



РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Институт проблем безопасного развития атомной энергетики

КОРРЕКЦИЯ И ВЕРИФИКАЦИЯ НЕЯВНОЙ СХЕМЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Безусловно устойчивый неявный алгоритм

Неструктурированные расчетные сетки

Параллельная реализация

Рязанов А.М. Кондаков В.Г.

15 сентября 2015



ПЛАН ДОКЛАДА

- Неявный метод
- Верификация
- Коррекция
- Параллельная реализация



ИБРАЭ



УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

$$\left\{ \begin{array}{ll} c_V(\mathbf{r}) \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{q}) = F(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in \Omega \\ \mathbf{q} = -\sigma(\mathbf{r}) \operatorname{grad}(T), & \mathbf{r} \in \Omega \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} + k(\mathbf{r})[T - T_w(\mathbf{r})] = Q_w(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in \Gamma \\ T = T_0, & t = 0, \mathbf{r} \in \Omega \\ \mathbf{q} = \mathbf{q}_0, & t = 0, \mathbf{r} \in \Omega \end{array} \right.$$

t – время,
 \mathbf{r} – пространственная переменная,
 \mathbf{n} – внутренняя нормаль к границе Γ ,
 \mathbf{q} – вектор теплового потока,
 c_V – теплоёмкость,
 σ – коэффициент теплопроводности,
 F – функция объемных тепловых источников,
 k – коэффициент теплообмена с поверхностью,
 T_w – температура поверхности Γ ,
 Q_w – тепловой поток через границу Γ .



ИБРАЭ

СУТЬ НЕЯВНОГО МЕТОДА

- ⊖ Величины температуры T ассоциированы с ячейками (с).
- Вектор \mathbf{q} теплового потока ассоциирован с узлами (n).
- Плотность теплового потока Q на гранях (вводим) (f).
- Аппроксимируем $\text{div}(\mathbf{q})$ и закон Фурье с использованием только понятий температуры T и плотности теплового потока Q .
- Используя неявную разностную схему, получаем из закона Фурье расчетные формулы вида

$$\bar{Q} = \varphi(Q, \bar{T}).$$

- Подставляя, получаем СЛАУ с хорошо обусловленной симметричной 7-диагональной матрицей A .

$$A\bar{T} = \psi(Q, T)$$



ИБРАЭ

ПЛОТНОСТЬ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА

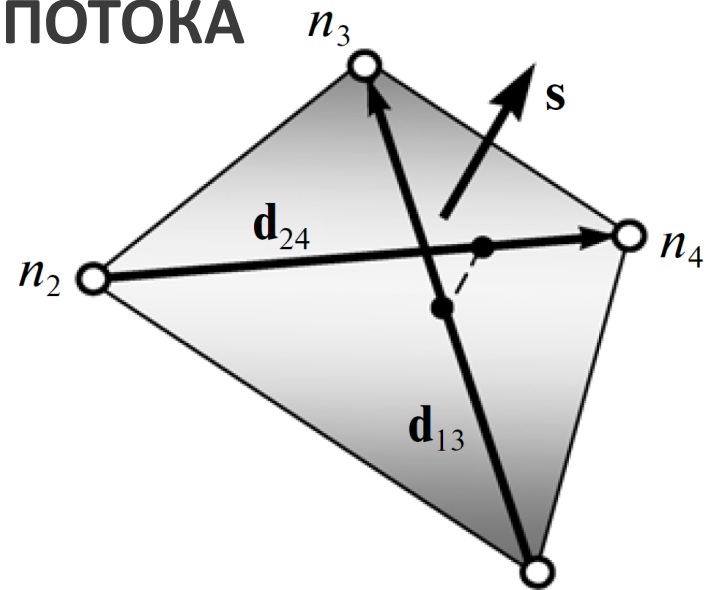
$\mathbf{d}_{13}, \mathbf{d}_{24}$ – диагонали ячейки

$\mathbf{S} = 0.5 \mathbf{d}_{13} \times \mathbf{d}_{24}$ – перпендикуляр

$\mathbf{s} = \mathbf{S}/|\mathbf{S}|$ – нормаль к грани

$S(f) = |\mathbf{S}|$ – площадь грани

$Q(f) = \mathbf{q} \cdot \mathbf{s}$ – плотность теплового потока через грань n_1



АППРОКСИМАЦИЯ ДИВЕРГЕНЦИИ

$q_n = Q(f) \cdot Z(f, c)$ – проекция \mathbf{q} на внутреннюю нормаль

$$\operatorname{div}(\mathbf{q}) \approx \frac{1}{V(c)} \sum_{f \in I_f(c)} Q(f) S(f) Z(f, c)$$



ИБРАЭ

АППРОКСИМАЦИЯ ЗАКОНА ФУРЬЕ

$$\Phi = \int_{\Omega} \frac{|\mathbf{q}|^2}{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} 2T \operatorname{div}(\mathbf{q}) d\Omega + \int_{\Gamma} \left(\frac{q_n^2}{k} - 2T_w q_n \right) d\Gamma$$

$$\frac{\mathbf{q}}{\sigma} = -\operatorname{grad}(T), \mathbf{r} \in \Omega \quad \frac{q_n}{k} = T - T_w, \mathbf{r} \in \Gamma$$

$$\int_{V(c)} \left(\frac{|\mathbf{q}|^2}{\sigma} \right) d\Omega = \frac{V(c)}{8\sigma(c)} \sum_{n \in I_n(c)} |\mathbf{q}(n, c)|^2$$

$$a(f)Q(f) + \sum_{f_k \in I_f(f)} b(f_k)Q(f_k) = g_T(f)$$



РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

$$c_V \frac{\bar{T}(c) - T(c)}{\tau} - \frac{1}{V(c)} \sum_{f \in I_f(c)} \bar{Q}(f) S(f) Z(f, c) = F(c)$$

$$a(f) \frac{\bar{Q}(f) - Q(f)}{\omega} + a(f) Q(f) + \sum_{f_k \in I_f(f)} b(f_k) Q(f_k) = g \bar{T}(f)$$

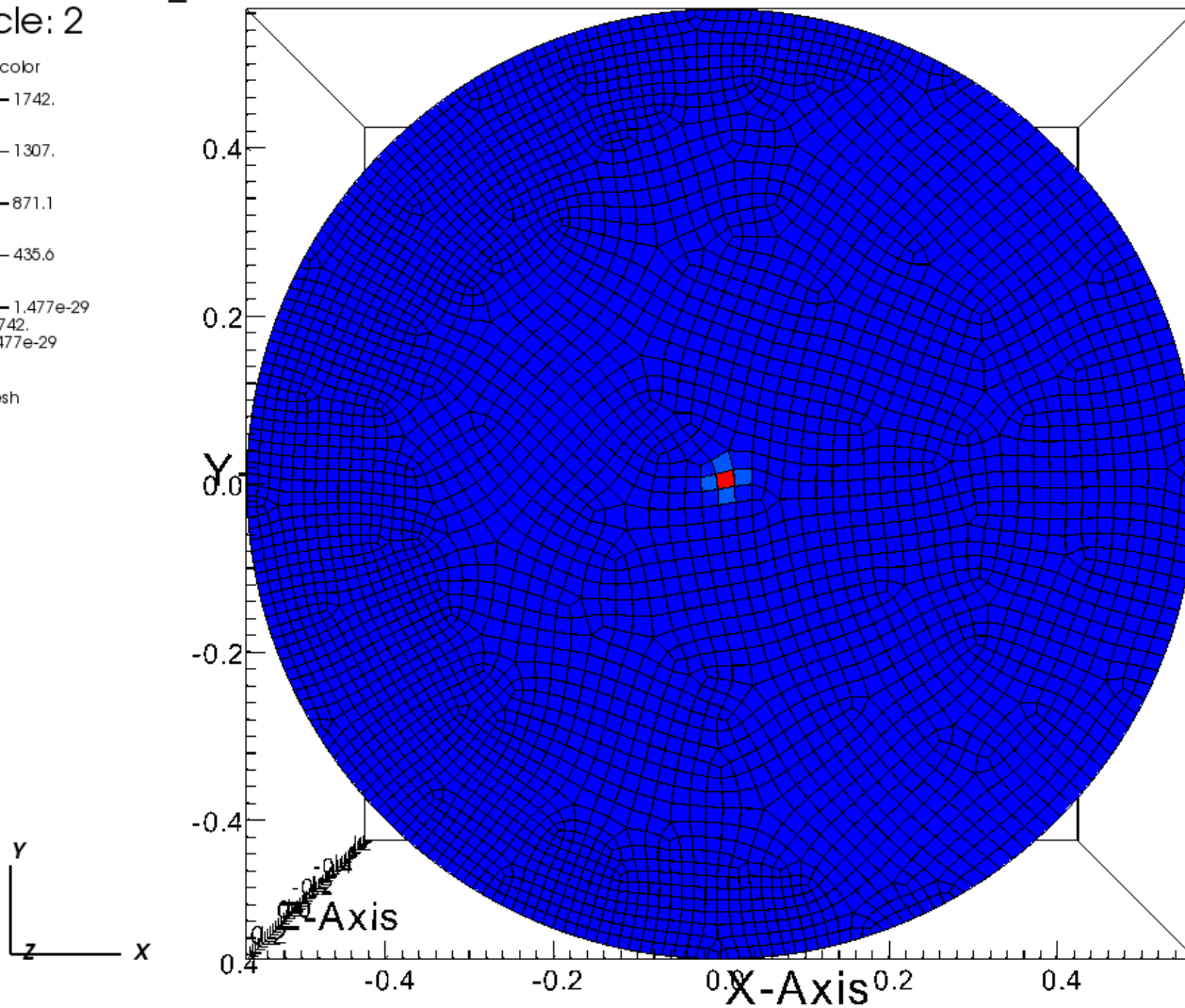
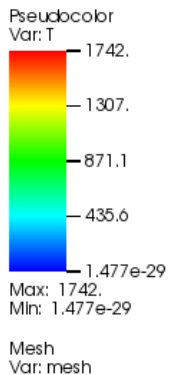
τ — шаг по времени

ω — релаксационный параметр



ТЕСТ 1. ЭВОЛЮЦИЯ ДЕЛЬТА ФУНКЦИИ (1)

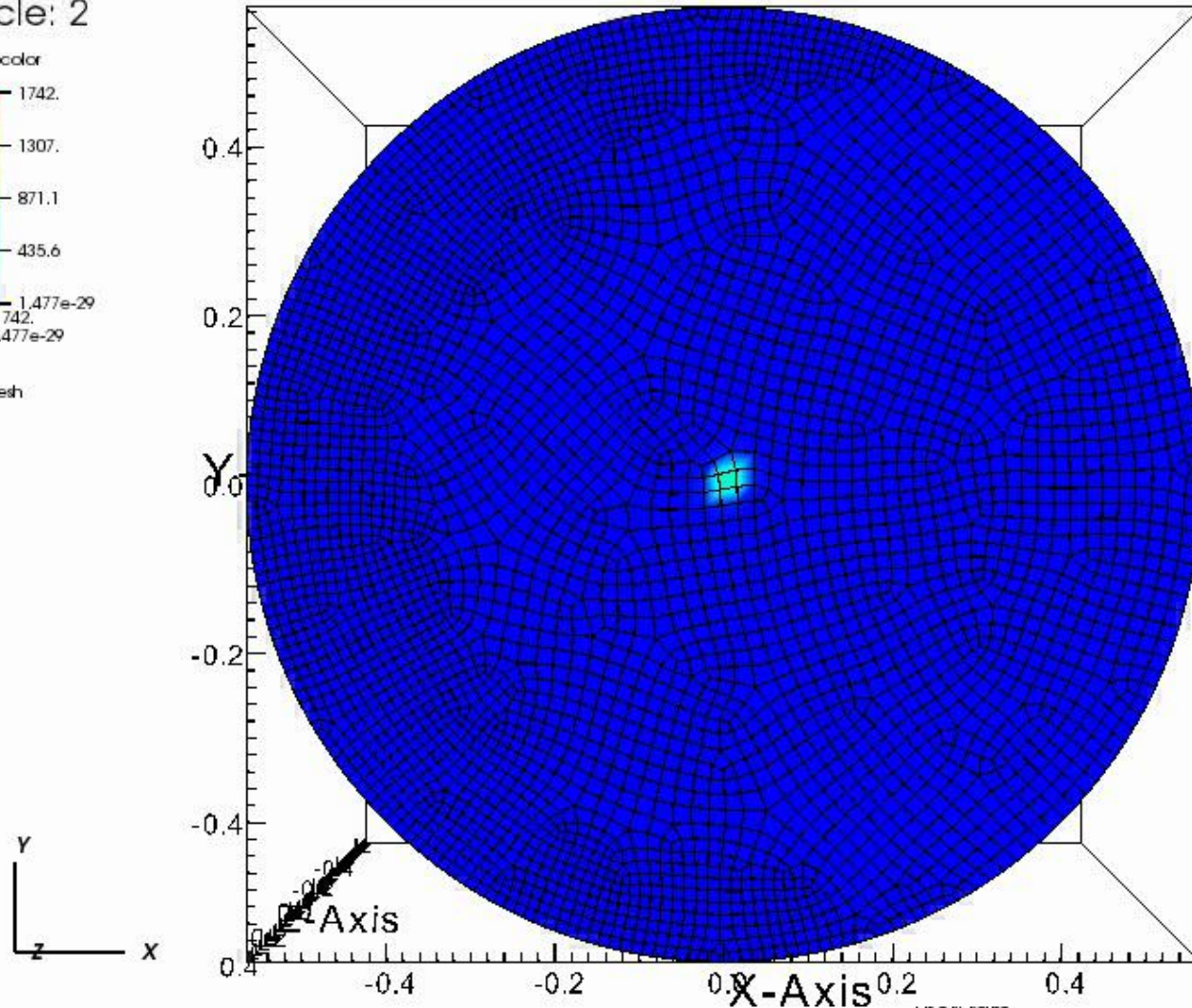
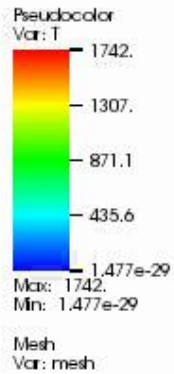
DB: outhexes_2.vtk
Cycle: 2





ТЕСТ 1. ЭВОЛЮЦИЯ ДЕЛЬТА ФУНКЦИИ (2)

DB: outhexes_2.vtk
Cycle: 2



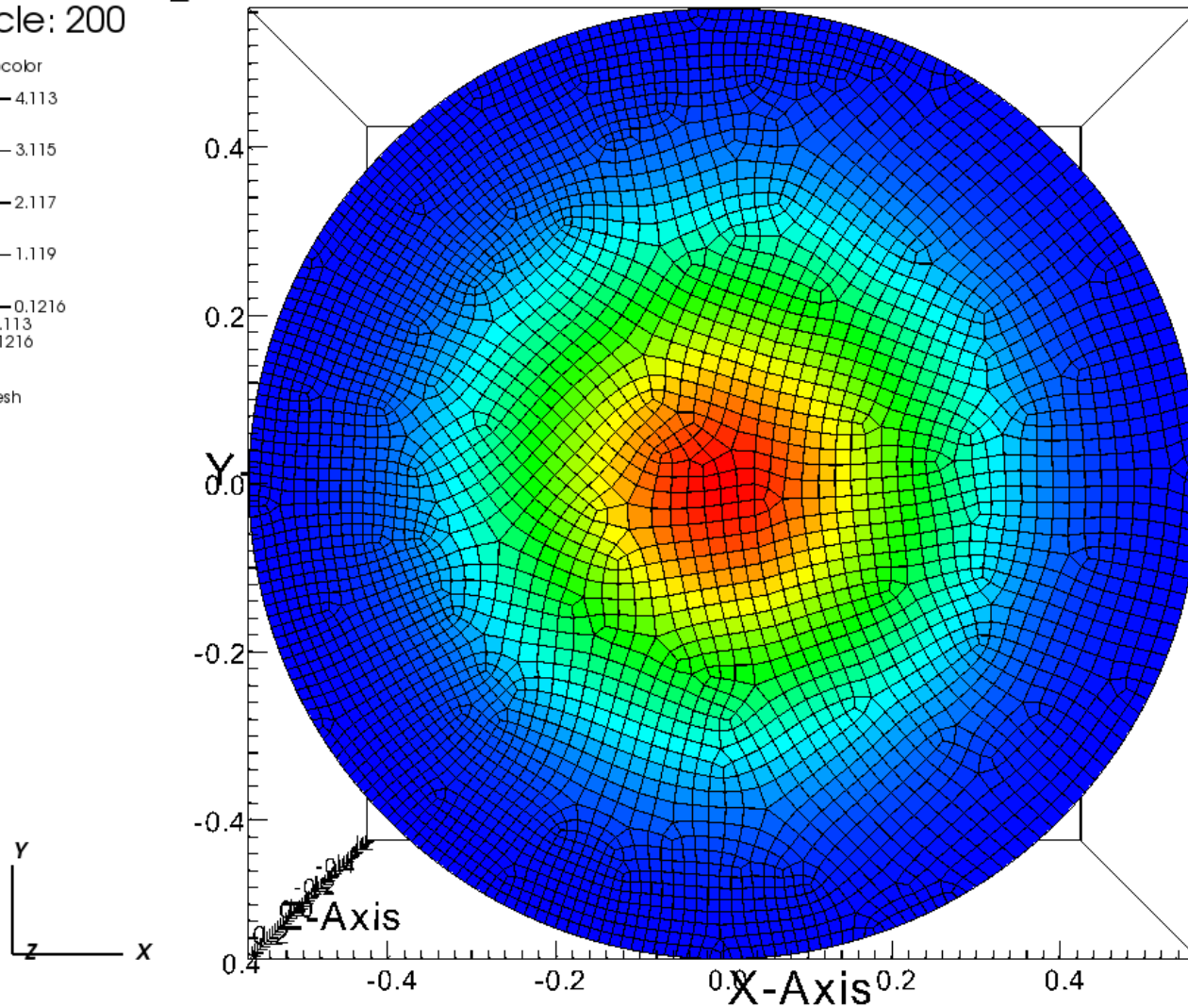
user: ram
Mon Sep 14 17:10:39 2015



ТЕСТ 1. ЭВОЛЮЦИЯ ДЕЛЬТА ФУНКЦИИ (3)

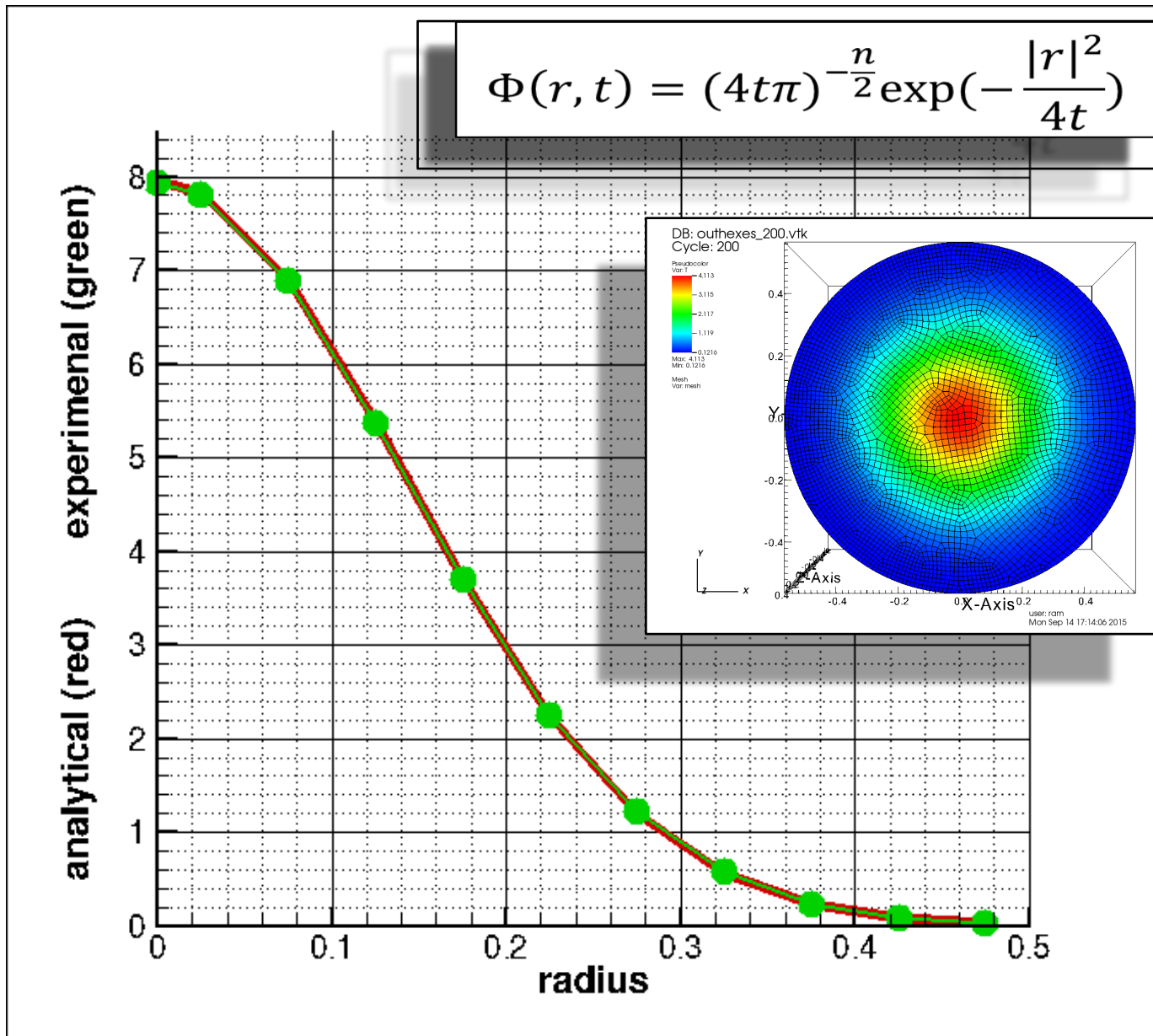
DB: outhexes_200.vtk
Cycle: 200

Pseudocolor
Var: T
4.113
3.115
2.117
1.119
0.1216
Max: 4.113
Min: 0.1216
Mesh
Var: mesh



user: ram
Mon Sep 14 17:14:06 2015

ТЕСТ 1. ЭВОЛЮЦИЯ ДЕЛЬТА ФУНКЦИИ (4)





ТЕСТ 2. НАГРЕВАНИЕ ПЛАСТИНЫ (0)

- Моделируется теплопроводность в тонкой медной пластине.
- В начальный момент времени ($t = 0$) пластина равномерно нагрета до 293K.
- С одного конца пластины задан тепловой поток в $3 \cdot 10^5 \text{ Вт/м}^2$.
- В качестве проверочного значения рассматривается распределение температуры после двух минут ($t = 120$) протекания процесса.

VMFL050: Transient Heat Conduction in a Semi-Infinite Slab

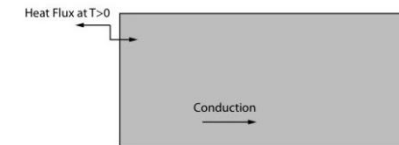
Overview

Reference	F.P. Incropera, D.P. Dewitt, T.L. Bergman, and A.S. Lavine, "Introduction to Heat Transfer", 5th Edition, Wiley & Sons, 2007; Page 283.
Solver	ANSYS FLUENT, ANSYS CFX
Physics/Models	Transient heat transfer, Conduction
Input File	VMFL050_FLUENT.cas for ANSYS FLUENT VMFL050_CFX.def for ANSYS CFX

Test Case

Unsteady heat conduction in a thick copper plate is modeled. Initially (at $t = 0$) the plate is at a uniform temperature of 293 K. It is suddenly exposed to a heat transfer at one surface with a constant heat flux of $3 \times 10^5 \text{ W/m}^2$. The temperature distribution after 2 minutes is considered for verification.

Figure 50.1: Flow Domain



Material Properties	Geometry	Boundary Conditions
Density = 8995.67 kg/m ³	Dimensions of the slab:	Heat Flux = $3 \times 10^5 \text{ W/m}^2$ on one wall. The opposite wall is adiabatic.
Specific Heat = 381 J/kg-K	750 mm X 300 mm	Lateral boundaries are modeled as planes of symmetry.
Conductivity = 401 W/m-K		

Analysis Assumptions and Modeling Notes

The flow is transient. The dimensions considered here are adequate for the semi-infinite slab assumption. The domain is initialized with a uniform temperature of 293 K corresponding to the condition at time = 0 sec.



ИБРАЭ

ТЕСТ 2. НАГРЕВАНИЕ ПЛАСТИНЫ (1)

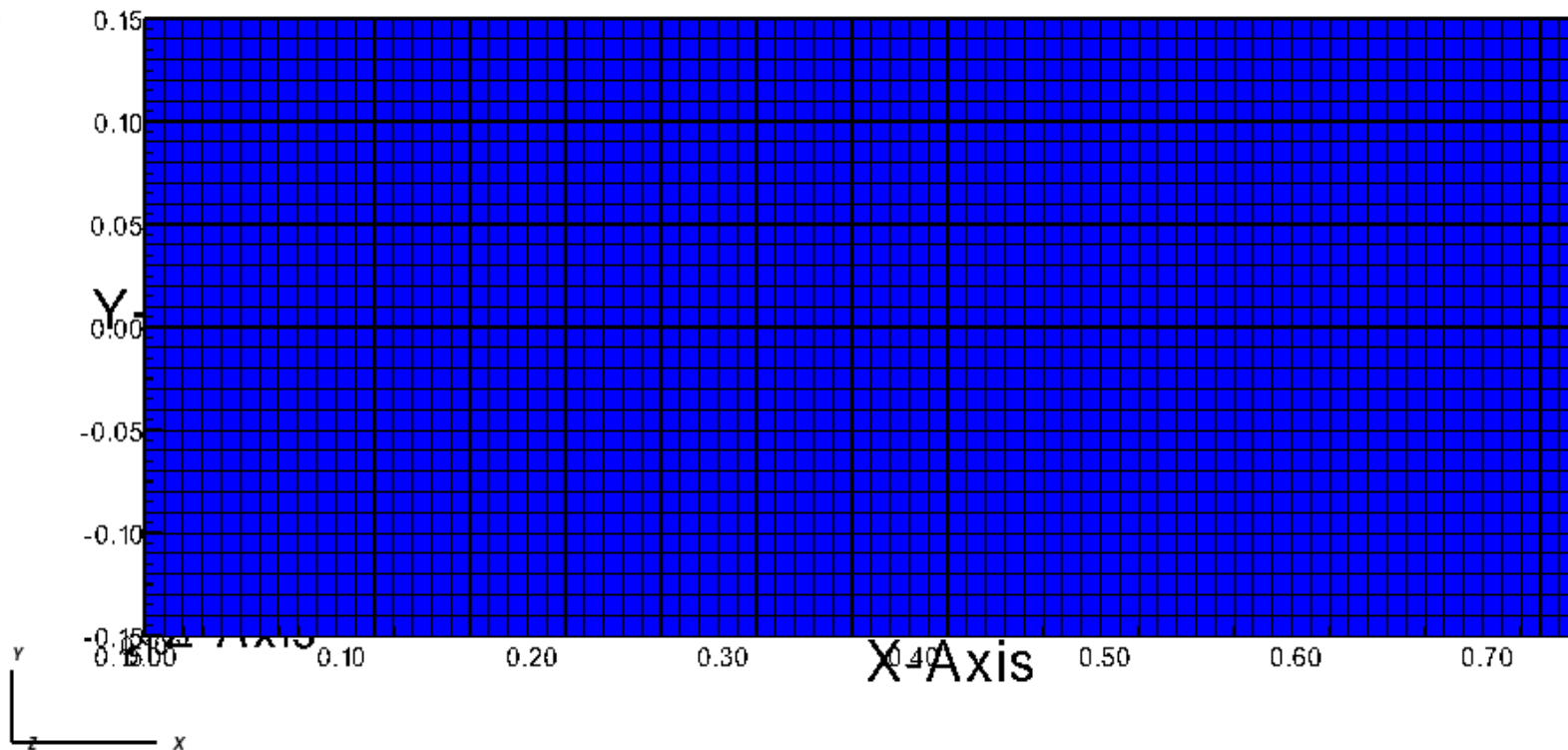
DB: outhexes_0.vtk
Cycle: 0

Pseudocolor
Var: T
Constant



Max: 20.00
Min: 20.00

Mesh
Var: mesh



user: ram
Mon Sep 14 20:59:33 2015



ИБРАЭ

ТЕСТ 2. НАГРЕВАНИЕ ПЛАСТИНЫ (2)

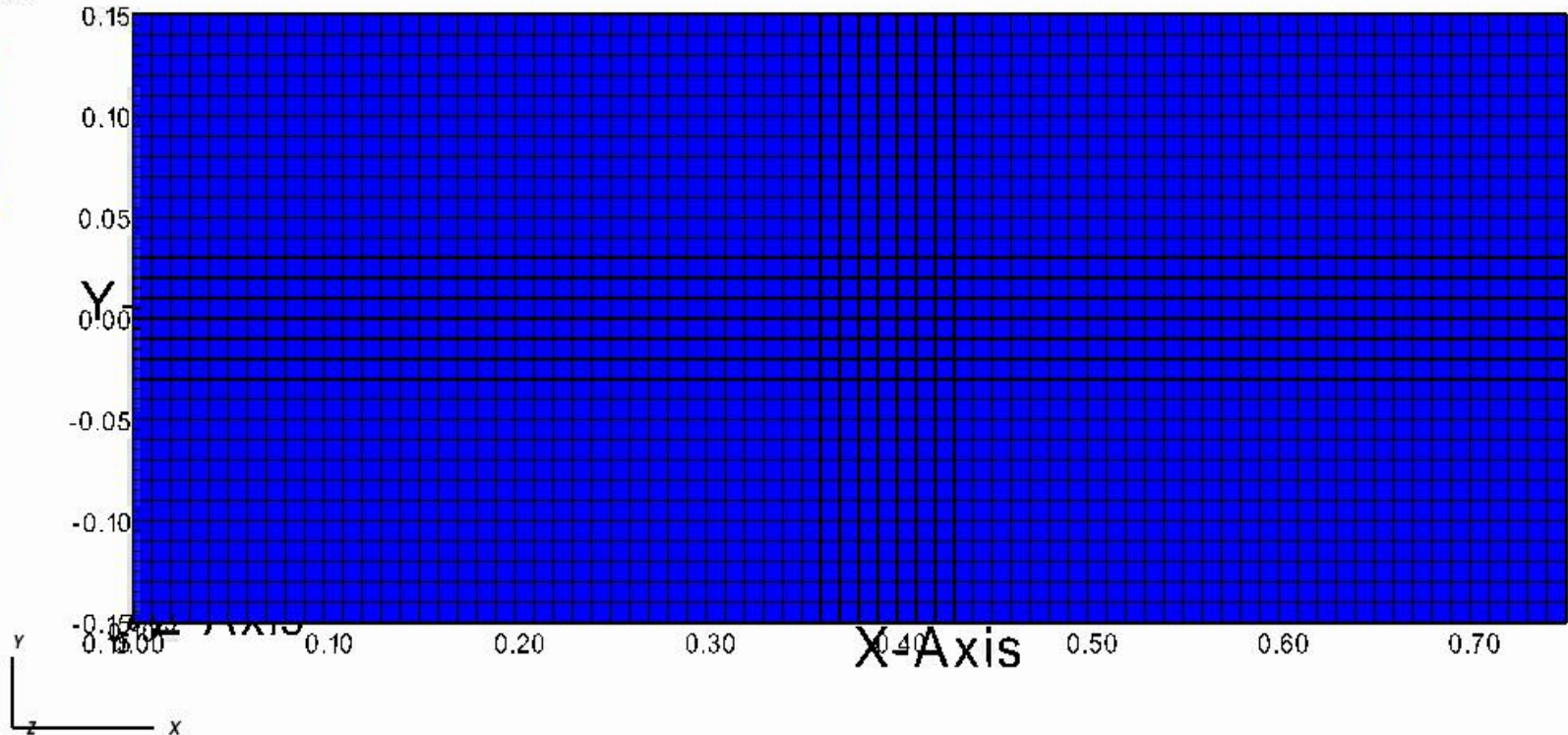
DB: outhexes_0.vtk
Cycle: 0

Pseudocolor
Var: T
Constant



Min: 20.00
Max: 20.00

Mesh
Var: mesh



user: ram
Mon Sep 14 21:01:52 2015



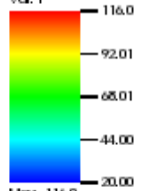
ИБРАЭ

ТЕСТ 2. НАГРЕВАНИЕ ПЛАСТИНЫ (3)

DB: outhexes_120.vtk
Cycle: 120

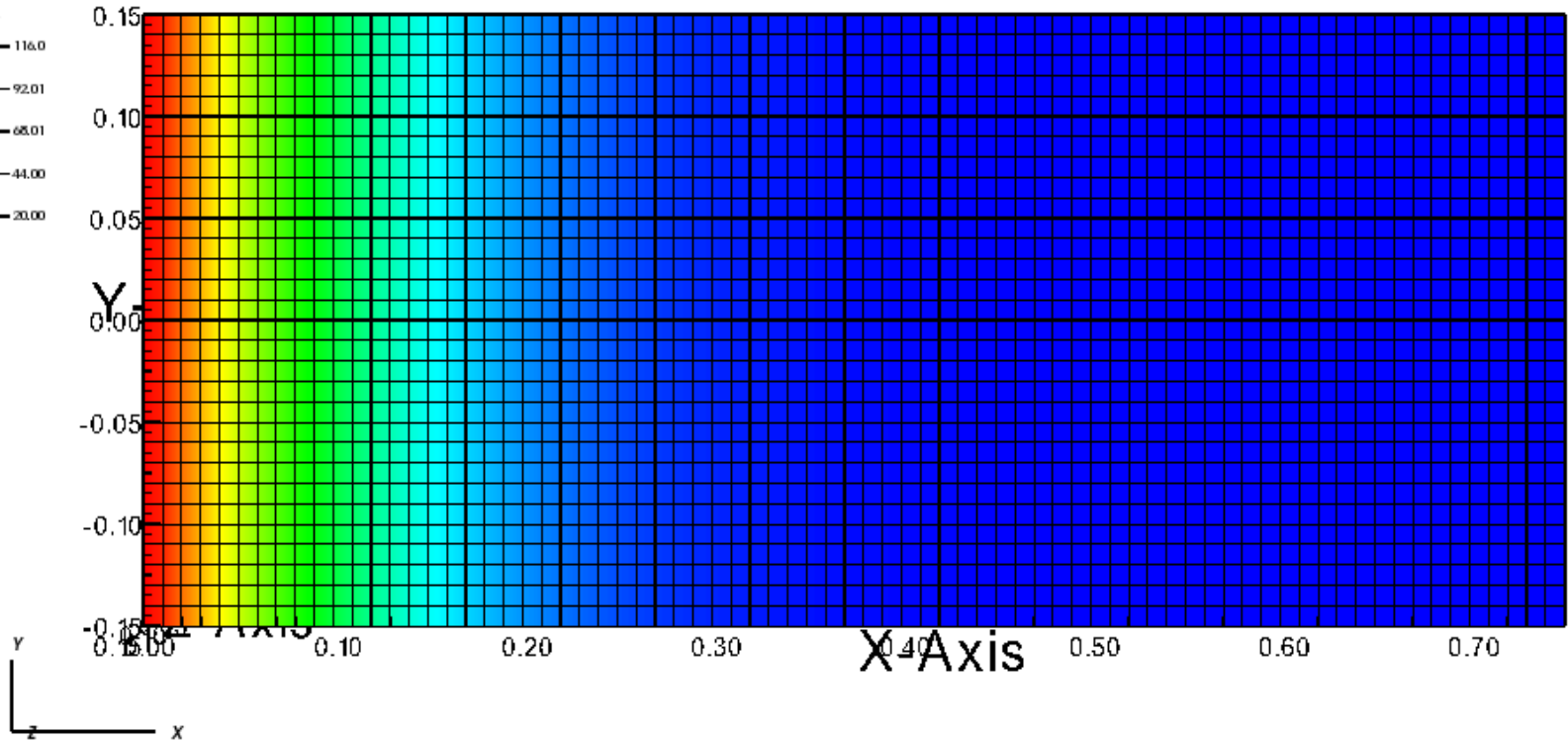
Pseudocolor

Var: T



Max: 116.0
Min: 20.00

Mesh
Var: mesh

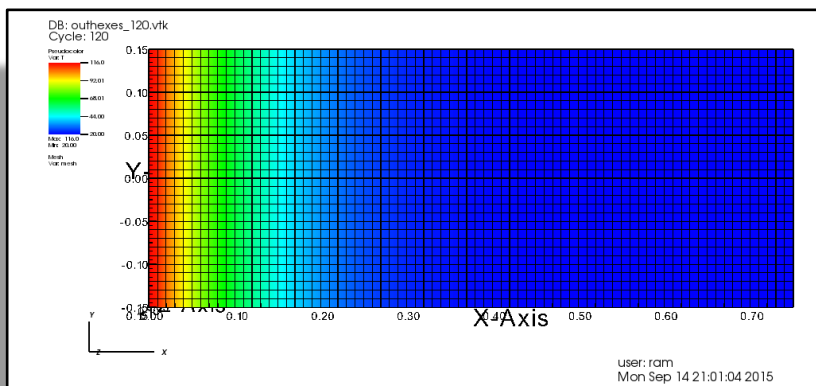


user: ram

Mon Sep 14 21:01:04 2015

ТЕСТ 2. НАГРЕВАНИЕ ПЛАСТИНЫ (4)

	Точное решение (K)	Результат расчета (K)	Совпадение (%)
Температура нагреваемой стенки	393	393.6	99.84
Температура на удалении 0.15м от стенки	318.4	319	99.81



VMFL050: Transient Heat Conduction in a Semi-Infinite Slab

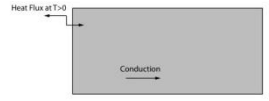
Overview

Reference	J.P. Incropera, D.P. Dewitt, T.L. Bergman, and A.S. Lavine, "Introduction to Heat Transfer", 5th Edition, Wiley & Sons, 2007, Page 283.
Solver	ANSYS FLUENT, ANSYS CFX
Physics Models	Transient heat transfer, Conduction
Input File	VMFL050_FLUENT.cas for ANSYS FLUENT VMFL050_CFX.def for ANSYS CFX

Test Case

Unsteady heat conduction in a thick copper plate is modeled. Initially (at $t = 0$) the plate is at a uniform temperature of 293 K. It is suddenly exposed to a heat transfer at one surface with a constant heat flux of $3 \times 10^5 \text{ W/m}^2$. The temperature distribution after 2 minutes is considered for verification.

Figure 50.1: Flow Domain



Material Properties	Geometry	Boundary Conditions
Density = 8950 kg/m ³	Dimensions of the slab: 750 mm X 300 mm	Heat flux = $3 \times 10^5 \text{ W/m}^2$ on one wall. The opposite wall is adiabatic.
Specific Heat = 381 J/kg K		Lateral boundaries are modeled as planes of symmetry.
Conductivity = 401 W/m K		

Analysis Assumptions and Modeling Notes

The flow is transient. The dimensions considered here are adequate for the semi-infinite slab assumption. The domain is initialized with a uniform temperature of 293 K corresponding to the condition at time = 0 sec.



ИБРАЭ

КОРРЕКЦИЯ

○

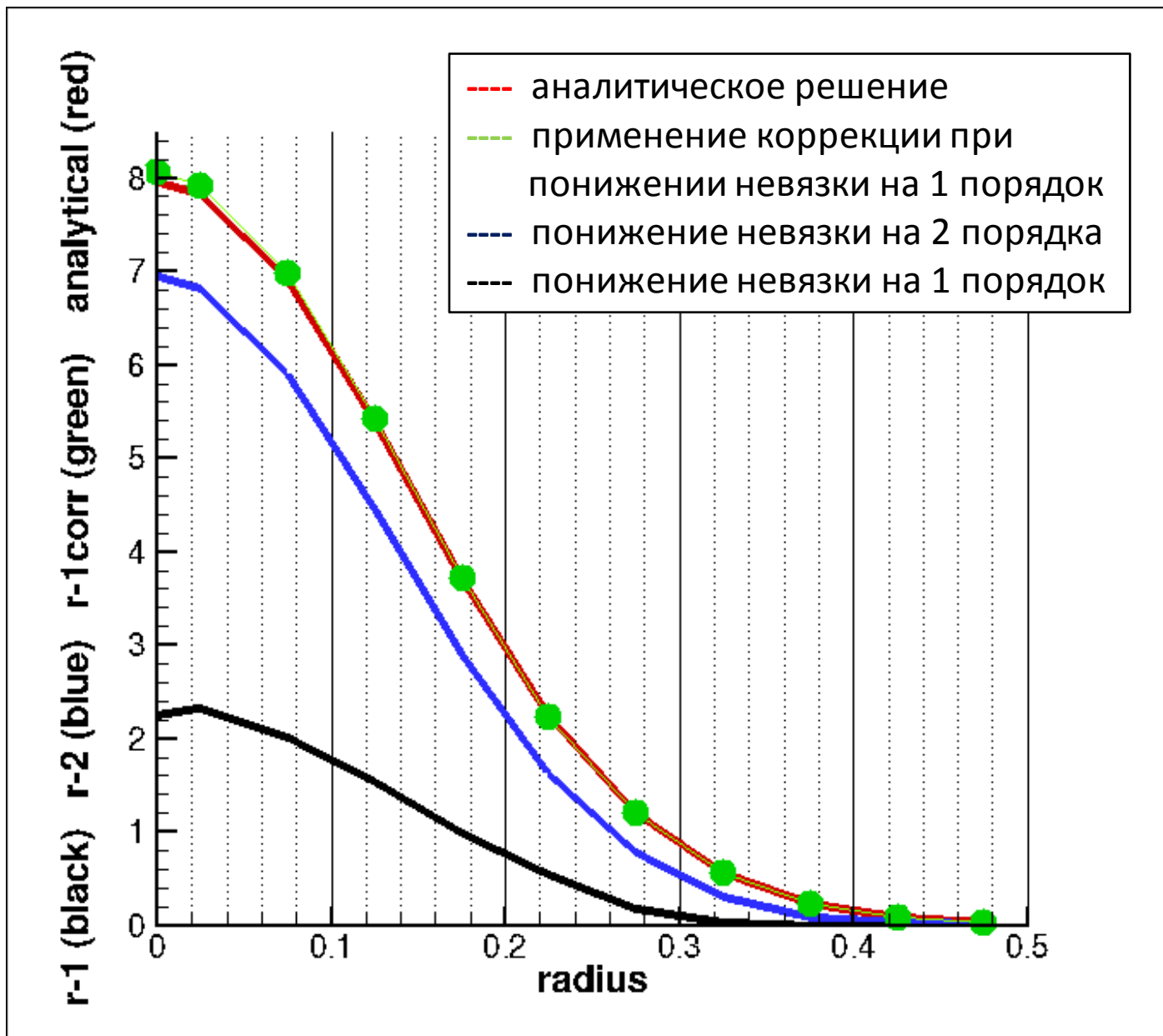
$$c_V \frac{\bar{T}(c) - T(c)}{\tau} - \frac{1}{V(c)} \sum_{f \in I_f(c)} \bar{Q}(f) S(f) Z(f, c) = F(c) \quad (1)$$

$$a(f) \frac{\bar{Q}(f) - Q(f)}{\omega} + a(f) Q(f) + \sum_{f_k \in I_f(f)} b(f_k) Q(f_k) = g_{\bar{T}}(f) \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow \bar{Q} = \varphi(Q, \bar{T}) \Rightarrow (1) \Rightarrow A\bar{T} = \psi(Q, T) \Rightarrow \bar{T} \Rightarrow (2) \Rightarrow \bar{Q}$$

$$\bar{Q} \Rightarrow (1) \Rightarrow \tilde{T} \Rightarrow (2) \Rightarrow \tilde{Q}$$

ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ КОРРЕКЦИИ





ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

- Библиотека сеточных данных MOAB/INMOST
- Библиотека для параллельных научных вычислений с векторно-матричной алгеброй PETSc
- Набор итерационных солверов PETSc
- Прямой солвер библиотеки MUMPS
- MPI
- C++



ИБРАЭ

ЛИТЕРАТУРА

- *В. М. Головизнин, В. Н. Котеров, В. М. Кривцов*, Расчет уравнения теплопроводности на неструктурированных криволинейных сетках, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2011, том 51, номер 11, 2075–2083
- *Коршия Т.К., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю.* Вариационный подход к построению разностных схем для уравнения теплопроводности на криволинейных сетках // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1980. Т. 20. № 2. С. 401–421.
- *F.P. Incropera, D.P. Dewitt, T.L. Bergman, and A.S. Lavine*, “Introduction to Heat Transfer”, 5th Edition, Wiley & Sons, 2007; Page 283.



Спасибо
за внимание!



Рязанов А.М. ram@ibrae.ac.ru

Кондаков В.Г. kondakov@ibrae.ac.ru