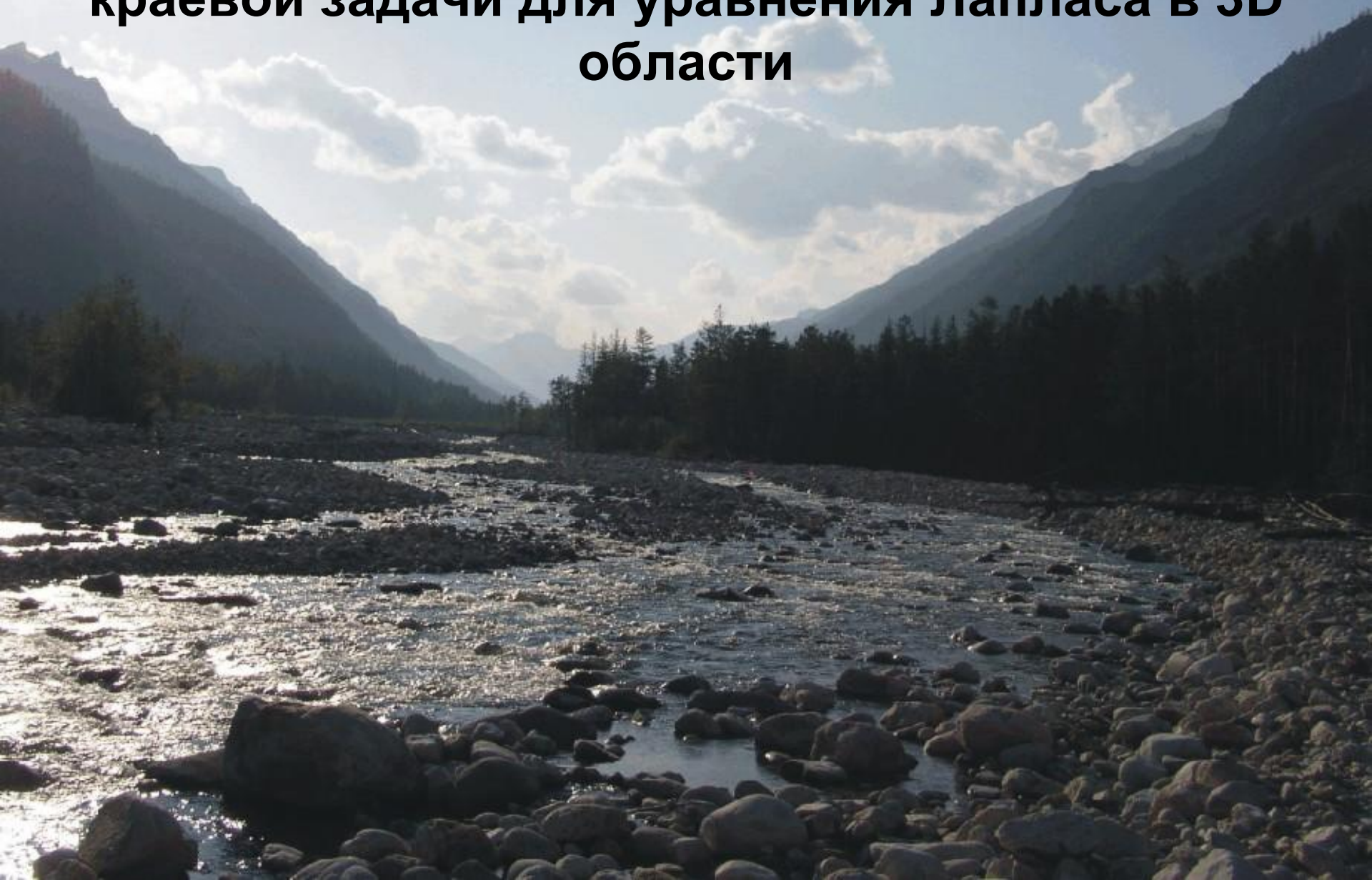


Численный метод решения внешней краевой задачи для уравнения Лапласа в 3D области



Предлагаемый в данной работе подход к решению внешней краевой задачи для уравнения Лапласа состоит в нахождении приближённых значений искомой функции на поверхности вспомогательной сферы, заключающей в себя исходную внутреннюю границу, поскольку тогда можно найти значения функции в любой точке области путём вычисления интегралов от этих значений. Рассматривается итерационный алгоритм (альтернирующий метод Шварца, в котором последовательно пересчитываются граничные условия на сфере и внешней вспомогательной поверхности), состоящий из комбинированного применения метода конечных элементов (МКЭ) и интегрального подхода. На каждой итерации решается внутренняя краевая задача в области, ограниченной внешней вспомогательной поверхностью и исходной границей, и находятся приближённые значения искомой функции на поверхности сферы. Интеграл от этих значений определяет новые значения функции на внешней границе расчётной области, которые позволяют провести очередную итерацию. Доказана сходимость предложенного итерационного метода. Метод иллюстрируется результатами численных экспериментов при решении внешних задач Дирихле и Неймана со сложными конфигурациями границ.

1. Постановка задачи и метод решения

Рассмотрим открытую область D в пространстве \mathbb{R}^3 ограниченную замкнутой поверхностью $\partial D = \partial D_1 \cup \partial D_2$, ∂D_2 - гладкая поверхность.

Внешняя краевая задача для уравнения Лапласа состоит в нахождении

функции
$$u \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus D) \cap C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}),$$

равномерно стремящейся к 0 на бесконечности, и удовлетворяющей решению

уравнения
$$\Delta u(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \quad (1)$$

и краевым условиям

$$u(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial D_1, \quad \text{и} \quad (2)$$
$$\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial D_2.$$

Задача предполагается решённой, если удастся найти значения искомой функции u_S на поверхности сферы ∂S . В этом случае можно найти значения функции в произвольной точке пространства в сферических координатах по формуле

$$u(r, \theta, \varphi) = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta_0 \int_0^\pi u_S(\theta_0, \varphi_0) \frac{r^2 - R^2}{(r^2 - 2Rr \cos \gamma + R^2)^{3/2}} d\varphi_0 d\theta_0, \quad (3)$$

где R - радиус сферы, $r_1 = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = \sqrt{r^2 - 2Rr \cos \gamma + R^2}$,

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0).$$

Если на поверхности сферы найдена нормальная производная искомой функции u_n , то значения функции в произвольной точке пространства находятся по формуле

$$u(r, \theta, \varphi) = \frac{R^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta_0 \int_0^\pi u_n(\theta_0, \varphi_0) \left[\frac{1}{R} \ln \frac{R + r_1 - r \cos \gamma}{r(1 - \cos \gamma)} - \frac{2}{r_1} \right] d\varphi_0 d\theta_0. \quad (4)$$

Формулы (3) и (4) являются основой для численного метода решения задачи (1) – (2). Предлагаемый метод сводит решение задачи (1) – (2) в бесконечной области к итерационному решению краевой задачи в конечной области.

Введём область Ω_0 с границей $\partial\Omega_0$, такую, что $\bar{D} \subset \Omega_0$.

Рассмотрим шар S с поверхностью ∂S , такой, что $\bar{D} \subset S \subset \Omega_0$.

На первой итерации метода зададим нулевые граничные условия на поверхности $\partial\Omega_0$ и решим внутреннюю краевую задачу для области $\Omega_0 \setminus \bar{D}$.

При этом нас будут интересовать решение этой задачи, представленное в виде значений функции (или её нормальной производной) только на поверхности ∂S . По этим значениям определим новые граничные условия на внешней расчётной области по формуле (3) (или (4)).

На второй и всех последующих итерациях выбираем новую область Ω , $\bar{D} \subset S \subset \Omega$. На всех последующих итерациях решается внутренняя краевая задача в области $\Omega \setminus \bar{D}$, и восстанавливаются новые граничные условия по формуле (3) (или (4)) на поверхности $\partial\Omega$.

2. Сходимость итерационного метода

Запишем формулу (3) в виде

$$u(\mathbf{r}) = \int_{\partial S} u_S(\mathbf{r}_0) K_S(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) d s \quad .$$

Тогда итерационный процесс определяется следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u^{k+1}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega_k \setminus \bar{D}, \\ u^{k+1}(\mathbf{r}) = \Phi^k(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial \Omega_k, \\ u^{k+1}(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial D_1, \\ \frac{\partial u^{k+1}}{\partial n}(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial D_2, \quad k = 0, 1, \dots, \end{array} \right.$$

где $\Phi^0(\mathbf{r}) = 0$, $\Phi^k(\mathbf{r}) = \int_{\partial S} u_S^k(\mathbf{r}_0) K_S(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) d s$, $\mathbf{r} \in \partial \Omega_k$, $\mathbf{r}_0 \in \partial S$,
 $k = 1, 2, \dots$

Определим при $\mathbf{r} \in \bar{\Omega}_k \setminus D$ погрешность метода как

$$\omega^{k+1}(\mathbf{r}) = u^{k+1}(\mathbf{r}) - u(\mathbf{r}).$$

Тогда $\omega^{k+1}(\mathbf{r}) = \int_{\partial S} (u_S^k(\mathbf{r}_0) - u_S(\mathbf{r}_0)) K_S(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) dS = \int_{\partial S} \omega^k(\mathbf{r}_0) K_S(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) dS \equiv \varphi^k(\mathbf{r})$ (5)

и погрешность будет удовлетворять уравнениям

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \omega^{k+1}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega_k \setminus D, \\ \omega^{k+1}(\mathbf{r}) = \varphi^k(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial \Omega_k, \\ \omega^{k+1}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \partial D_1, \\ \frac{\partial \omega^{k+1}}{\partial n}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \partial D_2. \end{array} \right.$$

Из принципа максимума и принципа Заремба-Жиро [11] для гармонических функций следует, что максимум погрешности достигается на внешней границе $\partial \Omega_k$ области $\bar{\Omega}_k \setminus D$, и справедлива оценка

$$\max_{\mathbf{r} \in \bar{\Omega}_k \setminus D} |\omega^{k+1}(\mathbf{r})| \leq \max_{\mathbf{r} \in \partial \Omega_k} |\omega^{k+1}(\mathbf{r})| = \max_{\mathbf{r} \in \partial \Omega_k} |\varphi^k(\mathbf{r})|.$$

Поскольку интеграл Пуассона с единичным весом для сферы радиуса R равен R/r при $r > R$ то из (5) следует оценка

$$\max_{\mathbf{r} \in \partial \Omega_k} |\omega^{k+1}(\mathbf{r})| \leq \max_{\mathbf{r}_0 \in \partial S} |\omega^k(\mathbf{r}_0)| \int_{\partial S} K_S(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) d s \leq \frac{R}{R_0} \max_{\mathbf{r}_0 \in \partial S} |\omega^k(\mathbf{r}_0)|$$

где R_0 — максимальный радиус шара, вписанного в $\bar{\Omega}_k$, $R_0 > R$.

Отсюда следует, что итерационный метод сходится со скоростью геометрической прогрессии с показателем R/R_0 .

3. Численный метод решения внутренних краевых задач

Для численного решения краевой задачи (1) – (2) воспользуемся методом конечных элементов. Уравнение Лапласа $\Delta u^{k+1}(\mathbf{r}) = 0$ в области $\Omega_k \setminus \bar{D}$ с краевыми условиями Дирихле на границах $\partial\Omega_k$, ∂D_1 и краевым условием Неймана на границе ∂D_2 может быть переписано в слабой форме следующим образом: найти $u^{k+1} \in H^1(\Omega_k \setminus \bar{D})$, удовлетворяющую краевым условиям

$$\text{Дирихле} \quad \begin{cases} u^{k+1}(\mathbf{r}) = \Phi^k(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in \partial\Omega_k, \\ u^{k+1}(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in \partial D_1, \end{cases} \quad (6)$$

а также уравнению

$$\int_{\hat{\Omega}_k} \nabla u^{k+1}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_{\partial D_2} g(\mathbf{r}) \cdot \varphi(\mathbf{r}) dD, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega_k \setminus \bar{D}; \partial D_1 \cup \partial\Omega_k), \quad (7)$$

где $H_0^1(\Omega_k \setminus \bar{D}; \partial D_1 \cup \partial\Omega_k)$ подпространство функций из $H^1(\Omega_k \setminus \bar{D})$, имеющих нулевой след на границах $\partial\Omega_k$, ∂D_1 .

Численное решение задачи (6), (7).

Зададим в области $\Omega_k \setminus \bar{D}$ тетраэдральную сетку, и введём конечномерное подпространство $\tilde{Q}_l \subset H^1(\Omega_k \setminus \bar{D})$ непрерывных кусочно-полиномиальных функций порядка до l .

Приближенное решение задачи (6) – (7) ищем в виде линейной комбинации базисных функций $\tilde{u}^{k+1} = \sum_{i=1}^N x_i^{k+1} \xi_i \in \tilde{Q}_l$, удовлетворяющей системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^N x_i^{k+1} \int_{\Omega_k \setminus \bar{D}} \nabla \xi_i(\mathbf{r}) \cdot \nabla \xi_j(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_{\partial D_2} g(\mathbf{r}) \cdot \xi_j(\mathbf{r}) dD,$$

где $\xi_j \in \tilde{Q}_l = \text{span}\{\xi_i\}$ базисные функции, не имеющие степеней свобод, ассоциированных с граничными элементами сетки на границах $\partial\Omega_k$ и ∂D_1 .
Ошибка решения не превышает $\left\| \tilde{u}^{k+1} - u^{k+1} \right\|_{H^1} \leq C \inf_{\chi \in \tilde{Q}_l} \left\| \chi - u^{k+1} \right\|$.

Если решение обладает достаточной гладкостью, то ошибка будет

$$\left\| \tilde{u}^{k+1} - u^{k+1} \right\|_{H^1} \leq \tilde{C} h^l \left\| u^{k+1} \right\|_{H^{l+1}}.$$

4. Численные эксперименты.

- Пусть на гранях куба с рёбрами равными 0.03, заданы граничные условия в соответствии с точным решением. Будем полагать, что куб, а также и все последующие в рассмотрении симметричные области, ограниченные выбранными поверхностями, имеют центр в начале координат. На первой итерации выберем границу внешней расчётной области в виде поверхности куба с рёбрами, равными 2, на поверхности которого зададим нулевые граничные условия. В области, ограниченной поверхностями этих кубов, решается внутренняя задача Дирихле и находятся значения функции и её нормальной производной на сфере радиуса 0.25. По этим значениям определяются новые граничные условия на поверхности куба с меньшими рёбрами, равными 0.54, по формуле (3), если используются значения функции на сфере, и по формуле (4), если используются значения её нормальной производной. Далее снова решается задача Дирихле в новой расчётной области, и определяются новые приближённые значения функции и её производной на сфере. На всех итерациях, начиная со второй, расчётная область, расположенная между поверхностями кубов с рёбрами 0.03 и 0.54, а также и поверхность сферы, на которой ищется приближённое решение, остаются неизменными.

Решение задачи Дирихле производилось на грубой сетке, состоящей из 15.7 тысяч тетраэдров, и на подробной сетки из 900 тысяч тетраэдров. Для генерации сетки использовался пакет NETGEN. Сетки были близки к равномерным, и сгущение в окрестности сферы не производилось. В тестовых расчётах искомая функция в сферических координатах была выбрана в виде

$$u(r, \theta, \varphi) = \frac{\sin \theta \cos \varphi}{r^2}.$$

4.1 Численное решение задачи Дирихле.

Обозначим за ε_a^m и δ_a^m среднеквадратичную и максимальную погрешность

$$\varepsilon_a^m = \sqrt{\sum_{i,j} \left(u_a(\theta_j, \varphi_i) - \tilde{u}_a^m(\theta_j, \varphi_i) \right)^2 / \sum_{i,j} u_a^2(\theta_j, \varphi_i)},$$

$$\delta_a^m = \max_{i,j} \left| u_a(\theta_j, \varphi_i) - \tilde{u}_a^m(\theta_j, \varphi_i) \right| / \max_{i,j} \left| u_a(\theta_j, \varphi_i) \right|,$$

где $u_a(\theta_j, \varphi_i)$ и $\tilde{u}_a^m(\theta_j, \varphi_i)$ точные и приближённые значения искомой функции и её нормальной производной в узлах сетки. Значения индексов:

$a = 1, 2$, где $a = 1$ для погрешности функции на поверхности сферы,
 $a = 2$ для погрешности функции на внешней поверхности,

$m = 0, 1$, где $m = 0$ при вычислениях на грубой сетке,
 $m = 1$ при вычислениях на подробной сетке.

№ Итер.	ε_1^0	ε_1^1	ε_2^0	ε_2^1
1	0.01032	0.01032	0.01034	0.01034
2	0.00622	0.00568	0.00644	0.00588
3	0.00429	0.00342	0.00448	0.00359
4	0.00324	0.00218	0.00338	0.00230
5	0.00264	0.00147	0.00275	0.00155
6	0.00229	0.00105	0.00238	0.00111
7	0.00209	0.00081	0.00216	0.00085
8	0.00197	0.00066	0.00203	0.00069

Табл. 1 Зависимость среднеквадратичных погрешностей решения задачи Дирихле от числа итераций.

№ Итер.	δ_1^0	δ_1^1	δ_2^0	δ_2^1
1	0.01115	0.01115	0.01058	0.01057
2	0.00909	0.00808	0.00836	0.00753
3	0.00719	0.00563	0.00639	0.00508
4	0.00574	0.00383	0.00500	0.00340
5	0.00478	0.00266	0.00412	0.00234
6	0.00419	0.00194	0.00357	0.00169
7	0.00383	0.00149	0.00324	0.00129
8	0.00362	0.00122	0.00304	0.00105

Табл. 2 Зависимость максимальных погрешностей решения задачи Дирихле от числа итераций.

4.2 Численное решение задачи Неймана.

На поверхности меньшего куба ∂D заданы значения нормальной производной. Результаты расчётов представлены в таблицах 3 и 4.

№ Итер.	ε_1^0	ε_1^1	ε_2^0	ε_2^1
1	0.01059	0.01059	0.01060	0.01060
2	0.00644	0.00582	0.00666	0.00603
3	0.00448	0.00350	0.00467	0.00367
4	0.00342	0.00222	0.00357	0.00234
5	0.00282	0.00149	0.00294	0.00157
6	0.00248	0.00107	0.00257	0.00112
7	0.00228	0.00082	0.00236	0.00086
8	0.00216	0.00067	0.00224	0.00070

Табл. 3 Зависимость среднеквадратичных погрешностей решения задачи Неймана от числа итераций.

№ Итер.	δ_1^0	δ_1^1	δ_2^0	δ_2^1
1	0.01134	0.01134	0.01076	0.01076
2	0.00925	0.00820	0.00854	0.00767
3	0.00736	0.00571	0.00660	0.00518
4	0.00594	0.00389	0.00525	0.00347
5	0.00501	0.00271	0.00440	0.00240
6	0.00444	0.00197	0.00389	0.00174
7	0.00411	0.00153	0.00358	0.00134
8	0.00391	0.00126	0.00340	0.00111

Табл. 4 Зависимость максимальных погрешностей решения задачи Неймана от числа итераций.

- Анализ данных, приведённых в таблицах 1-4, позволяет сделать вывод, что полученные погрешности уменьшаются при переходе от редкой к густой сетке от 3-х до 4-х раз, что соответствует уменьшению линейных размеров тетраэдров при таком переходе: $\sqrt[3]{830/15.7} \approx 3.8$. Для выявления вклада возможных погрешностей в результирующую ошибку численного алгоритма, были посчитаны значения функции на сфере, когда на внешней поверхности были заданы точные граничные условия. Погрешность полученных значений оказалась такого же порядка, как и результирующая погрешность метода после 8 итераций. Отсюда можно сделать вывод, что результирующая погрешность метода обусловлена, прежде всего, точностью решения внутренней краевой задачи и будет уменьшаться при сгущении сетки.

- Если решение внутренней краевой задачи допускает вычисление нормальной производной на поверхности сферы, то можно воспользоваться формулой (4) для вычисления значений функции на внешней поверхности. Численные эксперименты, основанные на таком способе решения внешней краевой задачи, были также проведены и успешно использованы для верификации вычисленных значений функции. Причина, по которой результаты таких численных экспериментов не приведены в данном докладе, заключается в том, что для такого итерационного процесса затруднительно получить оценку сходимости метода.
- В заключение авторы выражают признательность Петухову А.В. за помощь при проведении численных экспериментов.

Спасибо за внимание!