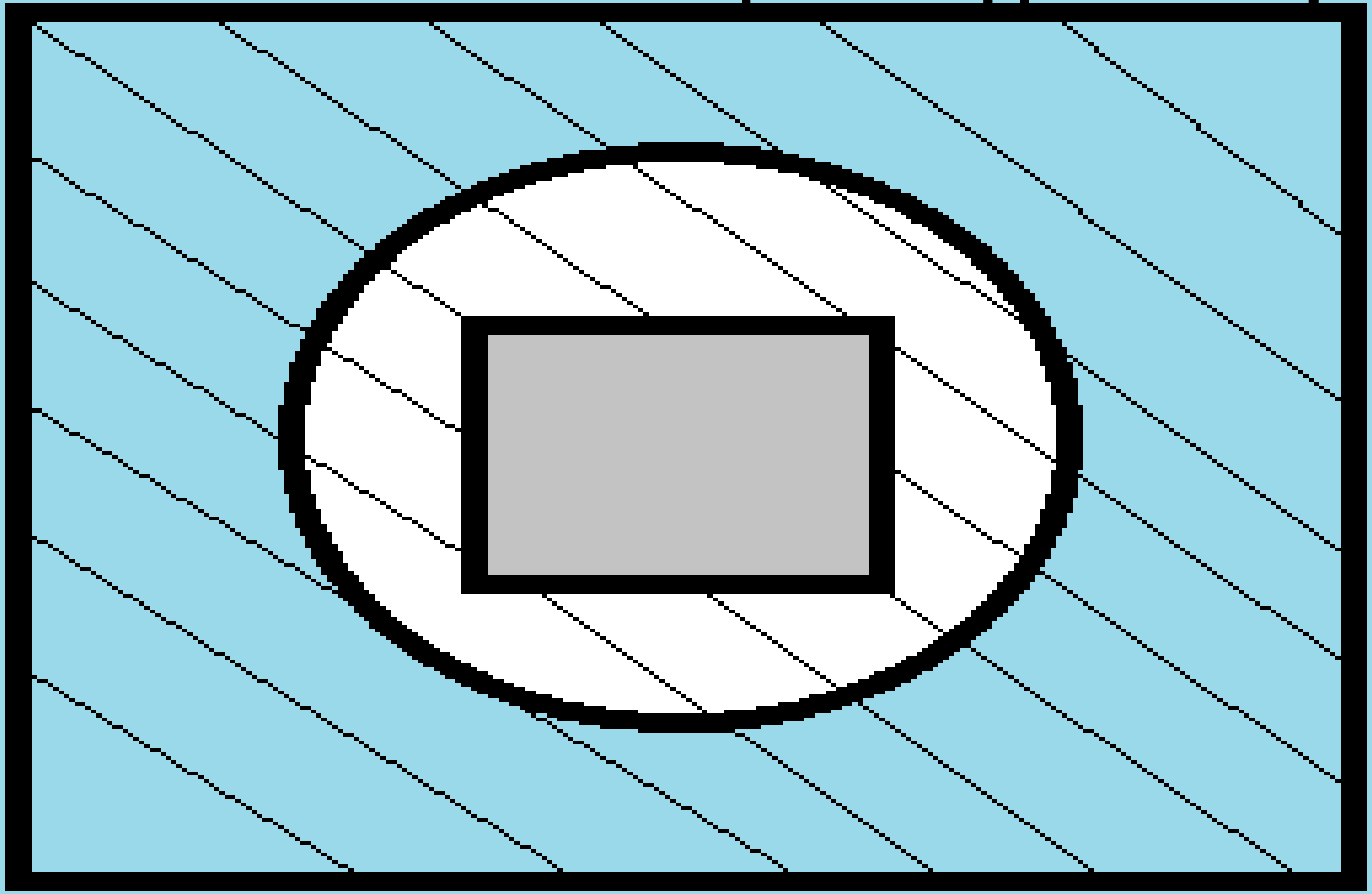
Решение внешней краевой задачи для скалярного уравнения Гельмгольца методом Шварца



Ильин В.П., Петухов А.В., Савченко А.О.

Структура доклада

- Постановка задачи
- Метод Шварца
- Формула Грина для решения внешней краевой задачи
- Метод конечных объемов на барицентрах для решения внутренней краевой задачи
- Алгоритм решения задачи
- Численные результаты для модельных задач

Постановка задачи

Уравнение Гельмгольца

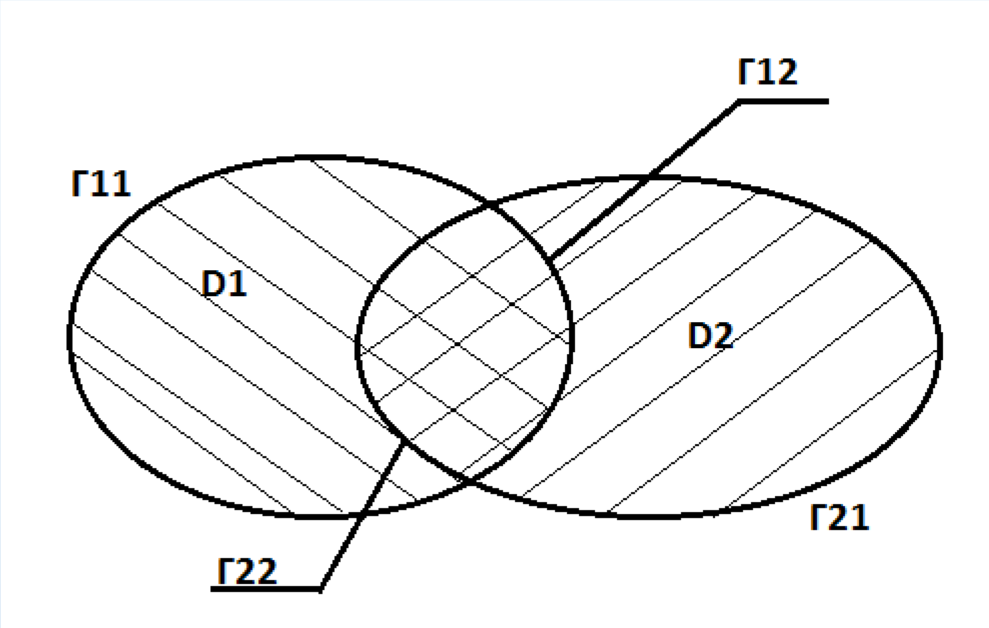
$$-\Delta u(r) - k^2 u(r) = 0,\ r \in R^3 \backslash \overline{D},$$

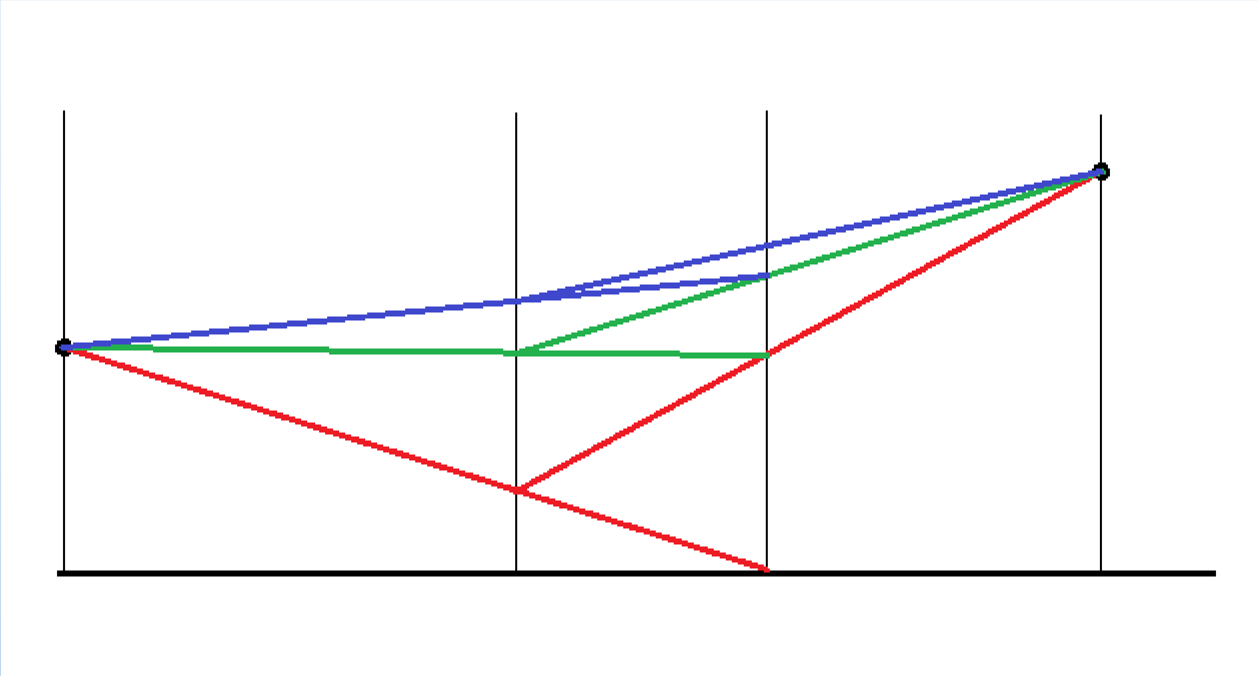
$$u(r) = g(r),\ r \in \partial D,$$

Условие Зомерфельда

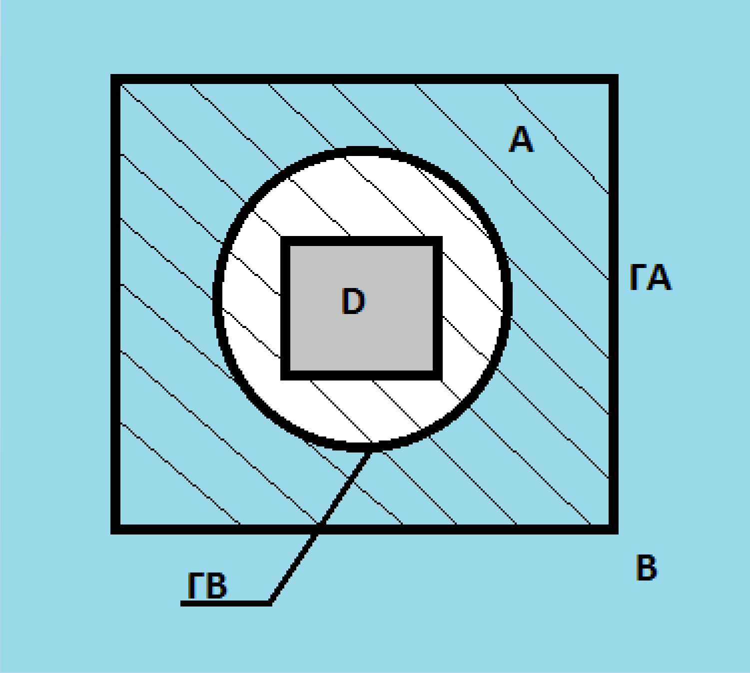
$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r}\left[\frac{\partial u}{\partial r} + iku\right] = 0.$$

Метод Шварца





Метод Шварца



Внутренняя задача

$$-\Delta u(r) - k^2 u(r) = 0,\ r \in A,$$
$$u(r) = g(r),\ r \in \partial D,$$
$$u(r) = g_i(r),\ r \in \Gamma\mathrm{A},$$

Внешняя задача

$$-\Delta u(r) - k^2 u(r) = 0,\ r \in A,$$
$$\frac{\partial u(r)}{\partial n} = gn_i(r),\ r \in \Gamma\mathrm{B},$$
$$u(r) = \overline{g_i}(r),\ r \in \Gamma\mathrm{B},$$
$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r}\left[\frac{\partial u}{\partial r} + iku\right] = 0.$$

Формула Грина
для решения внешней краевой задачи

$$-\Delta u(r) - k^2 u(r) = 0,\ r \in A,$$

$$\frac{\partial u(r)}{\partial n} = g n_i(r),\ r \in \text{ГВ},$$

$$u(r) = \overline{g_i}(r),\ r \in \text{ГВ},$$

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{r}\left[\frac{\partial u}{\partial r} + iku\right] = 0.$$

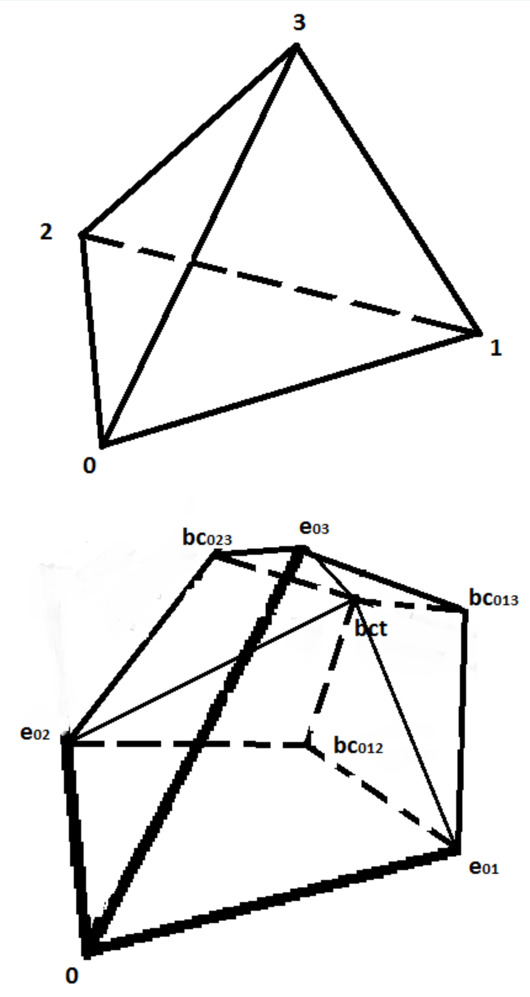
$$u(r) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\text{ГВ}} \left[\frac{\partial u(r)}{\partial n} \frac{e^{ikR}}{R} - u(r) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikR}}{R}\right)\right] ds\,,$$

где $R = |r - r_0| \sqrt{r^2 - 2r_0 r cos\gamma + r_0^2}$,

γ – угол между векторами r и r_0 и

$cos\gamma = cos\theta cos\theta_0 + sin\theta sin\theta_0 cos(\varphi - \varphi_0)$.

Метод конечных объемов на барицентрах для решения внутренней краевой задачи



$$-\Delta u(r) - k^2 u(r) = 0,\ r \in A,$$
$$u(r) = g(r),\ r \in \partial D,$$
$$u(r) = g_i(r), \qquad r \in \Gamma A$$

Интегральный вид уравнения Гельмгольца

$$-\int_A \Delta u(r) dv - \int_A k^2 u(r) dv = 0,$$

$$-\sum_{m'} \int_{\Gamma^v_{l,m'}} \frac{\partial \psi(x)}{\partial n} d\Gamma - \sum_{m'} \int_{V_{l,m'}} k^2 u(r) dv = 0$$

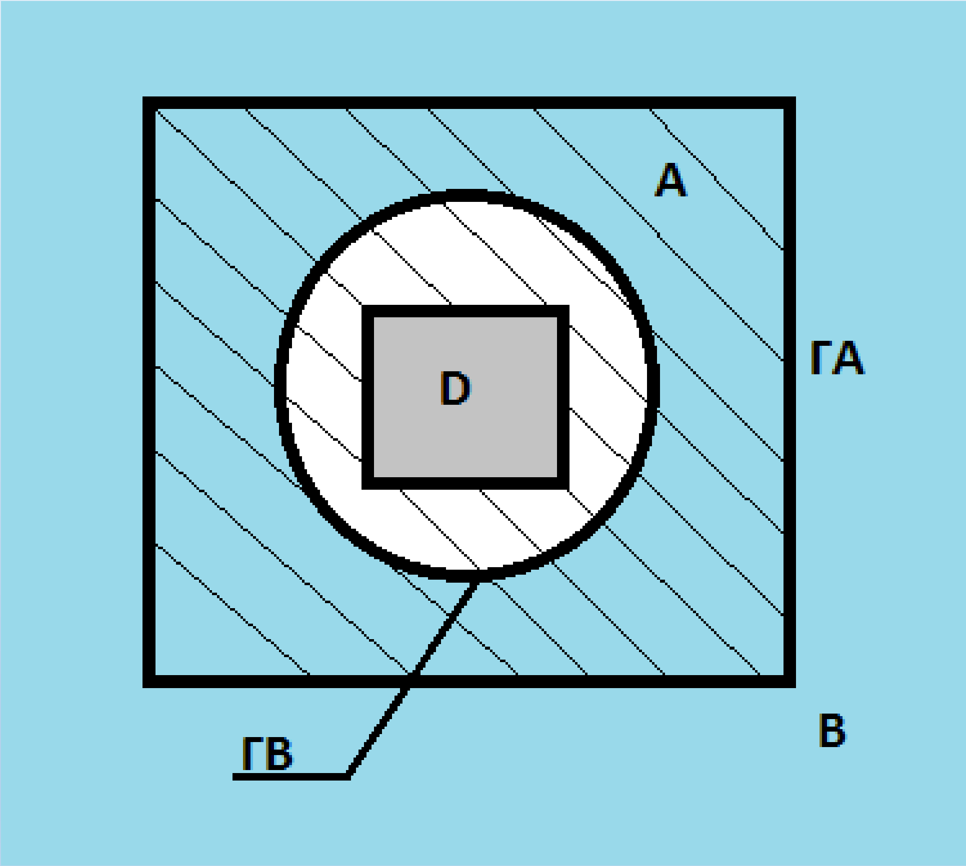
$$-\int_{\Gamma^v_{l,m}} \frac{\partial u(r)}{\partial n} d\Gamma - \int_{V_{l,m}} k^2 u(r) dv = 0$$

Алгоритм решения задачи

- Аппроксимация внутренней задачи
- Итерационный процесс по подобластям
  - Уточнение правой части СЛАУ для внутренней задачи из условий на ∂D и ΓA
  - Итерационное решение СЛАУ для внутренней задачи
  - Расчет данных для внешней задачи на границе ΓB
  - Решение внешней краевой задачи (расчет данных для внутренней задачи на границе ГА)

$$\varepsilon > \max_i \left| u^k(r) - u^{k-1}(r) \right|$$

Численные результаты для модельных задач



$$\partial D: [-0.2, 0.2] \times [-0.2, 0.2] \times [-0.2, 0.2]$$

$$\Gamma B: R = 0.5$$

$$\Gamma A: [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$$

Численные результаты для модельных задач

$$u(r) = \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\varepsilon = \max_i |u(r) - \tilde{u}(r)|$$

$k = 1$

	N. nodes	17	33	65	129
16x8x16	68578	0,013947	0,013644	0,013838	0,013925
32x16x32	528066	0,003668	0,003548	0,003589	0,003667
64x32x64	4143490	0,00173	0,000637	0,000902	0,000911

$k = 0.01$

	N. nodes	17	33	65	129
16x8x16	68578	0,013981	0,013585	0,013822	0,013925
32x16x32	528066	0,003647	0,003508	0,00356	0,003656
64x32x64	4143490	0,001929	0,000817	0,000895	0,000906

Численные результаты для модельных задач

$$u(r) = \frac{e^{ikr_1}}{r_1}, \qquad r_1 = \sqrt{(x-0.1)^2 + y^2 + z^2}$$

$$\varepsilon = \max_i |u(r) - \tilde{u}(r)|$$

$k = 1$

	N. nodes	17	33	65	129
16x8x16	68578	0,100734	0,100525	0,100657	0,100714
32x16x32	528066	0,026636	0,026597	0,02662	0,026653
64x32x64	4143490	0,007086	0,007087	0,007128	0,007135

$k = 0.01$

	N. nodes	17	33	65	129
16x8x16	68578	1,00E-01	1,00E-01	1,00E-01	1,00E-01
32x16x32	528066	2,66E-02	2,65E-02	2,66E-02	2,66E-02
64x32x64	4143490	7,06E-03	7,06E-03	7,11E-03	7,12E-03

Численные результаты для модельных задач

$$u(r) = \frac{e^{ikr}}{r}\left[1 - i\frac{1}{kr}\right]cos\theta$$

$$\varepsilon = \max_i |u(r) - \tilde{u}(r)|$$

$k = 1$

	N. nodes	17	33	65	129
16x8x16	68578	0,212329	0,212193	0,212197	0,212193
32x16x32	528066	0,05582	0,055737	0,055703	0,055749
64x32x64	4143490	0,014186	0,014072	0,014159	0,014145

$k = 0.01$

	N. nodes	17	33	65	129
16x8x16	68578	2,11E+01	2,11E+01	2,11E+01	2,11E+01
32x16x32	528066	5,55E+00	5,54E+00	5,54E+00	5,54E+00
64x32x64	4143490	1,41E+00	1,40E+00	1,41E+00	1,41E+00