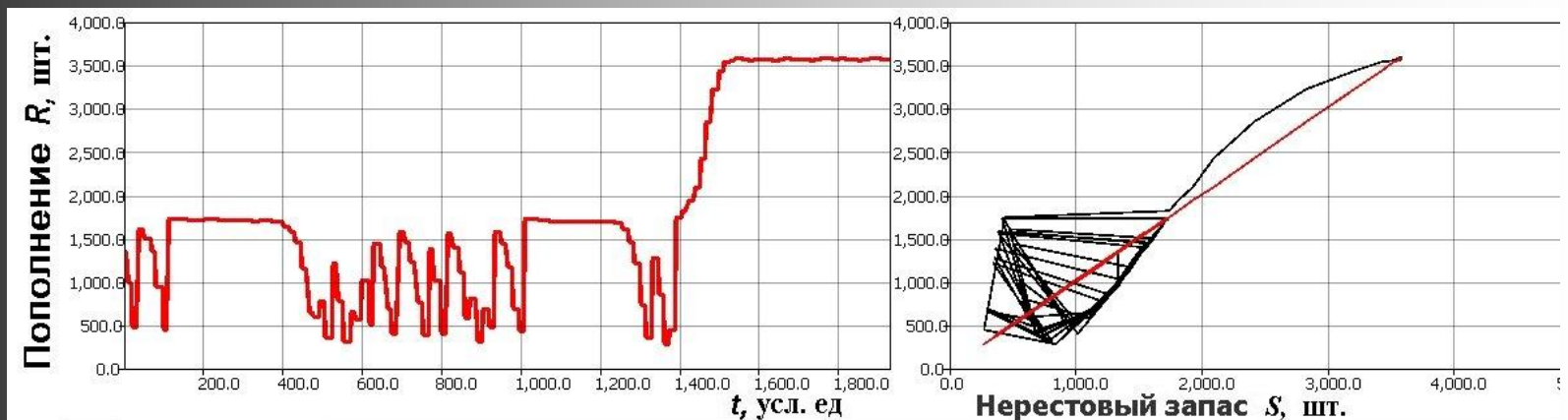


- **Непритягивающее хаотическое множество**

Локально-несвязная граница областей притяжения. Не образует непрерывных подпространств фазовом пространстве

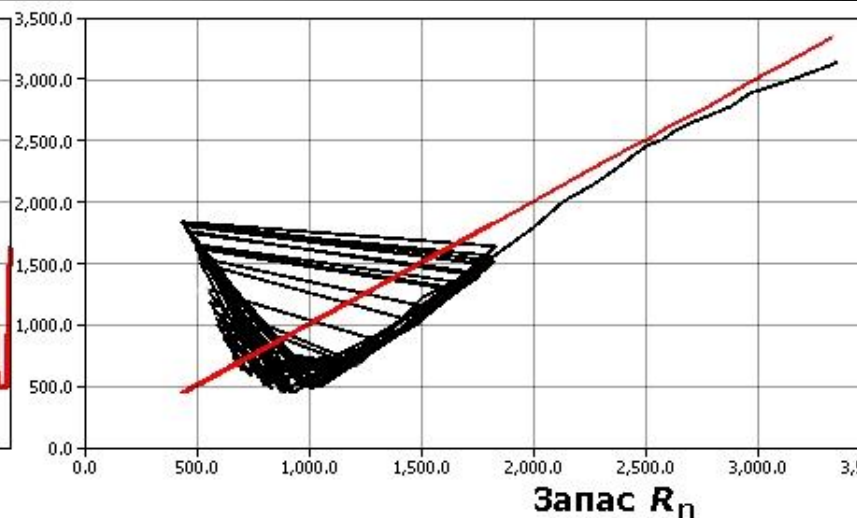
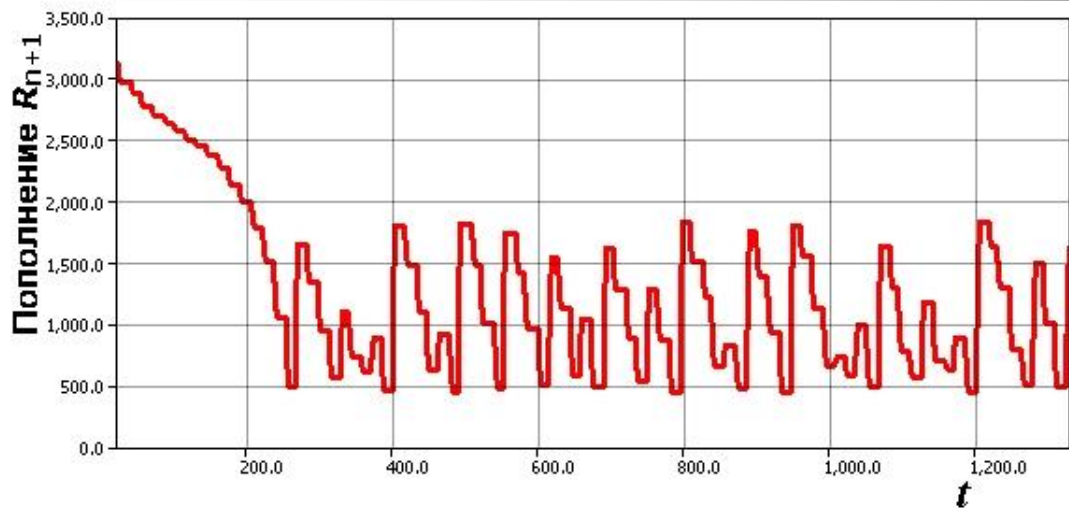
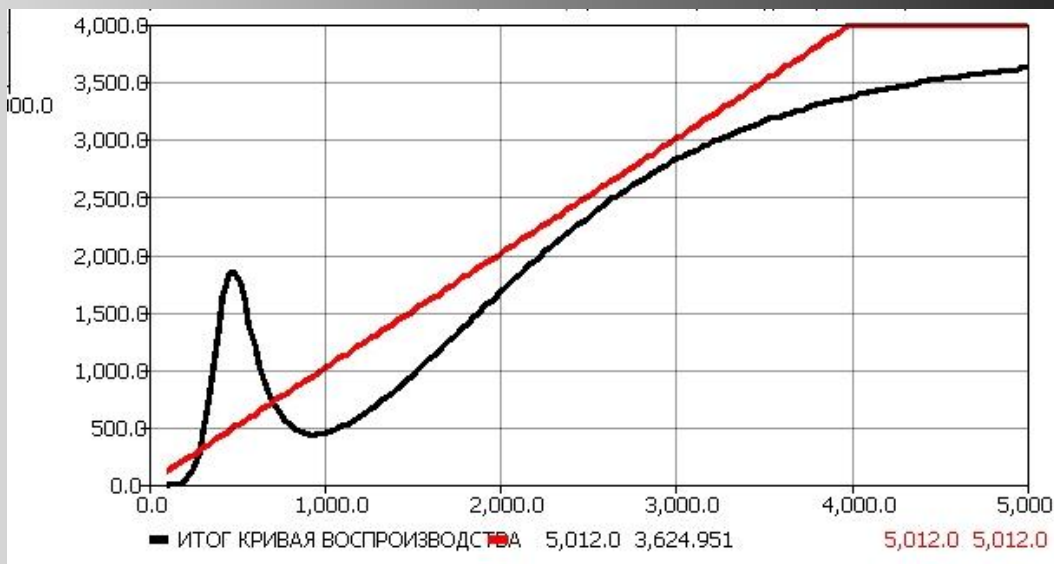


Неопределённость асимптотической динамики



- Возникновение интервального аттрактора

После обратной касательной бифуркации.
III тип аттрактора по Гукенхеймеру

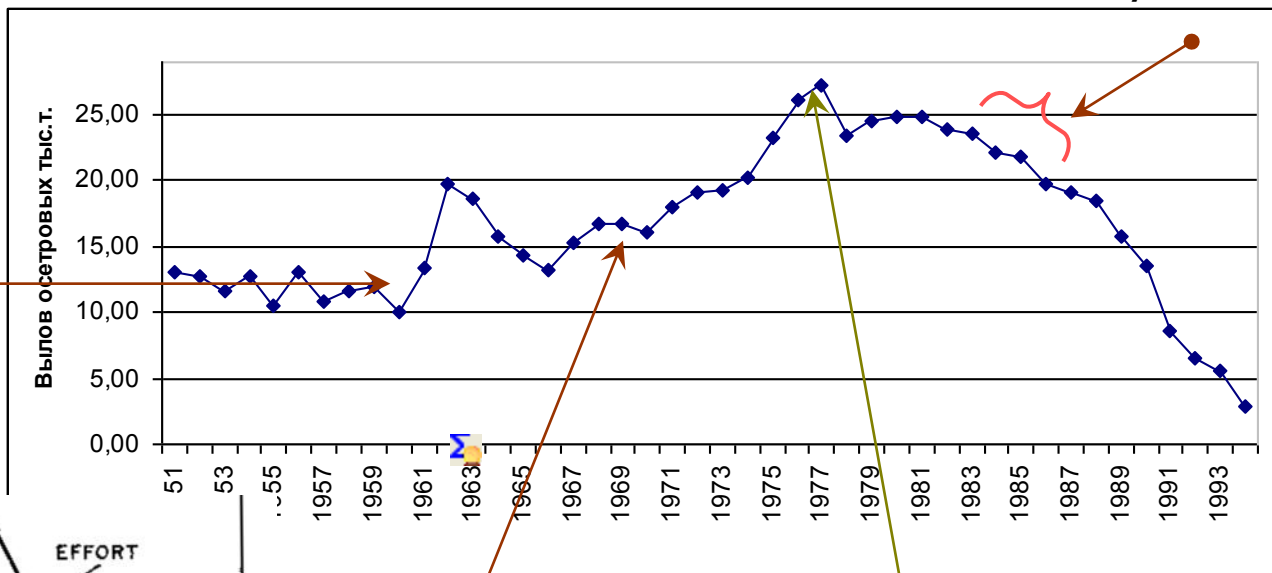


Динамика уловов осетровых

Обоснованный промысел в соответствии с экспертными оценками. КВП=3%

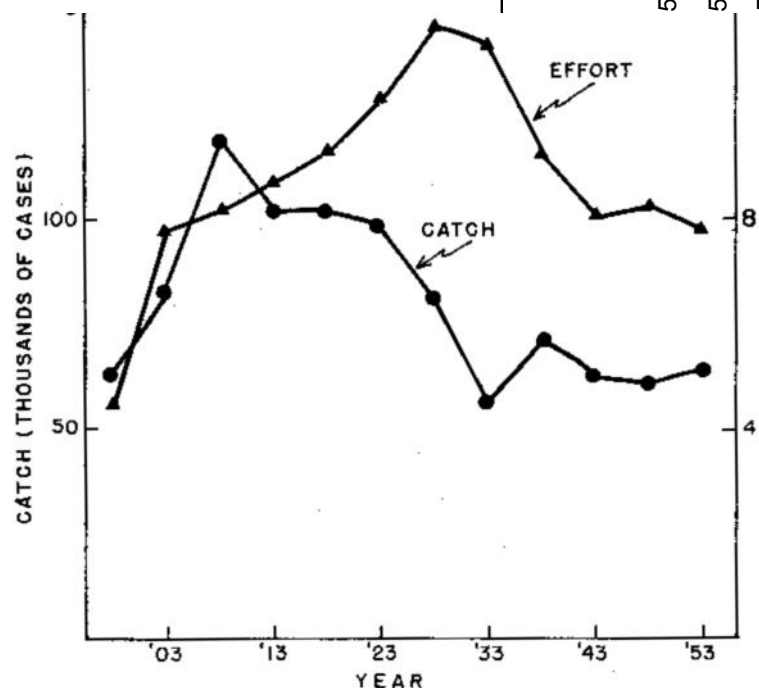
Максимальный
Выпуск молодежи

Волгоградская
ГЭС



Перенос
промысла на
Нерестовую
популяцию

Рекордный перелов (27,3
тыс.т) 1977 г.
Решение о
неиспользовании
запасов осетровых



Анализ последствий эксплуатации

Для эксплуатируемой популяции:

$$N_{i+1}|_{t=0} = \lambda(1-q)N_i|_{t=\tau}, \quad 0 \leq q \leq 1.$$

Стабилизация в *равновесии*

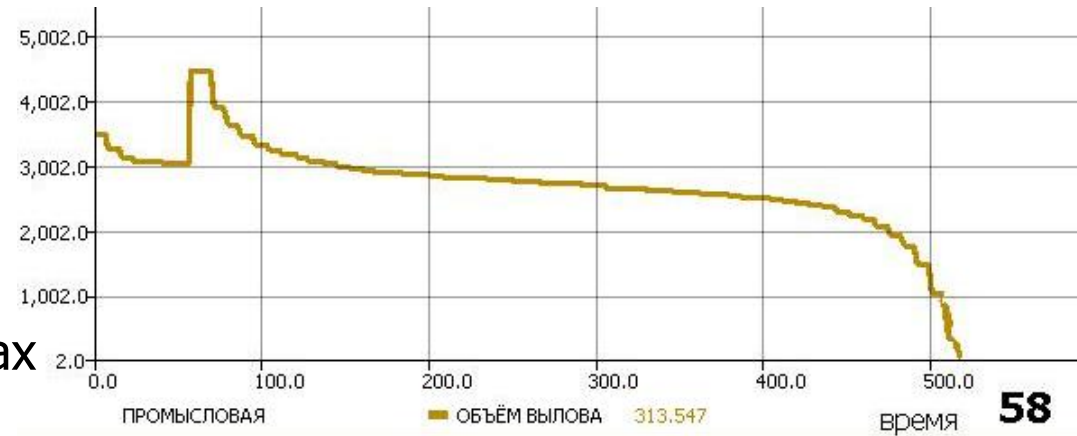
$$R^{**} = \psi((1-q)R^{**})$$

или вымирание популяции:

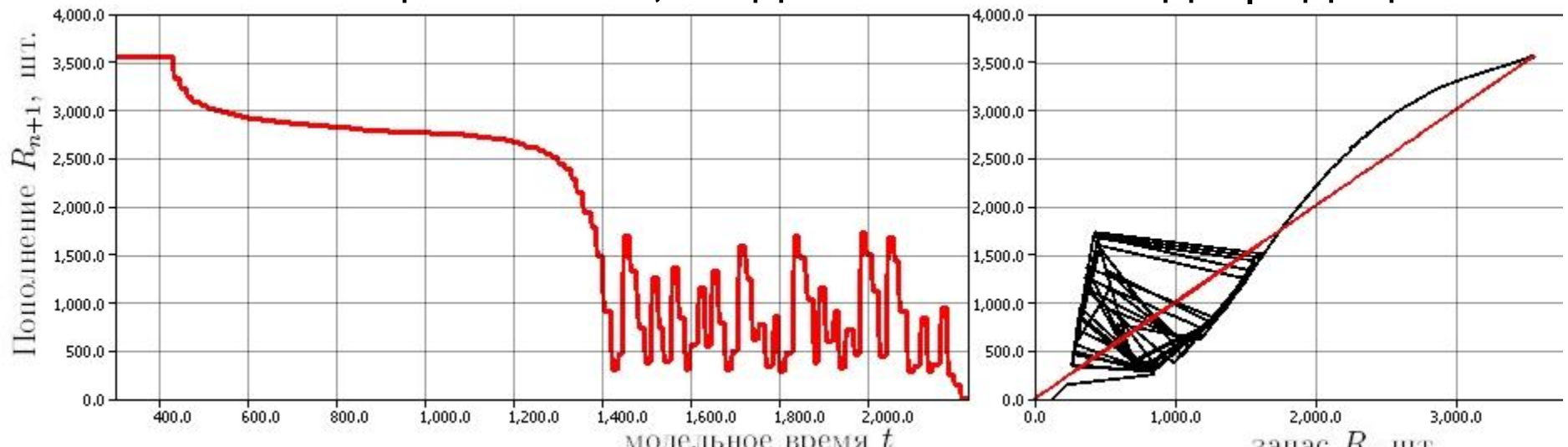
MSY достигается $(R_{n+1} - R_n) \rightarrow \max$

$$\text{вылов } Y = \psi(R_{\text{опт}}) - R_{\text{опт}}$$

Модельная динамика уловов

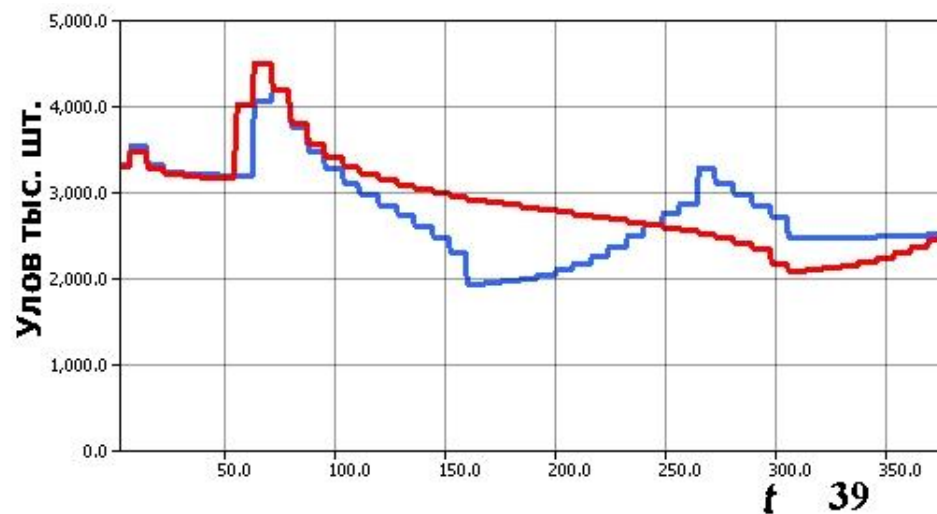
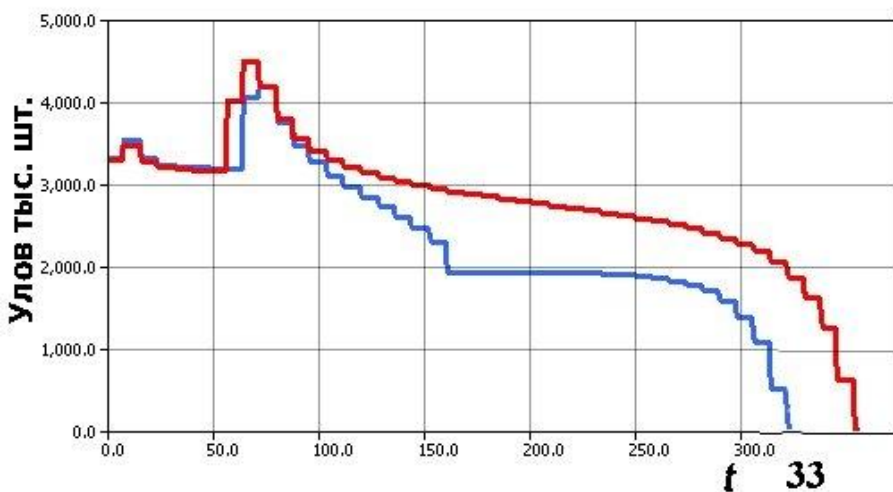


Незначительные ошибки создают иллюзию стабилизации запаса, когда близка точка деградации



Сценарный подход

- Режим эксплуатации популяции и оценка её состояния взаимосвязанные факторы.
- Гибридные модели позволяют алгоритмически описывать логически связанные экспертные решения при регулировании промысла и сравнивать динамику развития характерных «ситуаций».



Вывод

- Динамике разрабатываемых для моделирования биологических процессов функциональных итераций свойственны сложные нелинейные эффекты, не учитываемые на этапе построения моделей, но критическим образом влияющих на интерпретацию результатов моделирования.