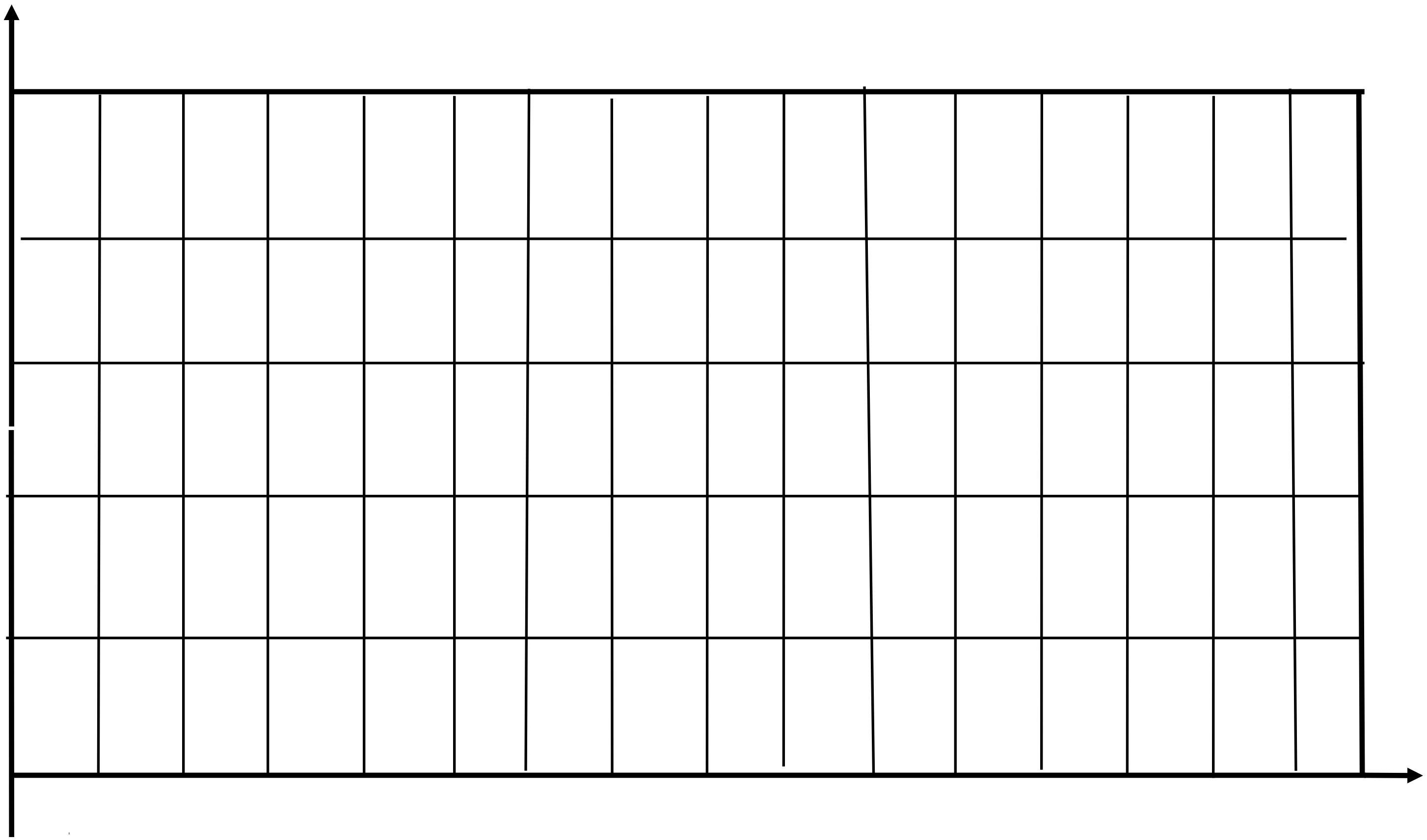
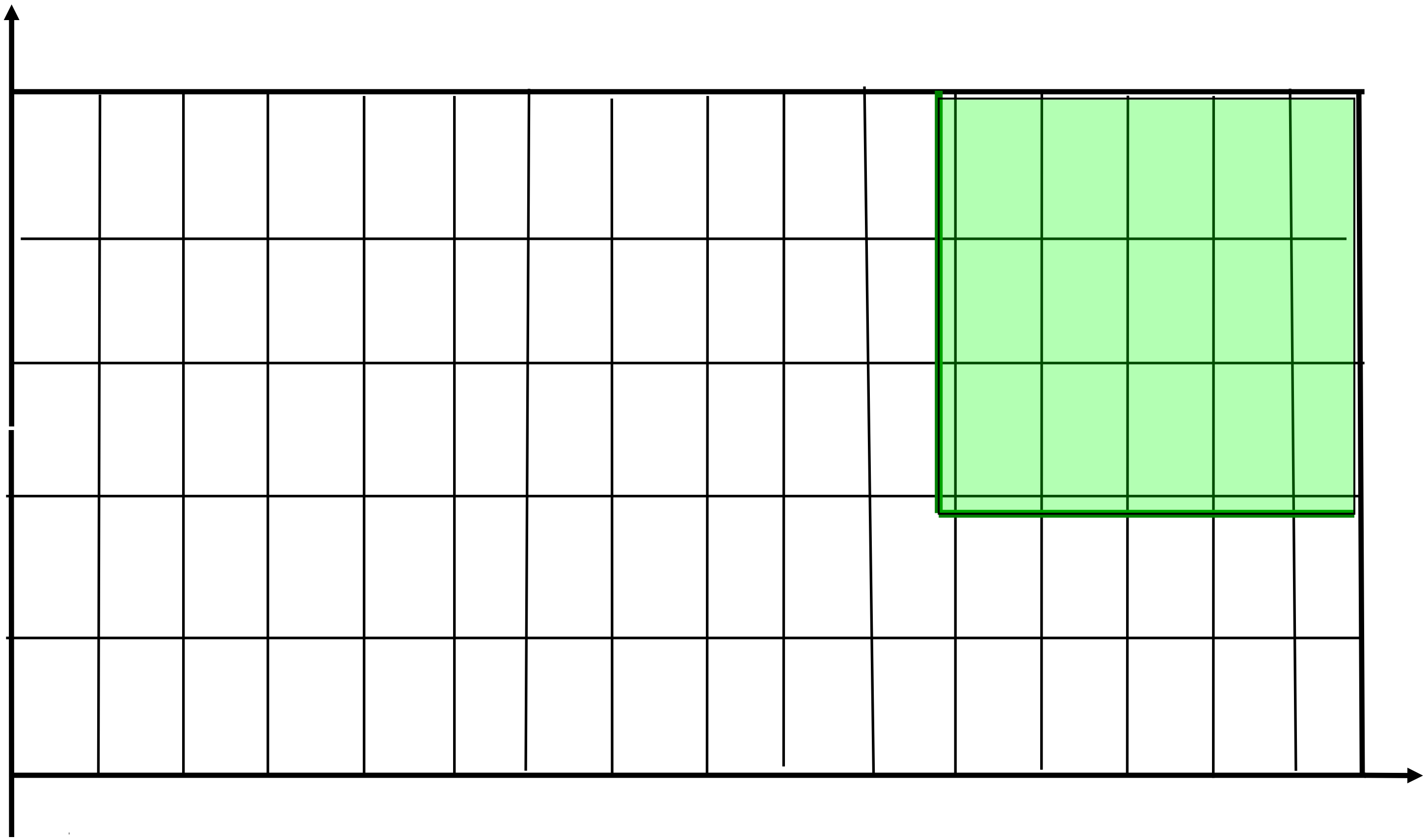
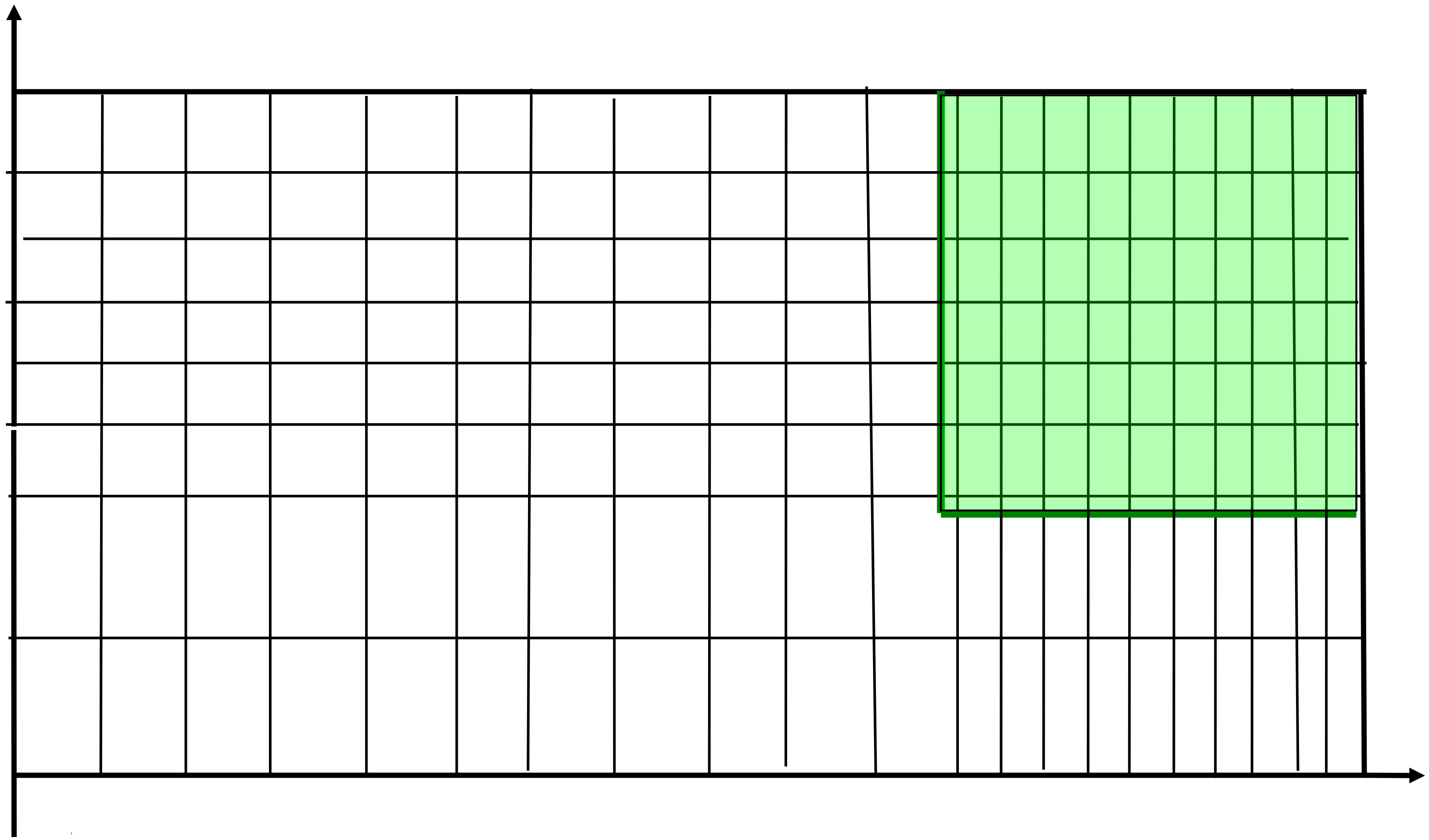
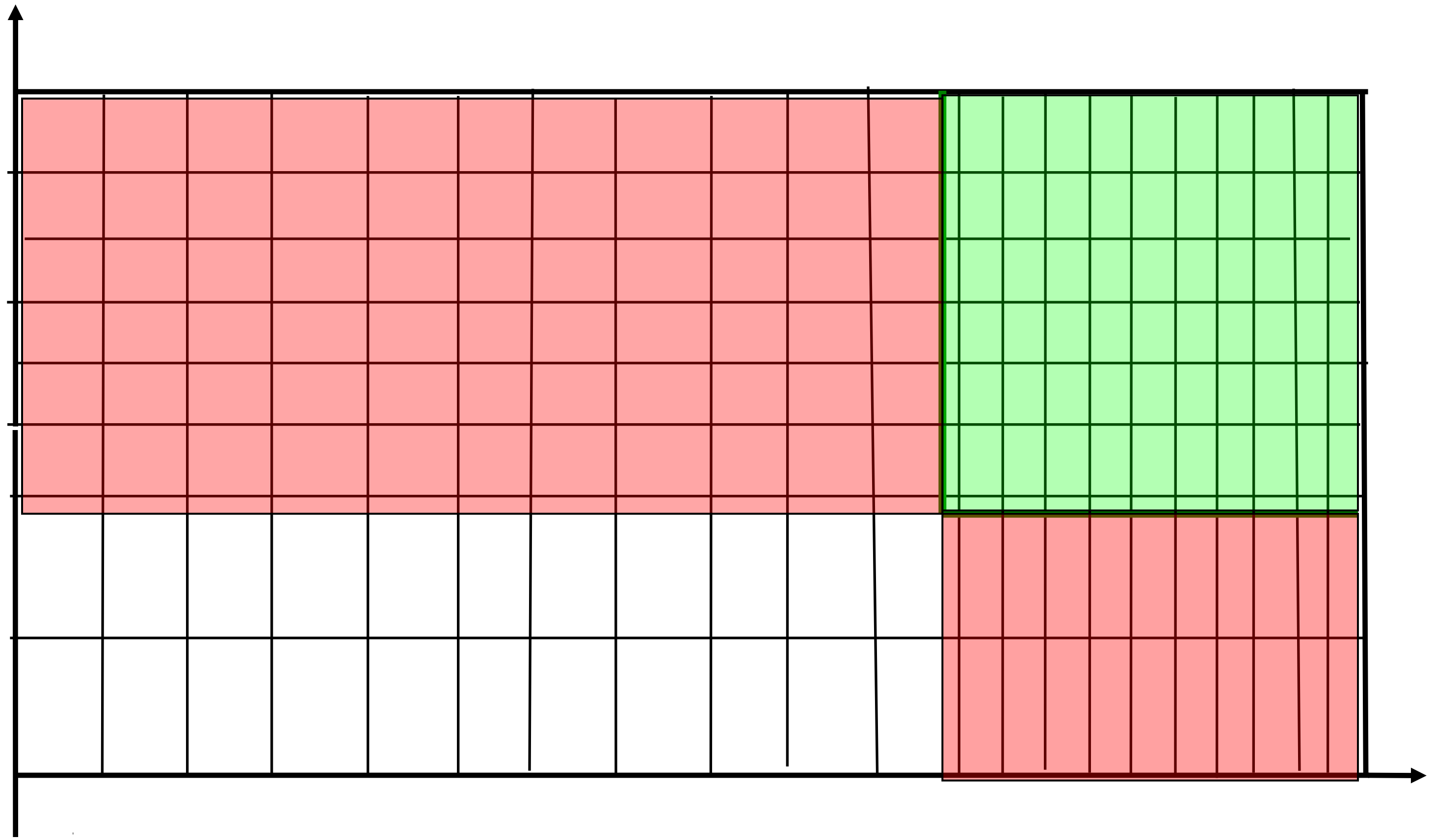
ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛОГ СОПРЯЖЕННО-ОПЕРАТОРНОЙ МОДЕЛИ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА НЕСОГЛАСОВАННЫХ СЕТКАХ

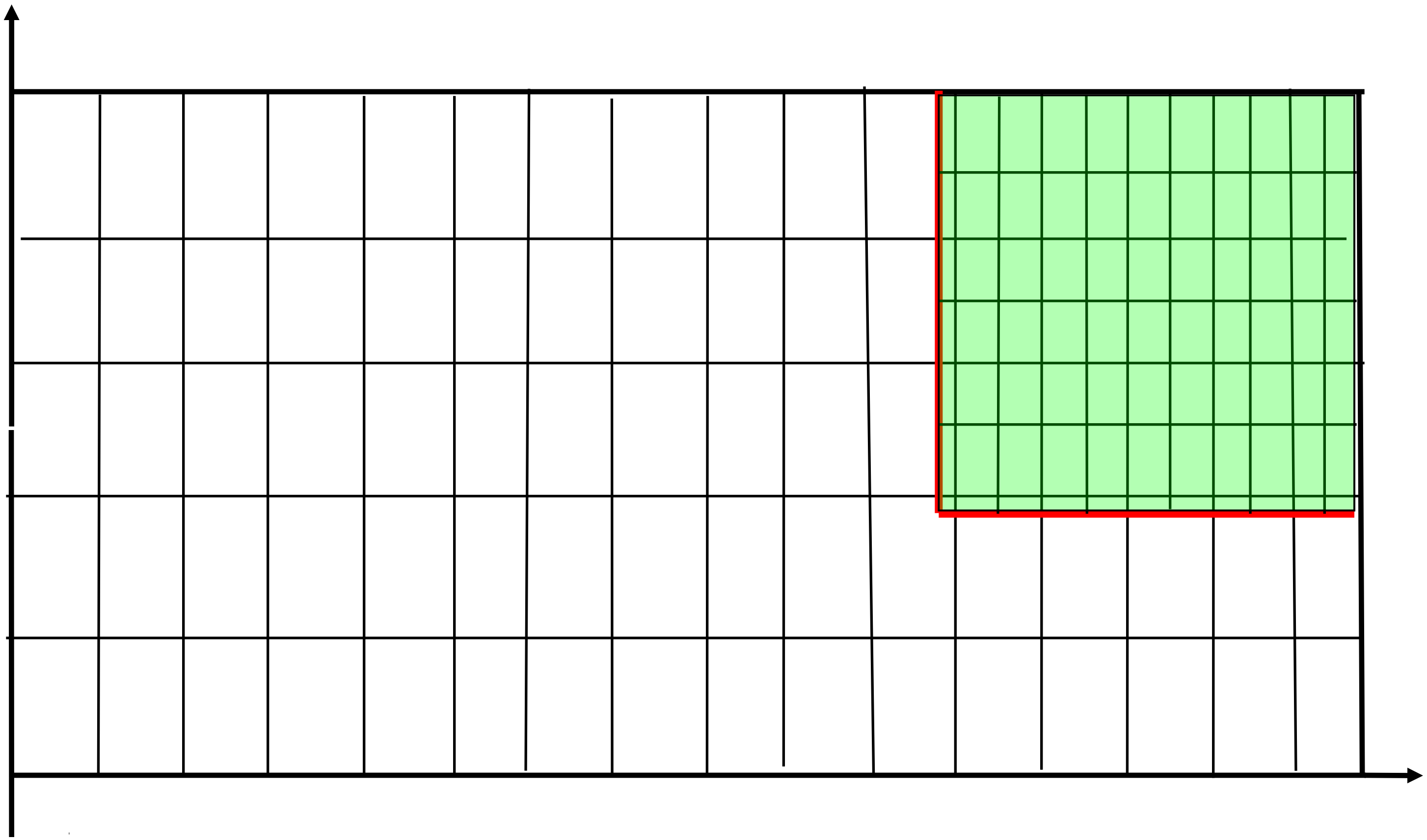
- *Сорокин С.Б.*
- *ИВМиМГ (Новосибирск)*
- *НГУ (Новосибирск)*











ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

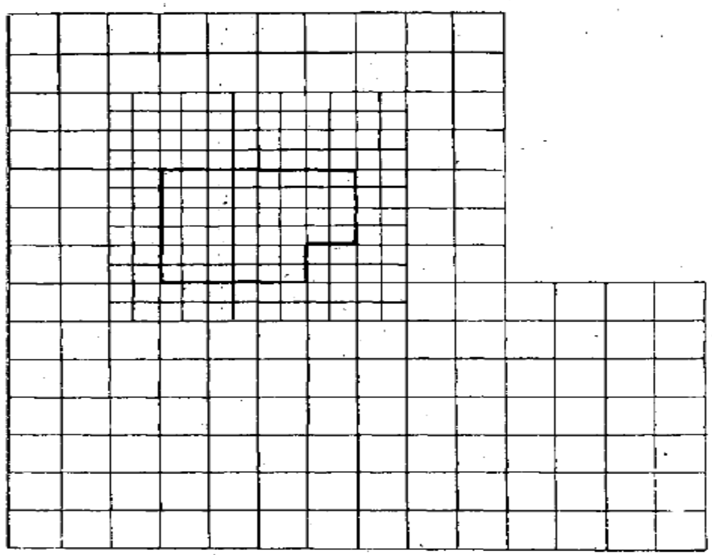
Том 29, 1989 №

УДК 519.63

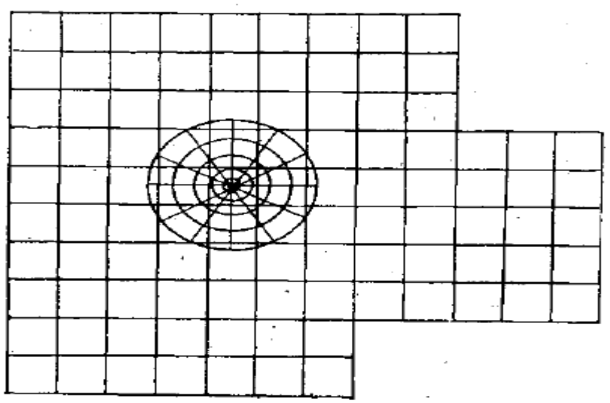
АДАПТИВНЫЕ СЕТКИ СОСТАВНОГО ТИПА В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ [1]

ВАБИЩЕВИЧ П. Н.

(Москва)



Фиг. 4



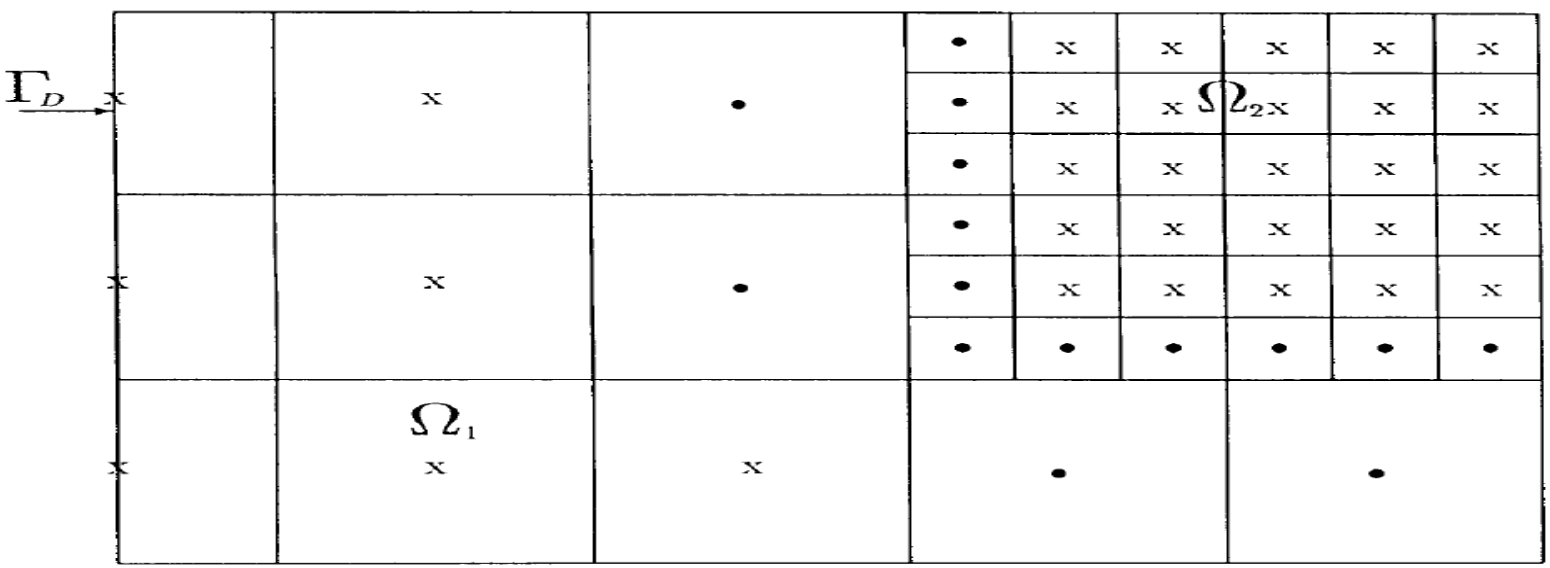
Фиг. 5

MATHEMATICS OF COMPUTATION
VOLUME 56, NUMBER 194
APRIL 1991, PAGES 437–461

LOCAL REFINEMENT TECHNIQUES FOR ELLIPTIC PROBLEMS ON CELL-CENTERED GRIDS I. ERROR ANALYSIS

R. E. EWING, R. D. LAZAROV, AND P. S. VASSILEVSKI

ABSTRACT. A finite difference technique on rectangular cell-centered grids with local refinement is proposed in order to derive discretizations of second-order elliptic equations of divergence type approximating the so-called balance equation. Error estimates in a discrete H^1-norm are derived of order $h^{1/2}$ for a simple symmetric scheme, and of order $h^{3/2}$ for both a nonsymmetric and a more accurate symmetric one, provided that the solution belongs to $H^{1+\alpha}$ for $\alpha > \frac{1}{2}$ and $\alpha > \frac{3}{2}$, respectively.



x – regular grid points, • – irregular grid points

FIGURE 2.2

A Supra-Convergent Finite Difference Scheme for the Poisson and Heat Equations on Irregular Domains and Non-Graded Adaptive Grids

Han Chen * Chohong Min † Frédéric Gibou ‡

21st March 2006

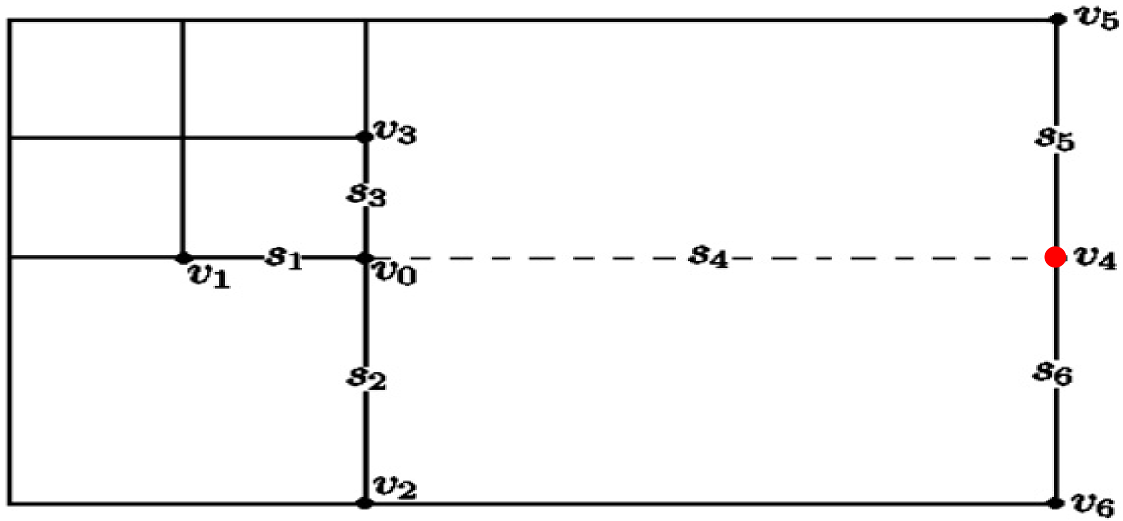


Figure 3: A configuration illustrating the nodes involved in the discretization at a T-junction node v_0.

The discretizations for $(\rho u_x)_x$ and $(\rho u_y)_y$ at node v_0, along with their Taylor analysis, are given by

$$\left(\frac{u_1-u_0}{s_1}\cdot\frac{\rho_1+\rho_0}{2}+\frac{s_6D_5+s_5D_6}{s_5+s_6}\right)\cdot\frac{2}{s_1+s_4}=(\rho u_x)_x+\frac{s_5s_6}{(s_1+s_4)s_4}(\rho u_y)_y+O(h), \qquad (5)$$

and

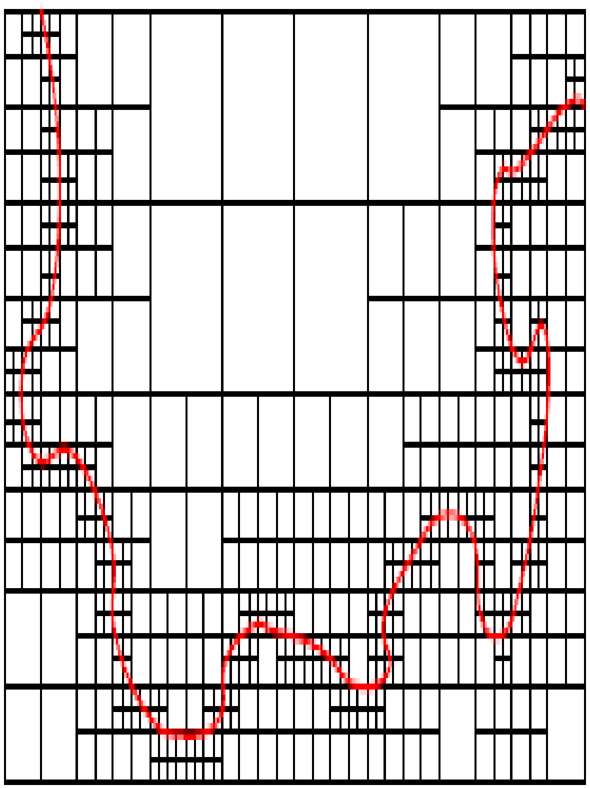
$$\left(\frac{u_2-u_0}{s_2}\cdot\frac{\rho_2+\rho_0}{2}+\frac{u_3-u_0}{s_3}\cdot\frac{\rho_3+\rho_0}{2}\right)\cdot\frac{2}{s_2+s_3}=(\rho u_y)_y+O(h), \qquad (6)$$

respectively, where

$$\begin{aligned} D_5 &= \tfrac{u_5-u_0}{s_4}\cdot\tfrac{\rho_5+\rho_0}{2}, \\ D_6 &= \tfrac{u_6-u_0}{s_4}\cdot\tfrac{\rho_6+\rho_0}{2}. \end{aligned}$$

- **Василевский Ю.В.**
- **Никитин К.Д.** (Диссертация 2010)
- **Данилов А.А.**

Василевский Ю.В. Методы решения краевых задач с использованием нестыкующихся сеток, Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: УНИПРЕСС, 1999. – Т 2. – С. 94–121.



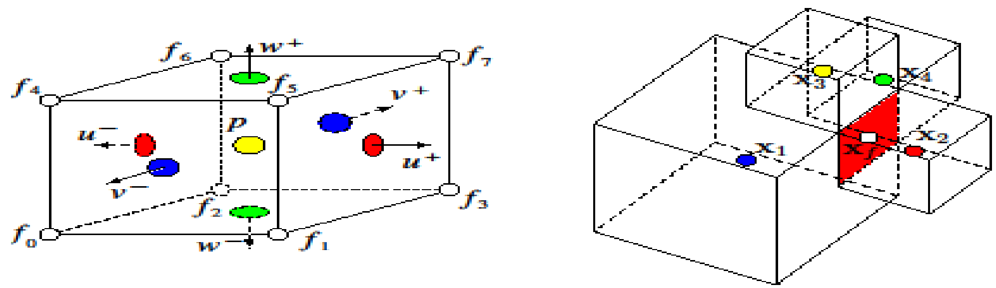


Рис. 3.2. Слева: Расположение степеней свободы на разнесенной сетке; p - давление, $\{u^\pm, v^\pm, w^\pm\}$ - компоненты скорости, f - скалярная функция, например, функция уровня. Справа: шаблон дискретизации $p_x(\mathbf{x}_f)$.

Во втором случае размеры ячеек, разделяющих грань, различные. Для простоты рассмотрим дискретизацию x-компонента оператора градиента в центре грани $\mathbf{x}_f$, как показано на рис. 3.2. Для этого рассмотрим центры четырех соседних ячеек $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_4$ и запишем формулу Тейлора для давления $p(\mathbf{x}_f)$ через значения $p(\mathbf{x}_i)$:

$$p(\mathbf{x}_i) = p(\mathbf{x}_f) + \nabla p(\mathbf{x}_f) \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_f) + O(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_f|^2).$$

Пренебрегая членами второго порядка, мы получим систему из 4 линейных уравнений с 4 неизвестными.

Решая ее методом Крамера получаем следующий шаблон для x-компонента оператора градиента:

$$p_x(\mathbf{x}_f) \approx \frac{D_{f,1}}{D_f} p_1 + \frac{D_{f,2}}{D_f} p_2 + \frac{D_{f,3}}{D_f} p_3 + \frac{D_{f,4}}{D_f} p_4, \qquad (3.13)$$

где D_f - определитель матрицы системы 4×4, а $D_{f,i}$ - определители соответствующих миноров 3×3.

83

Computational Geosciences (2004) 8:301–324
DOI 10.1007/s10596-004-3771-1

2003 Report

The mimetic finite difference method on polygonal meshes for diffusion-type problems *

Y. Kuznetsov [a], K. Lipnikov [b,**] and M. Shashkov [b]

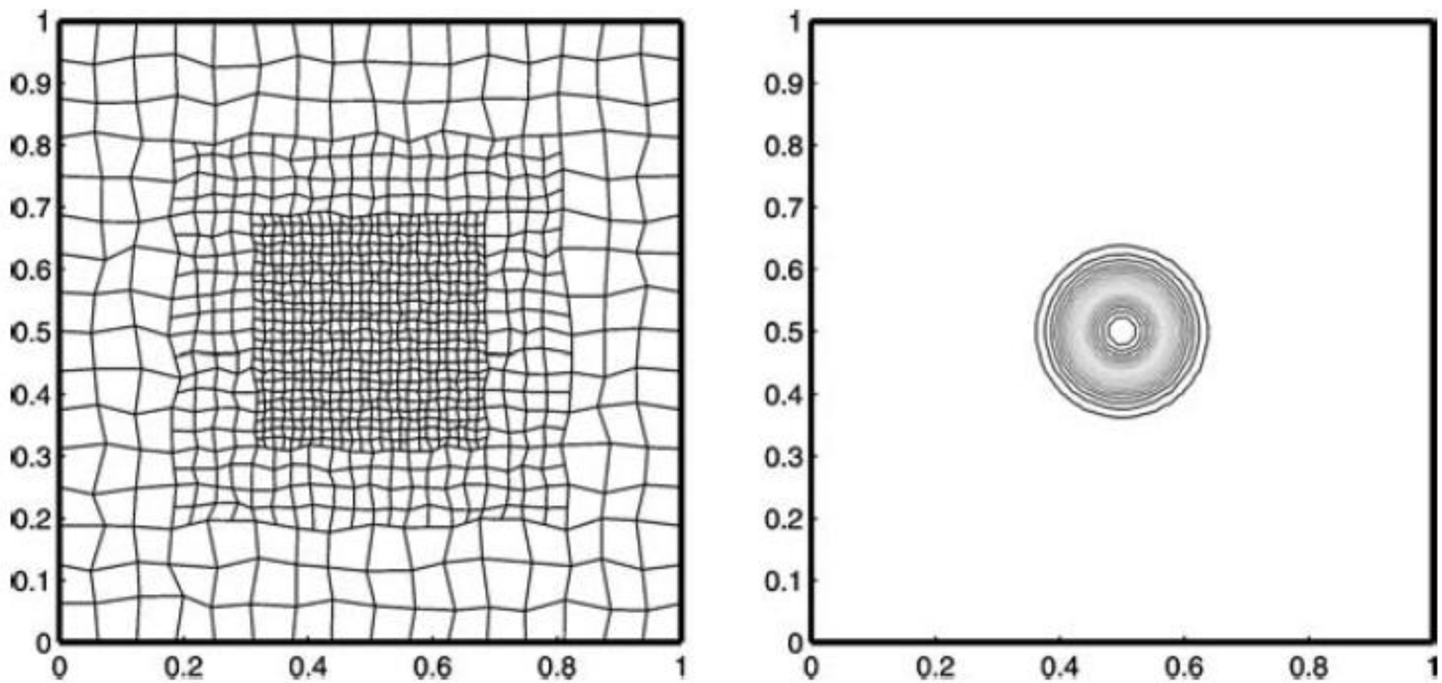


Figure 9. The computational mesh on level $l = 2$ and isolines of the discrete solution.

Let us consider a model elliptic boundary value problem that in porous medium applications models single phase Darcy flow:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F} &= b, \\ \mathbf{F} &= -\mathbf{K} \operatorname{grad} p. \end{aligned} \tag{1}$$

Let us introduce operators $\mathcal{G}$ and $\mathcal{D}$ for a polygon e by

$$\mathcal{G}\, p = -\mathbf{K} \operatorname{grad} p, \qquad \mathcal{D}\mathbf{F} = \begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{F} & \text{on } e, \\ -\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} & \text{on } \partial e, \end{cases}$$

$$(\mathbf{F}, \mathcal{G}\, p)_{X,e} = (p,\ \mathcal{D}\mathbf{F})_{Q,e}.$$

The last expression clearly states that the flux and extended divergence operators are adjoint to each other, i.e.

$$\mathcal{G} = \mathcal{D}^*.$$

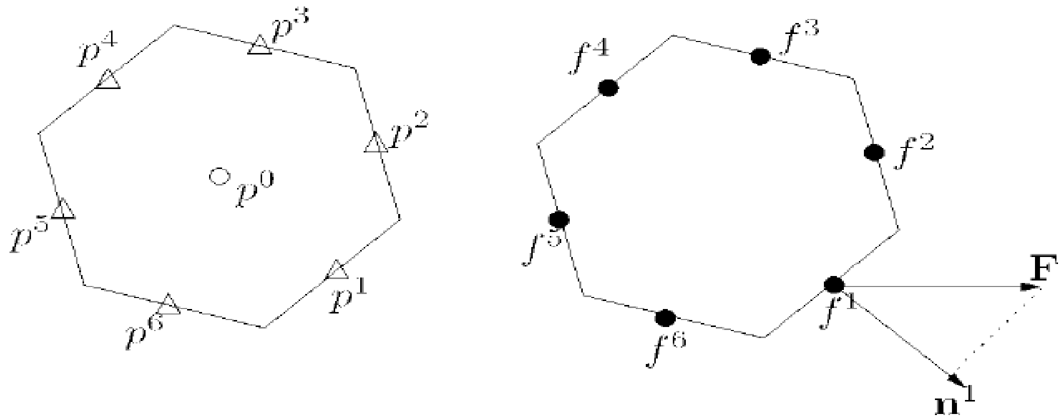


Figure 1. Location of pressure and velocity unknowns for a hexagon.

$$\mathcal{DIV}^h \vec{f} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{V_e} \sum f^k \ell^k .$$

The *fourth* step of the MFD method is to define the discrete flux operator $\mathcal{G}^h$, as the adjoint to the discrete extended divergence operator $\mathcal{D}^h$ with respect to scalar products (4) and (5), i.e.

$$[\vec{f}, \mathcal{G}^h \vec{p}]_{X^d,e} = [\vec{p}, \mathcal{D}^h \vec{f}\,]_{Q^d,e} \quad \forall \vec{p} \in Q^d, \;\; \vec{f} \in X^d . \tag{7}$$

Using the discrete flux and divergence operators the continuous problem (1) is discretized as follows:

$$\begin{aligned} \mathcal{DIV}^h \vec{f} &= b_e, \\ \vec{f} &= \mathcal{G}^h \vec{p}, \end{aligned} \tag{9}$$

Kuznetsov, Yu. Efficient iterative solvers for elliptic problems on nonmatching grids. Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling. – 1995. – Vol. 10, No 3. – P. 187–211.

Лебедев В.И. Разностные аналоги ортогональных разложений основных дифференциальных операторов и некоторых краевых задач математической физики. I.- Журнал вычислительной математики и математической физики, 1964, т. 4, № 3, стр. 449-465.

- Лебедев В.И. Разностные аналоги ортогональных разложений основных дифференциальных операторов и некоторых краевых задач математической физики. II.- Журнал вычислительной математики и математической физики, 1964, т. 4, № 4, стр. 649-659.

- Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. О представлении разностных схем математической физики в операторной форме. Доклады АН СССР, 1981, т. 258, № 5, стр. 1092 -1096.
- Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. Операторные разностные схемы. Препринт № 9. - Москва, 1981. - 32 стр. - В надзаг.: ИПМ АН СССР.
- Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. Операторные разностные схемы. Дифференциальные уравнения. 1981, т. 17, № 7. стр. 1317-1327.
- Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. Использование метода опорных операторов для построения разностных аналогов операций тензорного анализа. Препринт № 97. - Москва, 1981. - 16 стр. - В надзаг.: ИПМ АН СССР.
- Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. Использование метода опорных операторов для построения разностных аналогов операций тензорного анализа. Дифференциальные уравнения. 1982, т. 18, № 7. стр. 1251-1256.
- Самарский А.А., Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П. Разностные схемы на нерегулярных сетках. Минск, 1996.

- Коновалов А.Н., Сорокин С.Б. Структура уравнений теории упругости. Статика. Новосибирск. Препринт ВЦ СО АН СССР, 1986. № 665, 26 стр.
- Коновалов А.Н., Сорокин С.Б. О разностных аппроксимациях уравнений теории упругости. - В сб. "Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики": Тезисы докладов Всесоюзной конференции, Новосибирск, 1987, стр. 103-104.
- Коновалов А.Н. Сопряженно – факторизованные модели в задачах математической физики. Препринт ВЦ СО РАН, № 1095, Новосибирск, 1997, 60 стр.
- Sorokin S.B. Application of operator structure in numerical solution of elliptic problems. Siberian Journal of Computer Mathematics, v. 1, № 3, 1992, pp. 259-274, Nova Seience Publishers, Inc.
- Сорокин С.Б. Метод поэтапного обращения для численного решения бигармонического уравнения. Сибирский математический журнал, Институт математики СО РАН, Новосибирск, 1995. т. 36., № 3. стр. 659--663.
- Sorokin S.B. Step-by-step inversion method for elasticity problems. Сибирский журнал вычислительной математики РАН СО, т.1, №1, Новосибирск, 1998 , стр. 89-97.

J. Hyman, M. Shashkov. The Approxoimation of Boundary Cjnditions for Mimetic Finite Difference Methods. Los Alamos National Laboratory, T-7, MS-B284, Los Alamos NM 87545, November &, 1997.

- J. Hyman, M. Shashkov. Mimetic Discretizations for Maxwell's Equations. *Journal of Computational Physics* 151, 881909,(1999).
- M. Berndt, K. Lipnikov, J.D. Moulton, end M. Shashkov. Convergens of mimetic finite difference discretizations of diffusion equation. *East-West J. Numer. Math.,* 9: 253-284,2001.
- J. Hyman, J. Morel, M. Shashkov, and S. Steinberg. Mimetic finite difference methods for diffusion equation. *Comp. Geosciences,* 6(3-4): 333-352, 2002.
- F. Brezzi, K. Lipnikov, M. Shashkov. Convergens of Mimetic Finite Difference Method for Diffusion Problems on Polyhedral Meshes. August, 2004.
- K. Lipnikov, M. Shashkov, D. Svyatskiy. The mimetic finite difference discretization of diffusion problems on unstructured polyhedral meshes. Journal of Computational Physics 211, (2006), 473-491.
- M. Berndt, K. Lipnikov, M. Shashkov, M.F. Weeler, I. Yotov. A mortar mimetic finite difference method on non-matching grids. Numer. Math. (2005).
- И т.д.

- *Математические модели для классических стационарных задач механики сплошной среды обладают сопряжено-операторной структурой.*

Математические модели физического явления основаны на:

- *законе (законах) сохранения,*
- *уравнении состояния,*
- *определяющих соотношениях.*
- Как правило, оператор в определяющих соотношениях *R* сопряжен по Лагранжу оператору *R** в законе сохранения.
- Трактуя математическую модель как операторные уравнения в гильбертовых пространствах, имеем:

$$R^*w = f, \quad w = Kq, \quad q = Ru,$$

$$u \in U(R) \subset H, w \in U(R^*) \subset H^*.$$

Математическая модель задачи теплопроводности:

- Искомые переменные:

$$\mathbf{w} = (w_1, w_2)^T - \textit{плотность теплового потока (вектор = тензор ранга 1)},$$

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2)^T - \textit{тепловой поток (вектор = тензор ранга 1)},$$

$$u - \textit{температура (скаляр)}$$

- В области Ω выполняются уравнения

$$R^*\mathbf{w} = div\ \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & , & \dfrac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = f, \quad \mathbf{q} = Ru = -grad\ u = -\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} u.$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{Kq} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \mathbf{q},$$

- Граничные условия $\quad u\,|_{\partial\Omega} = 0$

$$\int_D (u\ \mathrm{div}\,\mathbf{w})dV = \int_D (\text{-grad}\,u \cdot \mathbf{w})dV + \int_S \overset{\overset{\text{O}}{||}}{u}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})dS$$

- Итак для задачи теплопроводности, имеем:

$$R^{*}\mathbf{w} = f, \quad \mathbf{w} = \mathbf{K}\mathbf{q}, \quad \mathbf{q} = Ru,$$

$$u \in U(R) \subset H, \mathbf{w} \in U(R^{*}) \subset H^{*}.$$

- Здесь $H = L_2(\Omega)$ и $H^{*} = L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$ гильбертовы пространства со скалярными произведениями

-

$$(u,v)_H = \int_{\Omega} u\,v\,d\Omega \quad \forall u,v \in H$$

$$(\mathbf{w},\mathbf{g})_{H^{*}} = \int_{\Omega} (w_1 g_1 + w_2 g_2)\,d\Omega \quad \forall \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \in H^{*}$$

- Интегральное тождество с предыдущей страницы, означающее сопряженность по Лагранжу операторов

$R = -grad$ ■ и $R^{*} = div$

- записывается в форме

$$(Ru,\mathbf{w})_{H^{*}} = (u, R^{*}\mathbf{w})_H$$

Статическая задача теории упругости

$$\mathbf{w}=\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{12})^T - \text{"}\textit{тензор}\text{"}\, \textit{напряжений}\ \ (\textit{ранга}\,2),$$

$$\mathbf{q}=\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_{11},\varepsilon_{22},2\varepsilon_{12})^T - \text{"}\textit{тензор}\text{"}\, \textit{деформаций}\ \ (\textit{ранга}\,2),$$

$$\mathbf{u}=(u_1,u_2)^T - \textit{вектор перемещений}\ \ (\textit{тензор ранга}\,1),$$

$$R^*\boldsymbol{\sigma}=-\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}=-\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x_1} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial x_2}\\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{bmatrix}=\mathbf{f},\qquad \boldsymbol{\varepsilon}=R\mathbf{u}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x_1} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial x_2}\\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_1}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\lambda+2\mu & \lambda & 0\\ \lambda & \lambda+2\mu & 0\\ 0 & 0 & \mu\end{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon},\quad \textit{закон Гука.}$$

$$\int_D \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{L}\,dV=\int_D \text{-}\mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{u}\,dV+\int_S \underset{}{\overset{\overset{\mathrm{O}}{||}}{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}}}\cdot\mathbf{u}\,dS.\ \left(L^i_j\right)=\frac{1}{2}(\nabla_j u^i+\nabla_i u^j).$$

Общая схема построения дискретного аналога сопряженно-операторной модели

- 1. Выбираем за опорный оператор *R.*
- 2. Строим какую-либо его аппроксимацию R_h .
- 3. За аппроксимацию оператора R^* берем сопряженный к R_h: $R^*_h = (R_h)^*$

$$R_h : H_h \to H_h^*, \quad R_h^* : H_h^* \to H_h,$$

$$(R_h u^h, \mathbf{w}^h)_{H_h^*} = (u^h, R_h^* \mathbf{w}^h)_{H_h}.$$

- Здесь H_h и H_h^* конечномерные гильбертовы пространства сеточных функций и вектор функций.

- В результате, *независимо* от выбора R_h, *однозначно* определяется R^*_h

- Если ввести
- e_i - ортогональный базис в H_h (в скалярном произведении $(\cdot,\cdot)_{H_h}$),
- то действие оператора R^*_h на любую сеточную функцию из H_h^* *однозначно* определяется по формуле

$$R_h^* \mathbf{w}^h = \sum_{j=1}^{N} \frac{(R_h^* \mathbf{w}^h, e_j)_{H_h}}{(e_j, e_j)_{H_h}} e_j = \sum_{j=1}^{N} \frac{(\mathbf{w}^h, R_h e_j)_{H_h^*}}{(e_j, e_j)_{H_h}} e_j .$$

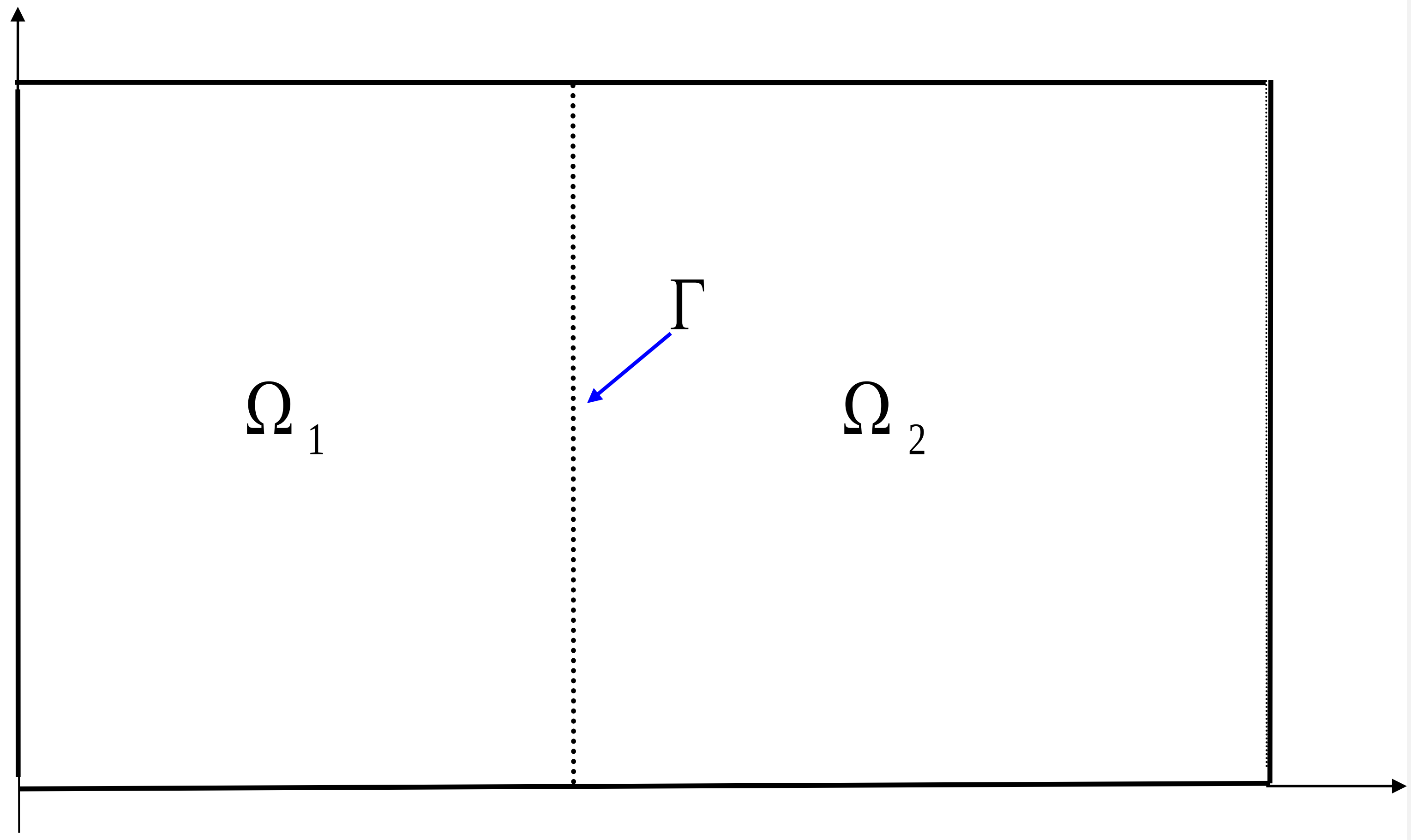
- Другими словами: Как только введен R_h (определено его действие в H_h), так вы сразу знаете как действует R^*_h ,
- и сопряжено-операторная дискретная модель имеет вид:

$$\begin{gathered} R_h^* \mathbf{w}^h = f^h, \mathbf{w}^h = \mathbf{K}_h \mathbf{q}^h, \mathbf{q}^h = R_h u^h, \\ u^h \in H_h, \ \mathbf{w}^h \in H_h^*. \end{gathered} \Rightarrow \begin{gathered} R_h^* \mathbf{K}_h R_h u^h = f^h, \\ u^h \in H_h . \end{gathered}$$

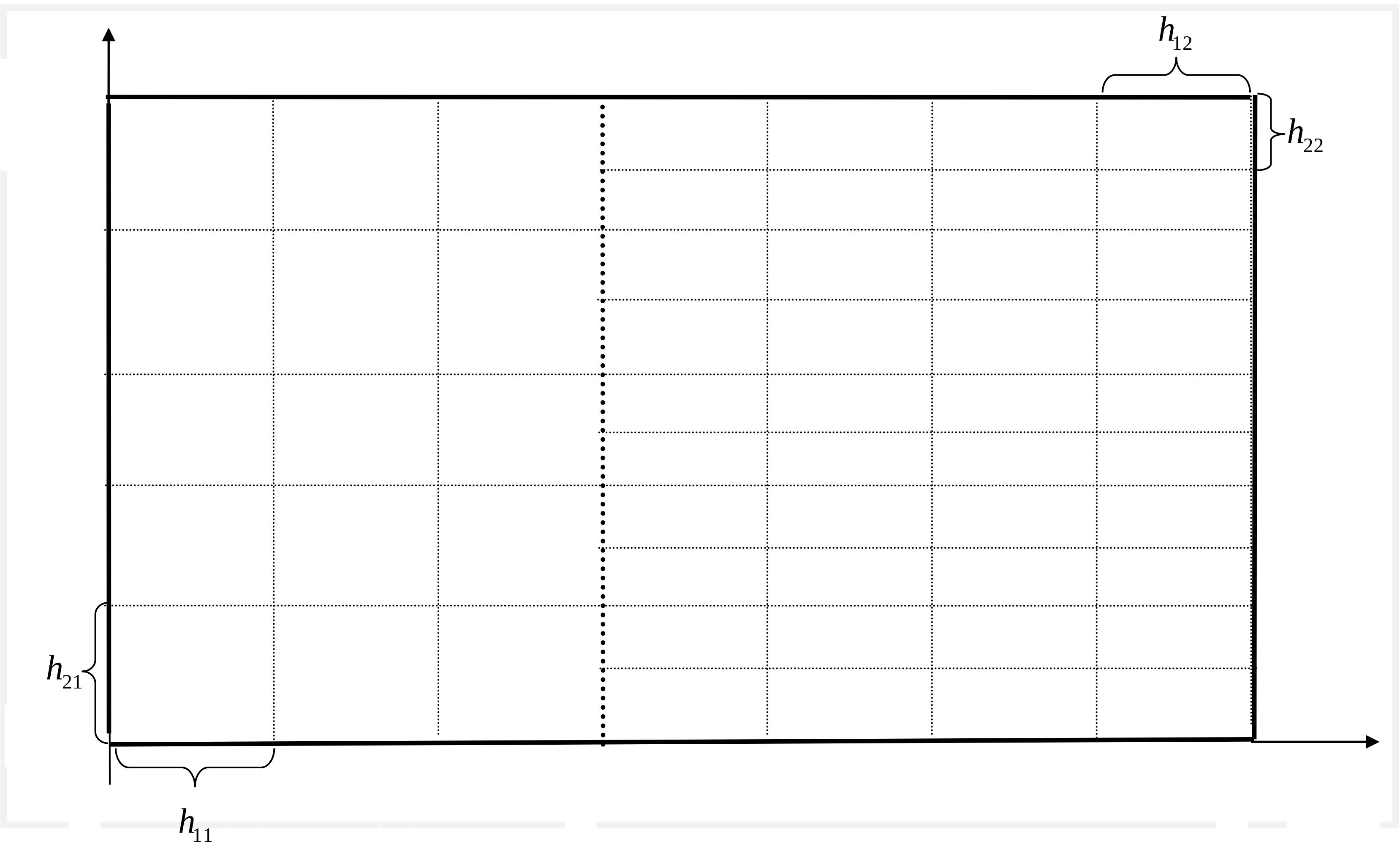
Реализация общей схемы построения дискретного аналога применительно к задаче теплопроводности

- Конкретные этапы построения:
- 1. Построение сетки.
- 2. Выбор точек, где будут определяться приближения к температуре u^h и потокам $\mathbf{q}^h \leftrightarrow \mathbf{w}^h$.
- 3. Выбор конкретной аппроксимации оператора R_h.
- 4. Определение дискретных пространств H_h для u^h и H_h^* для $\mathbf{w}^h$ и скалярных произведений в них.
- 5. Построение аппроксимации оператора R^* как сопряженного к R_h: $R^*_h = (R_h)^*$.
- 6. Построение аппроксимации тензора **K**.
- 7. Окончательная формулировка дискретного аналога.

Область Ω

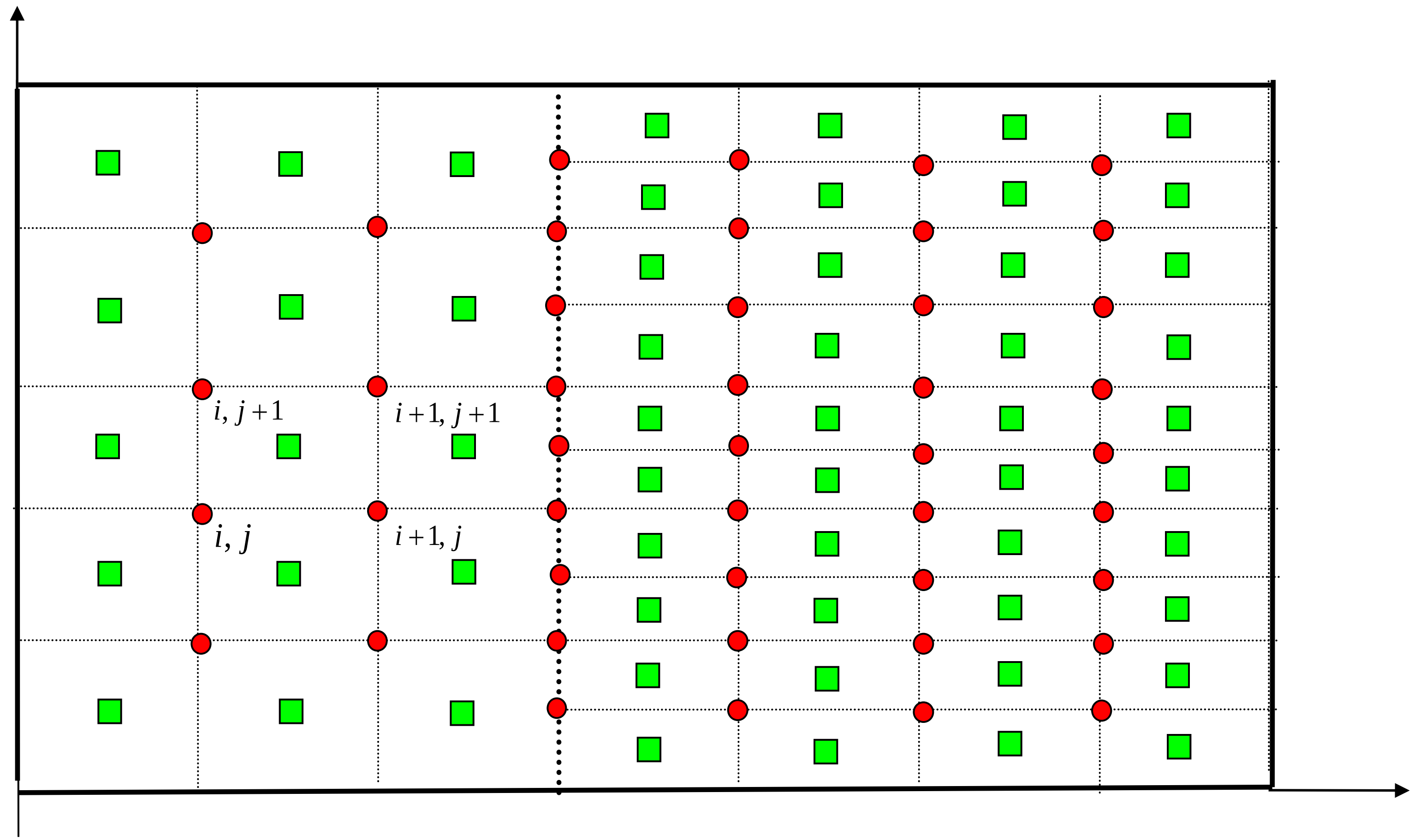


Сетка



- **Сетки для** u^h и $\mathbf{w}^h$: u^h определяется в «целых» точка

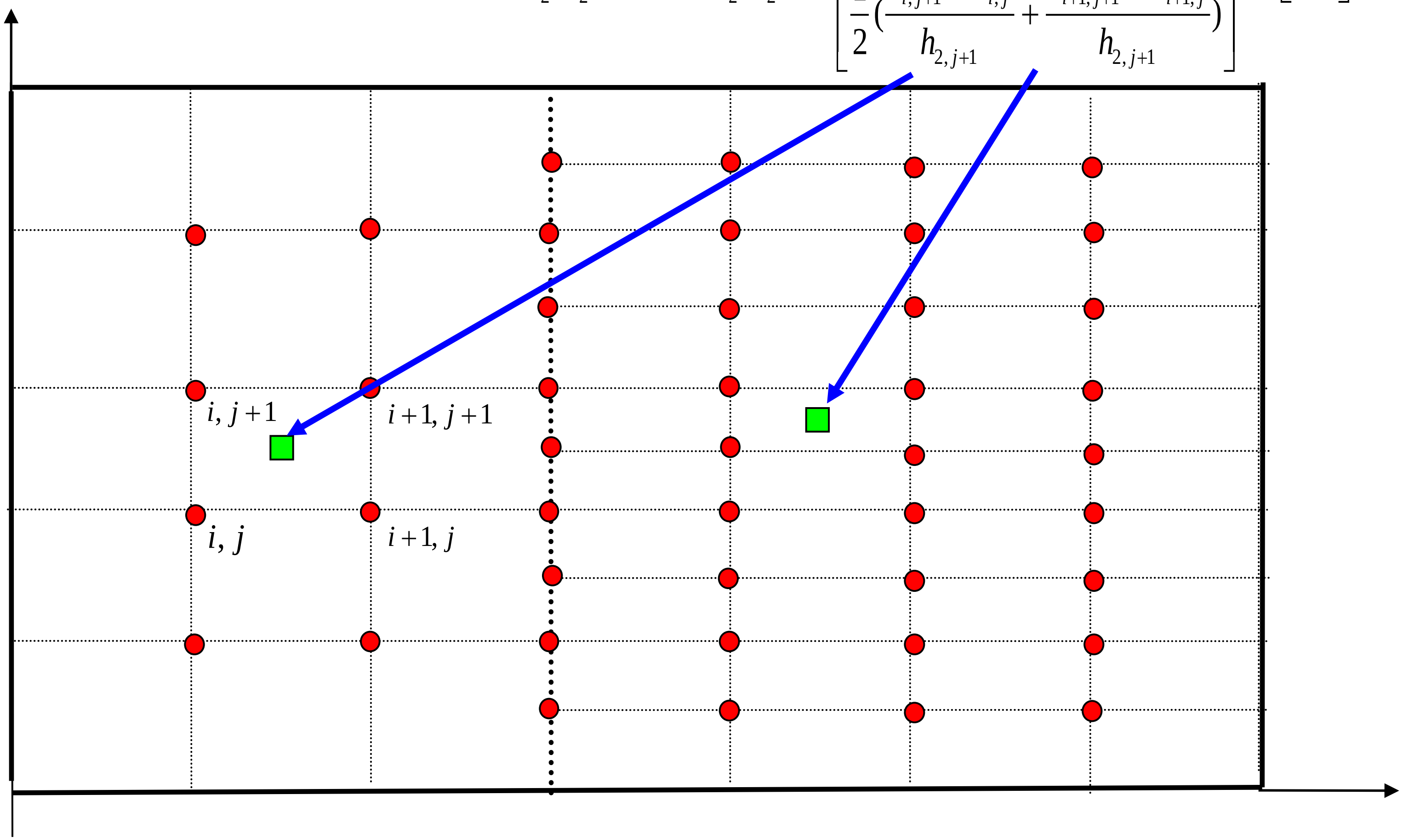
  $\mathbf{w}^h$ определяется в «полуцелых» точка



- ω_i сетка из красных точек в $\Omega_i, i=1,2,$ ω_Γ сетка красных точек в Γ
- $\omega_{i,\frac{1}{2}}$ сетка из зеленых квадратов в $\Omega_i, i=1,2,$

Аппроксимация оператора R_h

$$[\mathbf{q}^h]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = (R_h u^h)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = -\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{u^h_{i+1,j}-u^h_{i,j}}{h_{1,i+1}} + \frac{u^h_{i+1,j+1}-u^h_{i,j+1}}{h_{1,i+1}}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{u^h_{i,j+1}-u^h_{i,j}}{h_{2,j+1}} + \frac{u^h_{i+1,j+1}-u^h_{i+1,j}}{h_{2,j+1}}\right) \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} R_{1h} \\ R_{2h} \end{bmatrix} u^h\right)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$$



- Определение дискретных пространств:
- H_h пространство сеточных функций u^h определенных в «целых» точка и принимающих нулевое значение на границе
- H_h* пространство сеточных функций **w**^{h} определенных в «полуцелых» точка

- Скалярные произведения в H_h и H_h* :

$$(u^h, v^h)_{H_h} = \sum_{(x_{11,i}, x_{21,j}) \in \omega_1} u^h(x_{11,i}, x_{21,j}) v^h(x_{11,i}, x_{21,j}) h_{11} h_{21} +$$

$$+ \sum_{(x_{12,0}, x_{22,j}) \in \omega_\Gamma} u^h(x_{12,0}, x_{22,j}) v^h(x_{12,0}, x_{22,j}) \left(\frac{h_{11}}{2} + \frac{h_{12}}{2}\right) h_{22} + \sum_{(x_{12,i}, x_{22,j}) \in \omega_2} u^h(x_{12,i}, x_{22,j}) v^h(x_{12,i}, x_{22,j}) h_{12} h_{22},$$

$$\forall\, u^h \in H_h,\, v^h \in H_h.$$

$$(\mathbf{w}^h, \boldsymbol{\sigma}^h)_{H_h^*} = \sum_{(x_{11,i+\frac{1}{2}}, x_{21,j+\frac{1}{2}}) \in \omega_{1,\frac{1}{2}}} \sum_{k=1}^{2} w_k^h(x_{11,i+\frac{1}{2}}, x_{21,j+\frac{1}{2}}) \sigma_k^h(x_{11,i+\frac{1}{2}}, x_{21,j+\frac{1}{2}}) h_{11} h_{21} + \sum_{(x_{12,i+\frac{1}{2}}, x_{22,j+\frac{1}{2}}) \in \omega_{2,\frac{1}{2}}} \sum_{k=1}^{2} w_k^h(x_{12,i+\frac{1}{2}}, x_{22,j+\frac{1}{2}}) \sigma_k^h(x_{12,i+\frac{1}{2}}, x_{22,j+\frac{1}{2}}) h_{12} h_{22},$$

$$\forall\, \mathbf{w}^h \in H_h^*, \quad \boldsymbol{\sigma}^h \in H_h^*.$$

- **В качестве базиса в** H_h возьмем систему сеточных функций, каждая из которых равна единице в одной из точек сетки $\omega_1 \cup \Gamma \cup \omega_2$. а во всех остальных точках равна нулю:

$$e_{1,kl}(x_{11,i}, x_{21,j}) = \begin{cases} 0, & i \neq k,\ j \neq l, \\ 1, & i = k,\ j = l, \end{cases} \quad i,k = \overline{1, N_{11}},\ j,l = \overline{1, N_{21}},$$

$$e_{1,kl}(x_{12i}, x_{22,j}) = 0, \quad k = \overline{1, N_{11}},\ l = \overline{1, N_{21}}, \quad \forall (x_{12,i}, x_{22,j}) \in \omega_2 \cup \Gamma,$$

$$e_{\Gamma,l}(x_{12,0}, x_{22,j}) = \begin{cases} 0, & j \neq l, \\ 1, & j = l, \end{cases} \quad j,l = \overline{1, N_{22}},$$

$$e_{\Gamma,l}(x_{1h}, x_{2h}) = 0, \quad l = \overline{1, N_{22}}, \quad \forall (x_{1h}, x_{2h}) \in \omega = \omega_1 \cup \omega_2,$$

$$e_{2,kl}(x_{12,i}, x_{22,j}) = \begin{cases} 0, & i \neq k,\ j \neq l, \\ 1, & i = k,\ j = l, \end{cases} \quad i,k = \overline{1, N_{12}},\ j,l = \overline{1, N_{22}},$$

$$e_{2,kl}(x_{11,i}, x_{21,j}) = 0, \quad k = \overline{1, N_{12}},\ l = \overline{1, N_{22}}, \quad \forall (x_{12,i}, x_{22,j}) \in \omega_1 \cup \Gamma.$$

- Аппроксимация оператора *R** в $\omega_1 \bigcup \omega_2$: $R_h^* \mathbf{w}^h = \sum_{j=1}^{N} \frac{(\mathbf{w}^h, R_h e_j)_{H_h^*}}{(e_j, e_j)_{H_h}} e_j$.

$$(x_{11,i}, x_{21,j}) \in \omega_1, \quad i = \overline{1, N_{11}},\ j = \overline{1, N_{21}}$$

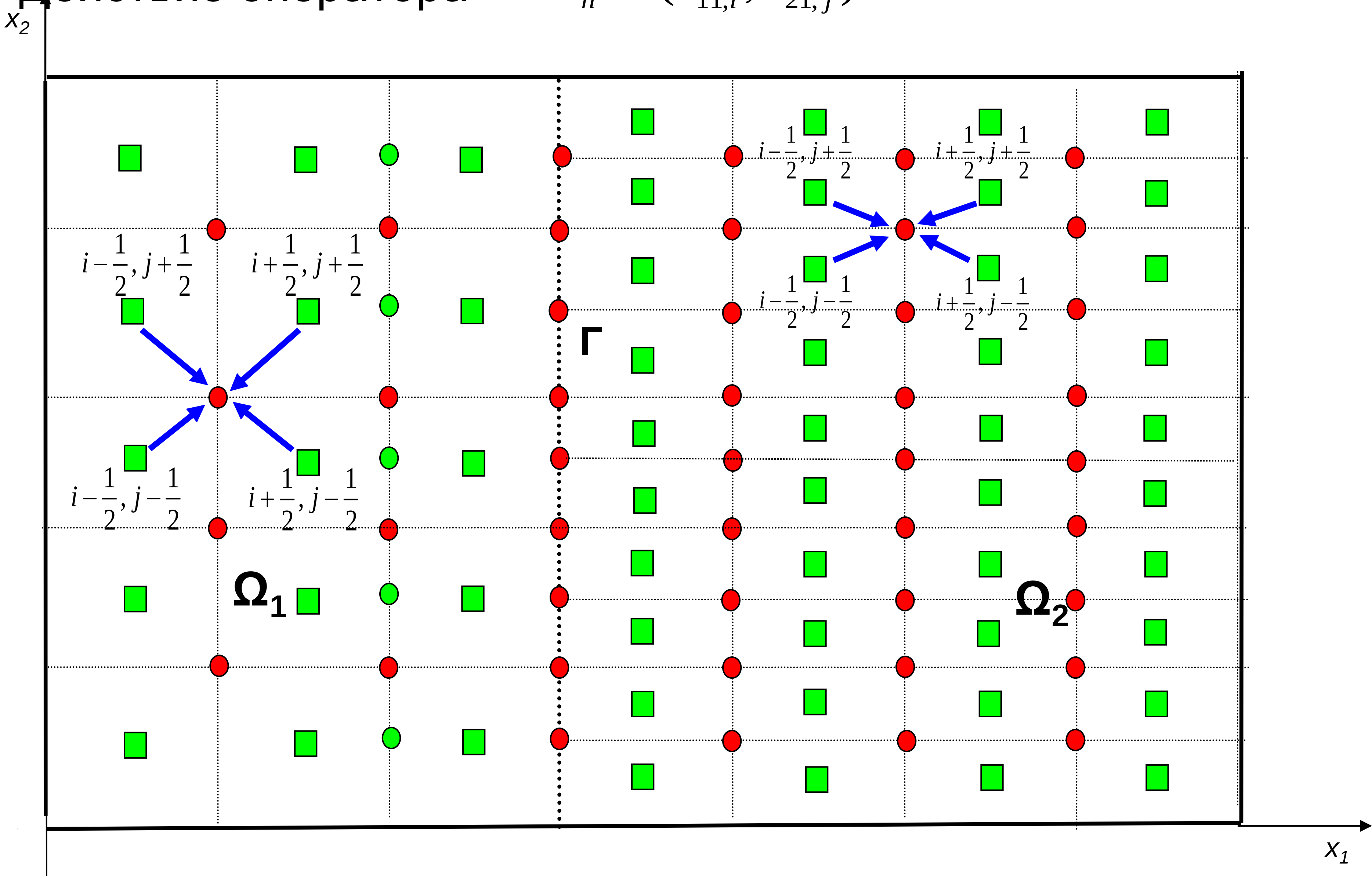
$$R_h^* \mathbf{w}^h (x_{11,i}, x_{21,j}) =$$

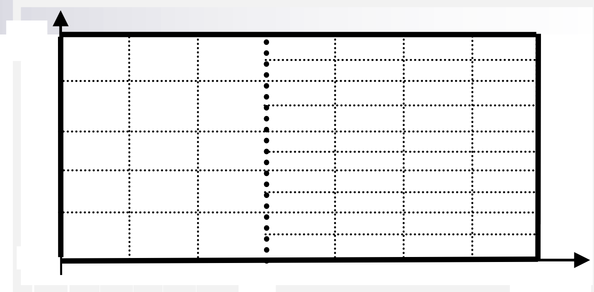
$$= \sum_{k=1}^{N_{11}} \sum_{l=1}^{N_{21}} \frac{(\mathbf{w}^h, R_h e_{1,kl})_{H_h^*}}{(e_{1,kl}, e_{1,kl})_{H_h}} e_{1,kl}(x_{11,i}, x_{21,j}) = \frac{(\mathbf{w}^h, R_h e_{1,ij})_{H_h^*}}{(e_{1,ij}, e_{1ij})_{H_h}} e_{1,ij}(x_{11,i}, x_{21,j}) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{w_1^h(x_{11,i+\frac{1}{2}}, x_{21,j+\frac{1}{2}}) - w_1^h(x_{11,i-\frac{1}{2}}, x_{21,j+\frac{1}{2}})}{h_{11}} + \frac{w_1^h(x_{11,i+\frac{1}{2}}, x_{21,j-\frac{1}{2}}) - w_1^h(x_{11,i-\frac{1}{2}}, x_{21,j-\frac{1}{2}})}{h_{11}}\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{w_2^h(x_{11,i+\frac{1}{2}}, x_{21,j+\frac{1}{2}}) - w_2^h(x_{11,i+\frac{1}{2}}, x_{21,j-\frac{1}{2}})}{h_{21}} + \frac{w_2^h(x_{11,i-\frac{1}{2}}, x_{21,j+\frac{1}{2}}) - w_2^h(x_{11,i-\frac{1}{2}}, x_{21,j-\frac{1}{2}})}{h_{21}}\right]$$

Действие оператора $R_h^* \mathbf{w}^h(x_{11,i}, x_{21,j})$





Аппроксимация оператора *R** на **Г:**

$$(x_{12,0}, x_{22,j}) \in \Gamma, \quad j=\overline{1,N_{22}},$$

$$R_h^* \mathbf{w}^h(x_{12,0},x_{22,j}) = \sum_{l=1}^{N_{22}} \frac{(\mathbf{w}^h, R_h e_{\Gamma,l})_{H_h^*}}{(e_{\Gamma,l},e_{\Gamma,l})_{H_h}} e_{\Gamma,l}(x_{12,0},x_{22,j}) = \frac{(\mathbf{w}^h, R_h e_{\Gamma,j})_{H_h^*}}{(e_{\Gamma,j},e_{\Gamma,j})_{H_h}} e_{\Gamma,j}(x_{12,0},x_{22,j}) =$$

$$j \in \overline{1,N_{22}} \quad k=\overline{0,\frac{N_{22}}{2}}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\frac{w_1^h(x_{12,\frac{1}{2}},x_{22,j+\frac{1}{2}})+w_1^h(x_{12,\frac{1}{2}},x_{22,j-\frac{1}{2}})}{(\frac{h_{11}}{2}+\frac{h_{12}}{2})}\right]+\frac{1}{2}\frac{h_{12}}{(\frac{h_{11}}{2}+\frac{h_{12}}{2})}\left[\frac{w_2^h(x_{12,\frac{1}{2}},x_{22,j+\frac{1}{2}})-w_2^h(x_{12,\frac{1}{2}},x_{22,j-\frac{1}{2}})}{h_{22}}\right], & j=2k+1, \\ \frac{1}{2}\left[\frac{w_1^h(x_{12,\frac{1}{2}},x_{22,j+\frac{1}{2}})-\frac{h_{21}}{h_{22}}w_1^h(x_{11,N_{11}+\frac{1}{2}},x_{21,k+\frac{1}{2}})}{(\frac{h_{11}}{2}+\frac{h_{12}}{2})}+\frac{w_1^h(x_{12,\frac{1}{2}},x_{22,j-\frac{1}{2}})-\frac{h_{21}}{h_{22}}w_1^h(x_{11,N_{11}+\frac{1}{2}},x_{21,k-\frac{1}{2}})}{(\frac{h_{11}}{2}+\frac{h_{12}}{2})}\right]+ & \\ +\frac{1}{2}\left[\frac{h_{12}}{(\frac{h_{11}}{2}+\frac{h_{12}}{2})}\frac{w_2^h(x_{12,\frac{1}{2}},x_{22,j+\frac{1}{2}})-w_2^h(x_{12,\frac{1}{2}},x_{22,j-\frac{1}{2}})}{h_{22}}+\frac{h_{11}}{(\frac{h_{11}}{2}+\frac{h_{12}}{2})}\frac{w_2^h(x_{11,N_{11}+\frac{1}{2}},x_{21,k+\frac{1}{2}})-w_2^h(x_{11,N_{11}+\frac{1}{2}},x_{21,k-\frac{1}{2}})}{h_{22}}\right], & j=2k, \end{cases}$$

- Если сетка ω_1 неравномерная то изменяется скалярное произведение и выражение для $R_h^* \mathbf{w}^h$

- $$R_h^* \mathbf{w}^h (x_{i,j}) = \frac{1}{2}\left[\frac{h_{2,j+1}}{\hat{h}_{2,j}} \frac{w_1^h(x_{11,i+\frac{1}{2}}, x_{21,j+\frac{1}{2}}) - w_1^h(x_{11,i-\frac{1}{2}}, x_{21,j+\frac{1}{2}})}{\hat{h}_{1,i}} + \frac{h_{2,j}}{\hat{h}_{2,j}} \frac{w_1^h(x_{11,i+\frac{1}{2}}, x_{21,j-\frac{1}{2}}) - w_1^h(x_{11,i-\frac{1}{2}}, x_{21,j-\frac{1}{2}})}{\hat{h}_{1,i}}\right] +$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{h_{1,i+1}}{\hat{h}_{1,i}} \frac{w_2^h(x_{11,i+\frac{1}{2}}, x_{21,j+\frac{1}{2}}) - w_2^h(x_{11,i+\frac{1}{2}}, x_{21,j-\frac{1}{2}})}{\hat{h}_{2,j}} + \frac{h_{1,i}}{\hat{h}_{1,i}} \frac{w_2^h(x_{11,i-\frac{1}{2}}, x_{21,j+\frac{1}{2}}) - w_2^h(x_{11,i-\frac{1}{2}}, x_{21,j-\frac{1}{2}})}{\hat{h}_{2,j}}\right]$$

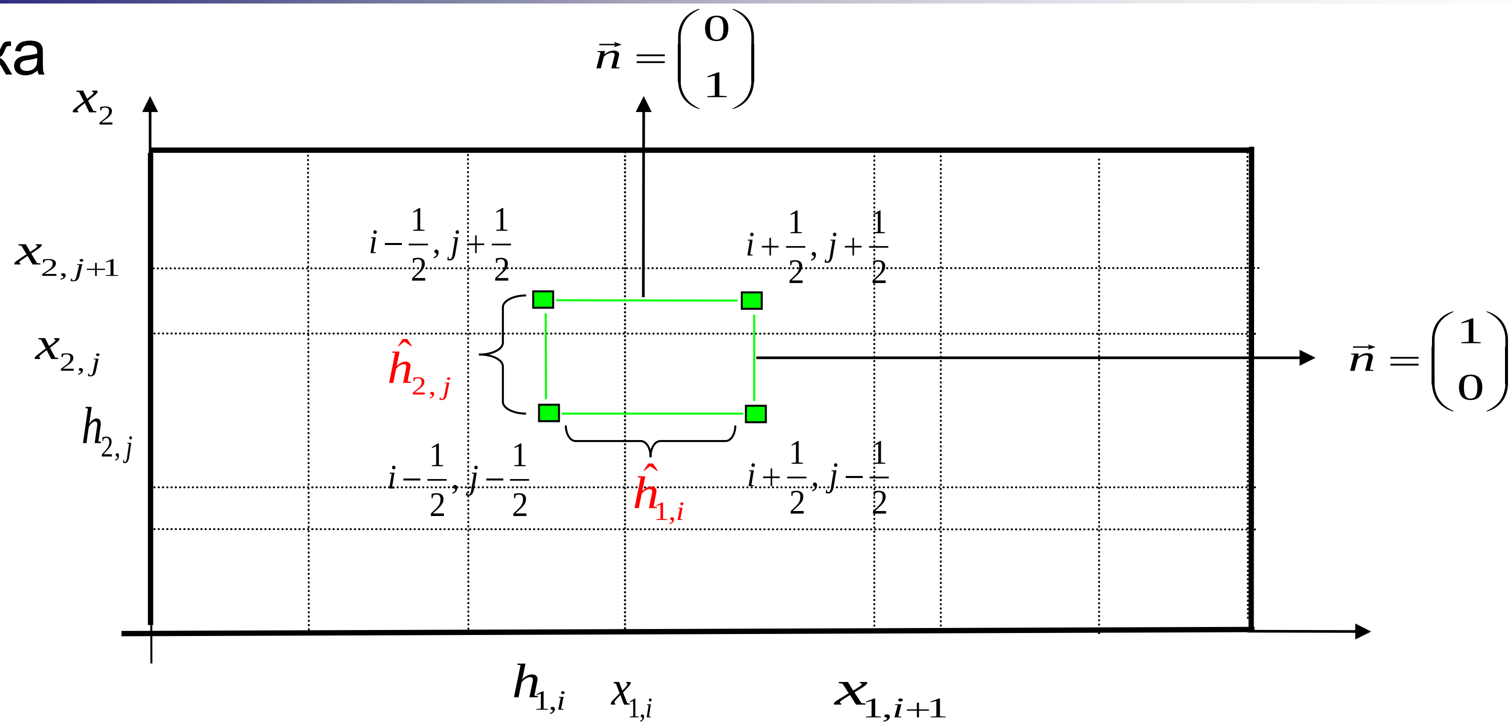
$$\hat{h}_{1,i} = \frac{h_{1,i} + h_{1,i+1}}{2}, \quad \hat{h}_{1,j} = \frac{h_{1,j} + h_{1,j+1}}{2}.$$

- Такое выражение для $R_h^* \mathbf{w}^h$ можно получить применяя при аппроксимации уравнения баланса

$$\iint_{V_{ij}} div\, \mathbf{w}\, dV = \iint_{V_{ij}} f\ dV \quad \Leftrightarrow \quad \int_{(\Gamma_{ij})} \mathbf{w} \cdot \vec{n}\, ds = \iint_{V_{ij}} f\ dV$$

- линейную комбинацию формул прямоугольников для ячейки

- Ячейка



- Интересно, что «очевидная» аппроксимация

$$div\,\mathbf{w}(x_{i,j}) \approx \frac{1}{2}\frac{w_1(x_{11,i+\frac{1}{2}}, x_{21,j+\frac{1}{2}}) - w_1(x_{11,i-\frac{1}{2}}, x_{21,j+\frac{1}{2}})}{\hat{h}_{1,i}} + \frac{1}{2}\frac{w_1(x_{11,i+\frac{1}{2}}, x_{21,j-\frac{1}{2}}) - w_1(x_{11,i-\frac{1}{2}}, x_{21,j-\frac{1}{2}})}{\hat{h}_{1,i}} +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{w_2(x_{11,i+\frac{1}{2}}, x_{21,j+\frac{1}{2}}) - w_2(x_{11,i+\frac{1}{2}}, x_{21,j-\frac{1}{2}})}{\hat{h}_{2,j}} + \frac{1}{2}\frac{w_2(x_{11,i-\frac{1}{2}}, x_{21,j+\frac{1}{2}}) - w_2(x_{11,i-\frac{1}{2}}, x_{21,j-\frac{1}{2}})}{\hat{h}_{2,j}}$$

- приводит к потере сопряженно-операторной структуры

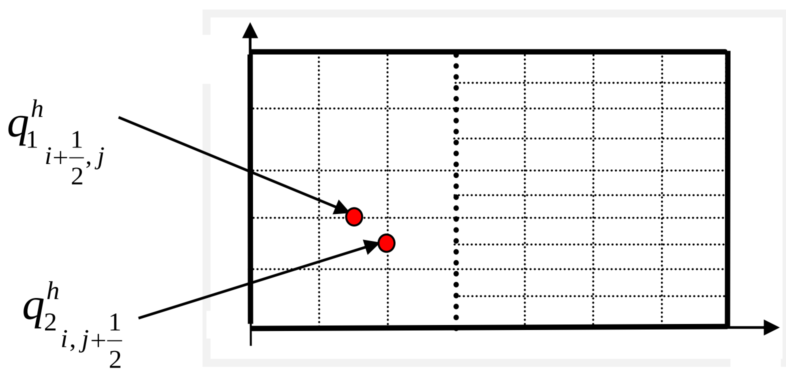
Аппроксимация тензора **K**:

$$[\mathbf{w}^h]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = [\mathbf{K}_h \mathbf{q}^h]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} [\mathbf{q}^h]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$$

Важно !

1. Компоненты $\mathbf{w}^h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \leftrightarrow \mathbf{q}^h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$ - тензоров ранга 1 (векторов) определяются в одних и тех же точках.

Поэтому аппроксимация тензора **K** естественна и соотношение $\mathbf{w}^h = \mathbf{K}_h \mathbf{q}^h$ аппроксимирует исходное $\mathbf{w} = \mathbf{K}\mathbf{q}$ с бесконечным порядком точности.



?

$$\begin{bmatrix} w_1^h(x_{1,i+\frac{1}{2}}, x_{2,j}) \\ w_2^h(x_{1,i}, x_{2,j+\frac{1}{2}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} q_1^h(x_{1,i+\frac{1}{2}}, x_{2,j}) \\ q_2^h(x_{1,i}, x_{2,j+\frac{1}{2}}) \end{bmatrix}$$

Окончательная формулировка дискретного аналога

- Сопряжено-операторная дискретная модель имеет вид

$$R_h^* \mathbf{w}^h = f^h,$$

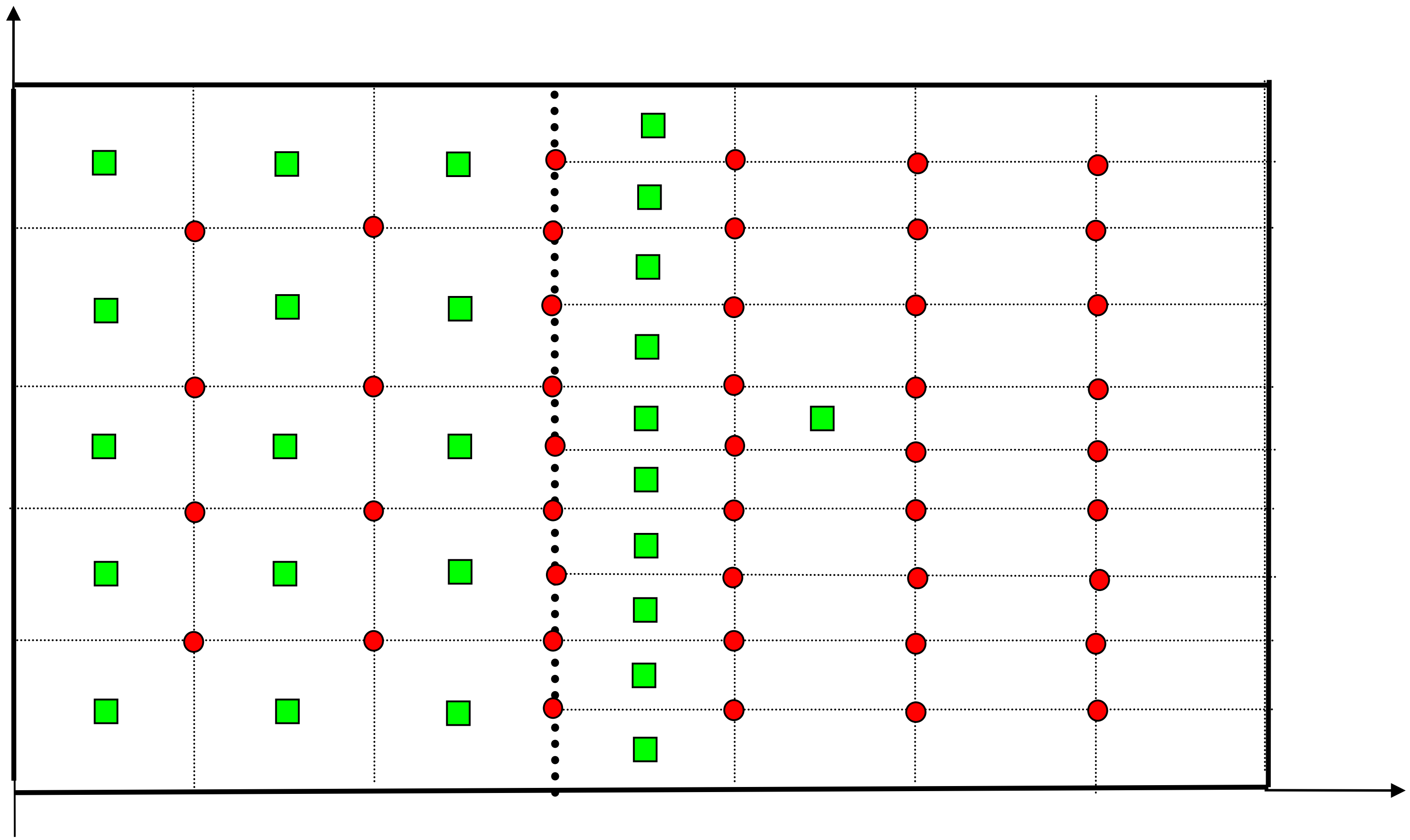
$$\mathbf{w}^h = \mathbf{K}_h \mathbf{q}^h,$$

$$\mathbf{q}^h = R_h u^h,$$

$$u^h \in H_h, \ \mathbf{w}^h \in H_h^*.$$

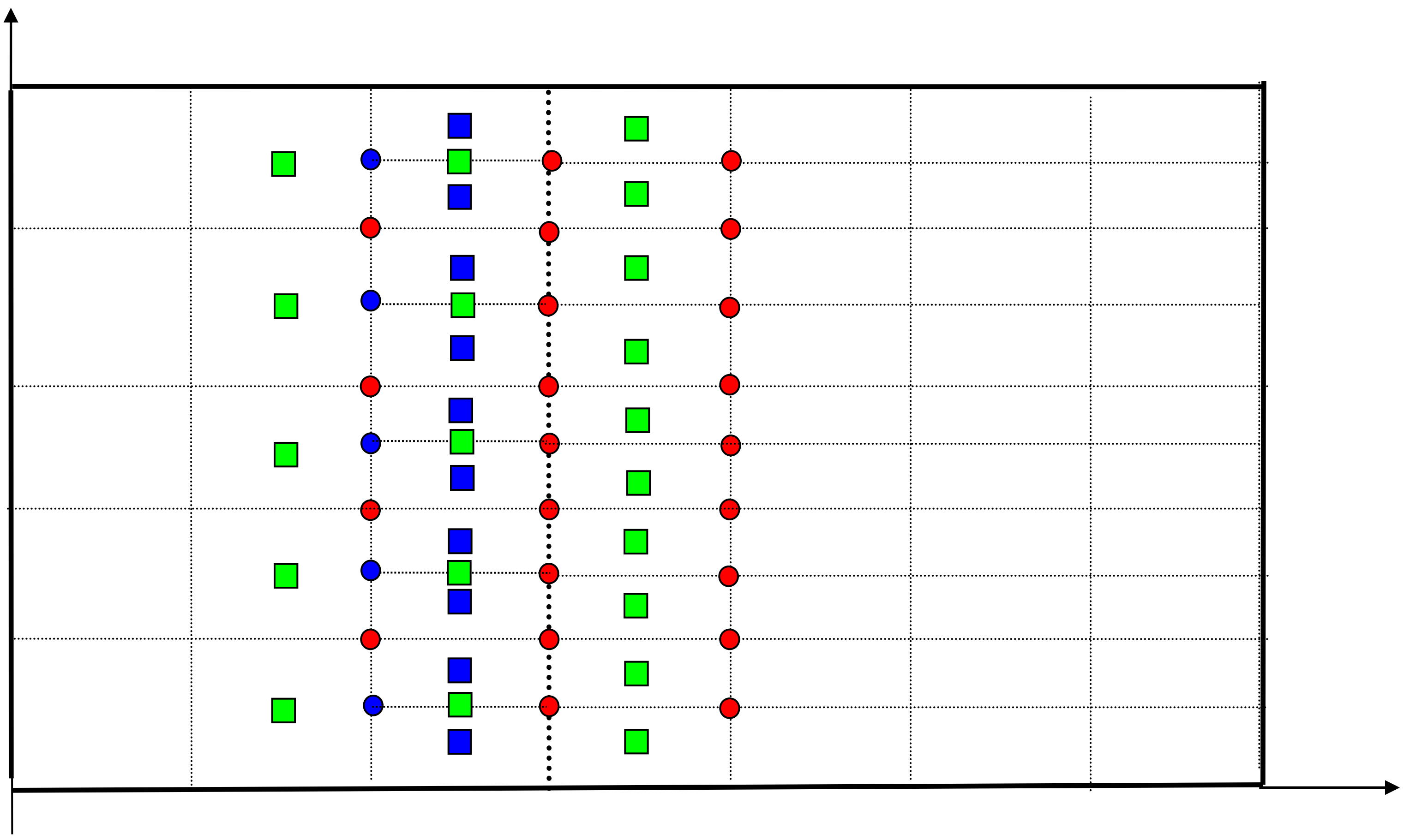
- Проведенные численные эксперименты показали сходимость построенной разностной схемы.
- Однако сходимость оказалась только первого порядка.

- С целью получения разностной схемы второго порядка были произведены дополнительные построения.
- По всей видимости, причиной того, что схема имеет первый порядок сходимости является, в частности, следующее.
- В точках сетки ω_Γ в которых сетки в Ω_1 и Ω_2 не согласуются для аппроксимации оператора *R* =div* используются только точки сетки из области Ω_2.
- «Информация» из области Ω_1 никак не учитывается.



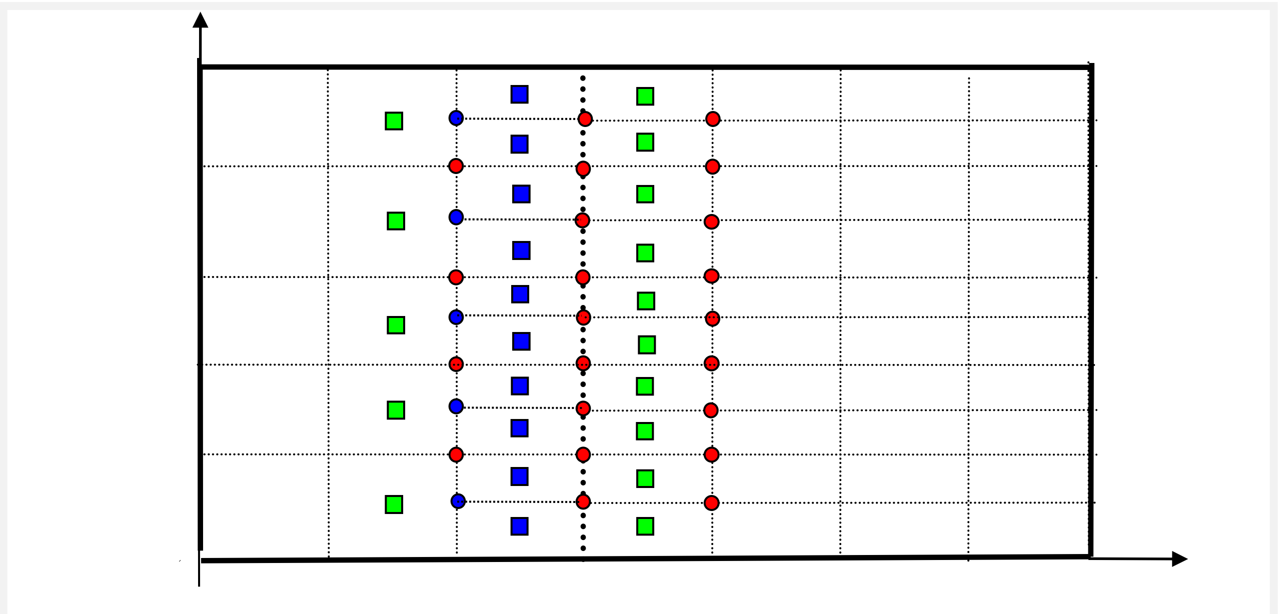
- Для того, чтобы исключить эту ситуацию, в области Ω_1 были введены дополнительные узлы сетки и для оператора $R = -grad$ применена специальная аппроксимация.

- Для того, чтобы исключить эту ситуацию, в области Ω_1 были введены дополнительные узлы сетки и для оператора $R = -grad$ применена специальная аппроксимация.



- В дополнительных точках - ■ для потока
- оператор *R* =-*grad* аппроксимируется по тому же принципу, что и в «регулярных» точках - ■
- с той лишь разницей, что в качестве значения в «фиктивной» точке - ●
- используется линейная комбинация четырех ближайших (по вертикали) точек - ●

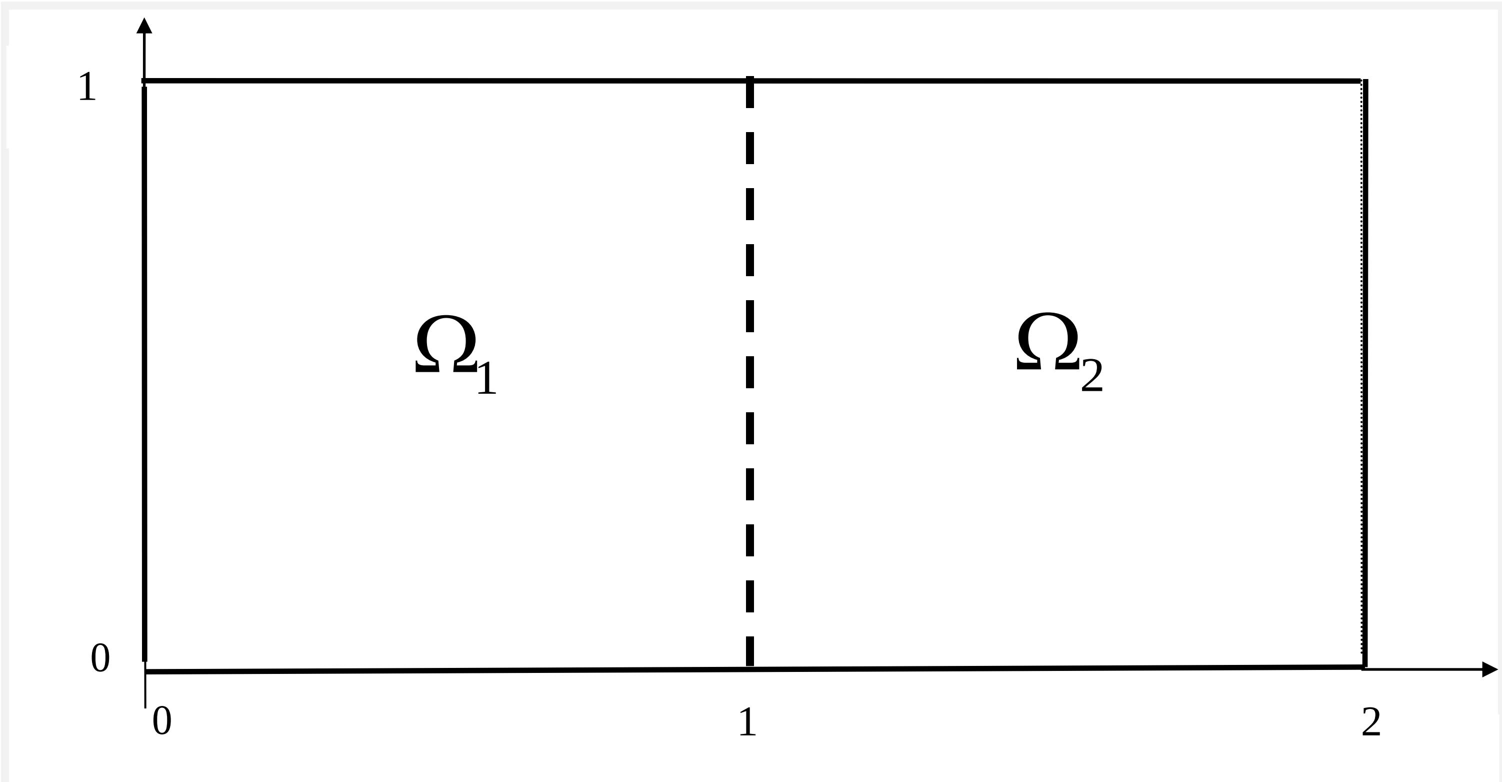
$$u(\bullet)=-\frac{1}{16}u(\bullet-\frac{3}{2}h)+\frac{9}{16}u(\bullet-\frac{1}{2}h)+\frac{9}{16}u(\bullet+\frac{1}{2}h)-\frac{1}{16}u(\bullet+\frac{3}{2}h)+O(h^4)$$



Численные эксперименты

В таблицах приведены результаты тестовых расчетов, подтверждающие второй порядок сходимости.

- Расчеты производились в области $\Omega=(0,2)x(0,1)=\Omega_1 U \Omega_2$.
- Область делилась на две равные части
- $\Omega = \Omega_1 U \Omega_2 = ((0,1)x(0,1))\ U\ ((1,2)x(0,1))$



В каждой подобласти задавалась равномерная сетка:

- в Ω_1 с шагами $h_{11}= h_{21}$, в Ω_2 - $h_{12}=h_{22}=h_{21}/2$.
- Использованные шаги приведены в первых двух колонках.
- В остальных колонках указаны различные характеристики погрешности

$$\mathbf{Z}^h = \begin{bmatrix} \mathbf{w}^h \\ u^h \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ u \end{bmatrix}$$

- Здесь $\begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ u \end{bmatrix}$ – решение дифференциальной задачи, $\begin{bmatrix} \mathbf{w}^h \\ u^h \end{bmatrix}$ – решение разностной задачи.
- В третьей колонке норма второй компоненты погрешности

$$\max_{(x_{1i},x_{2j})\in\omega} \left| u(x_{1i},x_{2j}) - u^h(x_{1i},x_{2j}) \right| = \max_u$$

- В четвертой - норма второй компоненты погрешности

$$\max\left[\max_{\left(x_{1,i-\frac{1}{2}},x_{2,j-\frac{1}{2}}\right)\in\omega_{1\frac{1}{2}}} \left| w_1\left(x_{1,i-\frac{1}{2}},x_{2,j-\frac{1}{2}}\right) - w_1^h\left(x_{1,i-\frac{1}{2}},x_{2,j-\frac{1}{2}}\right) \right|, \max_{\left(x_{1,i-\frac{1}{2}},x_{2,j-\frac{1}{2}}\right)\in\omega_{1\frac{1}{2}}} \left| w_2\left(x_{1,i-\frac{1}{2}},x_{2,j-\frac{1}{2}}\right) - w_2^h\left(x_{1,i-\frac{1}{2}},x_{2,j-\frac{1}{2}}\right) \right| \right] = \max_{\mathrm{w}}$$

В пятой колонке норма проекции второй компоненты погрешности на Г

$$\max_{(x_{1i},x_{2j})\in\Gamma}\left|u(x_{1i},x_{2j})-u^h(x_{1i},x_{2j})\right|=\max{}_\Gamma$$

- Наконец, в последней - норма погрешности

$$\left\|\mathbf{Z}^h\right\|_{\mathbf{H}}=\sqrt{\begin{aligned}&\sum_{(x_{1i},x_{2j})\in\omega}\left(u(x_{1i},x_{2j})-u^h(x_{1i},x_{2j})\right)^2h_1h_2+\\&+\sum_{\left(x_{1,i-\frac{1}{2}},x_{2,j-\frac{1}{2}}\right)\in\omega_{\frac{1}{2}}}\left(w_1\left(x_{1,i-\frac{1}{2}},x_{2,j-\frac{1}{2}}\right)-w_1^h\left(x_{1,i-\frac{1}{2}},x_{2,j-\frac{1}{2}}\right)\right)^2h_1h_2+\\&+\sum_{\left(x_{1,i-\frac{1}{2}},x_{2,j-\frac{1}{2}}\right)\in\omega_{\frac{1}{2}}}\left(w_2\left(x_{1,i-\frac{1}{2}},x_{2,j-\frac{1}{2}}\right)-w_2^h\left(x_{1,i-\frac{1}{2}},x_{2,j-\frac{1}{2}}\right)\right)^2h_1h_2\end{aligned}}$$

$$\mathbf{K}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, (x_1, x_2) \in \Omega_1 \qquad \mathbf{K}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, (x_1, x_2) \in \Omega_2$$

$$u(x_1, x_2) = \sin^3(\pi x_1)\sin^3(\pi x_2), (x_1, x_2) \in \Omega_1 \qquad u(x_1, x_2) = \sin^3(1\pi x_1)\sin^3(1\pi x_2), (x_1, x_2) \in \Omega_2$$

$h_{11}=h_{21}$	$h_{12}=h_{22}$	$\max_u$	$\max_\mathbf{w}$	$\max_\Gamma$	**H**
1/10	1/20	0.8802E-01	0.2137E+00	0.1043E-01	0.1158E+00
1/20	1/40	0.2069E-01	0.5404E-01	0.2492E-02	0.2765E-01
1/40	1/80	0.5096E-02	0.1348E-01	0.6164E-03	0.6837E-02
1/80	1/160	0.1266E-02	0.3371E-02	0.1534E-03	0.1705E-02

$$\mathbf{K}(x_1,x_2)=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix},(x_1,x_2)\in\Omega_1 \qquad \mathbf{K}(x_1,x_2)=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix},(x_1,x_2)\in\Omega_2$$

$$u(x_1,x_2)=\sin^3(\pi x_1)\sin^3(\pi x_2),(x_1,x_2)\in\Omega_1 \quad u(x_1,x_2)=\sin^3(10\pi x_1)\sin^3(10\pi x_2),(x_1,x_2)\in\Omega_2$$

- **«Смешанные производные» +**

$h_{11}=h_{21}$	$h_{12}=h_{22}$	$\max_u$	$\max_{\mathbf{w}}$	$\max_{\Gamma}$	**H**
1/40	1/80	0.1435E+00	0.7841E+01	0.3047E-01	0.3999E+01
1/80	1/160	0.3250E-01	0.1880E+01	0.7146E-02	0.9256E+00
1/160	1/320	0.7943E-02	0.4662E+00	0.1746E-02	0.2273E+00
1/320	1/640	0.1973E-02	0.1167E+00	0.4299E-03	0.5657E-01

$$\mathbf{K}(x_1,x_2)=\begin{bmatrix}0.002 & 0.01\\ 0.01 & 0.002\end{bmatrix},(x_1,x_2)\in\Omega_1 \qquad \mathbf{K}(x_1,x_2)=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix},(x_1,x_2)\in\Omega_2$$

$$u(x_1,x_2)=\sin^3(\pi x_1)\sin^3(\pi x_2),(x_1,x_2)\in\Omega_1 \quad u(x_1,x_2)=\sin^3(10\pi x_1)\sin^3(10\pi x_2),(x_1,x_2)\in\Omega_2$$

- «Смешанные производные» +
- разрывные коэффициенты +

$h_{11}=h_{21}$	$h_{12}=h_{22}$	$\max_u$	$\max_{\mathbf{w}}$	$\max_\Gamma$	**H**
1/40	1/80	0.1514E+00	0.8146E+01	0.6161E-01	0.4028E+01
1/80	1/160	0.3462E-01	0.1944E+01	0.1453E-01	0.9287E+00
1/160	1/320	0.8446E-02	0.4831E+00	0.3501E-02	0.2281E+00
1/320	1/640	0.2065E-02	0.1199E+00	0.8270E-03	0.5677E-01

- Спасибо за внимание

- ГГГГ

Local flux mimetic finite difference methods

Konstantin Lipnikov[1*] Mikhail Shashkov[1] Ivan Yotov[2]

January 31, 2008

2 Mimetic finite difference method

Let X_1 and X_2 be Hilbert spaces and let $\mathcal{L}_1$ and $\mathcal{L}_2$ be two linear operators, $\mathcal{L}_i : X_i \to Y_i$, $i = 1, 2$, which satisfy some fundamental identity:

$$\mathcal{I}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2; f_1, f_2) = 0 \qquad \forall f_1 \in X_1,\ f_2 \in X_2.$$

Suppose that discrete approximation spaces X_{ih}, Y_{ih}, $i = 1, 2$, and the discrete operator $\mathcal{L}_{1h}$ are given. The idea of the mimetic discretization is to find a discrete operator $\mathcal{L}_{2h}$ such that a discrete analog of the fundamental identity holds, i.e

$$\mathcal{I}_h(\mathcal{L}_{1,h}, \mathcal{L}_{2,h}; f_{1h}, f_{2h}) = 0 \qquad \forall f_{1h} \in X_{1h}, f_{2h} \in X_{2h}. \tag{2.1}$$

This implies that operators $\mathcal{L}_1$ and $\mathcal{L}_2$ cannot be discretized independently from each other. For a given $\mathcal{L}_{1,h}$, formula (2.1) is the implicit definition of the operator $\mathcal{L}_{2,h}$.

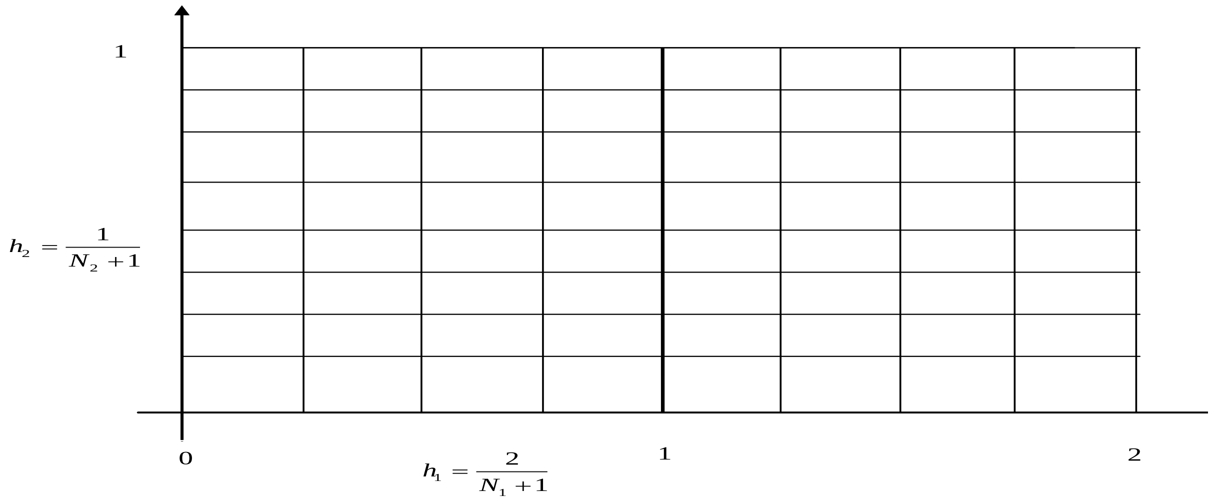
With the discrete divergence and quadrature rules for approximating L^2 inner products defined, the discrete gradient operator is derived from the discrete Green's formula (cf. (2.5))

$$[\mathbf{q}, \mathcal{DIV}\,\mathbf{v}]_Q + [\mathbf{v}, \mathcal{GRAD}\,\mathbf{q}]_X = 0 \qquad \forall\, \mathbf{q} \in Q_h,\ \forall\, \mathbf{v} \in X_h. \tag{2.17}$$

Lemma 2.1 *If (2.13) in Assumption* **A3** *holds, then formula (2.17) gives a unique definition for operator $\mathcal{GRAD}$.*

6. Тесты

- Область $\Omega = (0,2)\times(0,1)$



- Задача

$$R^* w \equiv diw\ w = \frac{dw_1}{dx_1} + \frac{dw_2}{dx_2} = f,$$

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = Kq = \begin{bmatrix} k_{11}(x_1, x_2) & k_{12}(x_1, x_2) \\ k_{21}(x_1, x_2) & k_{22}(x_1, x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix},$$

$$q = Ru \equiv -grad\ u = -\begin{bmatrix} \dfrac{du}{dx_1} \\ \dfrac{du}{dx_2} \end{bmatrix},$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0.$$

- В таблицах используются обозначения:

$$\max = \max_{(x_{1i},x_{2j})\in\omega} |u(x_{1i},x_{2j}) - u^h(x_{1i},x_{2j})|, \qquad L_2 = [\sum_{(x_{1i},x_{2j})\in\omega} (u(x_{1i},x_{2j}) - u^h(x_{1i},x_{2j}))^2 h_{1i} h_{2j}]^{\frac{1}{2}},$$

$$H_h \otimes H_h^* = [\sum_{(x_{1i},x_{2j})\in\omega} (u(x_{1i},x_{2j}) - u^h(x_{1i},x_{2j}))^2 h_{1i} h_{2j} +$$

$$+ \sum_{(x_{1,i-\frac{1}{2}},x_{2,j-\frac{1}{2}}))\in\omega_{\frac{1}{2}}} (w_1(x_{1,i-\frac{1}{2}},x_{2,j-\frac{1}{2}}) - w_1^h(x_{1,i-\frac{1}{2}},x_{2,j-\frac{1}{2}}))^2 h_{1i} h_{2j} + \sum_{(x_{1,i-\frac{1}{2}},x_{2,j-\frac{1}{2}}))\in\omega_{\frac{1}{2}}} (w_2(x_{1,i-\frac{1}{2}},x_{2,j-\frac{1}{2}}) - w_2^h(x_{1,i-\frac{1}{2}},x_{2,j-\frac{1}{2}}))^2 h_{1i} h_{2j}]^{\frac{1}{2}}$$

- $u(x_{1i},x_{2j})$ - проекция точного решения на сетку ω,
- $w(x_{1,i-\frac{1}{2}},x_{2,j-\frac{1}{2}})$ - проекция потока от точного решения на сетку $\omega_{\frac{1}{2}}$,
- $u^h(x_{1i},x_{2j})$ - решение дискретной задачи на сетке ω,
- $w^h(x_{1,i-\frac{1}{2}},x_{2,j-\frac{1}{2}})$ - решение дискретной задачи (дискретный поток) на сетке $\omega_{\frac{1}{2}}$,

- Равномерная сетка
- Смешанные производные $K\left(x_{1,i-\frac{1}{2}}, x_{2,j-\frac{1}{2}}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Решение $u(x_1, x_2) = x_1(2-x_1)\, x_2(1-x_1)$

- **Таблица 1**

$h_1 \quad h_2 \quad / \quad \varepsilon$	max	L_2	$H_h \otimes H_h^*$
$10^{-1} \quad 10^{-1}$	0.2348E-02	0.1932E-02	0.1012E-01
$\frac{1}{2}10^{-1} \quad \frac{1}{2}10^{-1}$	0.5853E-03	0.4807E-03	0.2532E-02
$\frac{1}{4}10^{-1} \quad \frac{1}{4}10^{-1}$	0.1462E-03	0.1200E-03	0.6331E-03
$\frac{1}{8}10^{-1} \quad \frac{1}{8}10^{-1}$	0.3654E-04	0.3000E-04	0.1583E-03
$\frac{1}{16}10^{-1} \quad \frac{1}{16}10^{-1}$	0.9135E-05	0.7498E-05	0.3957E-04

Неравномерная сетка

$$K\left(x_{1,i-\frac{1}{2}}, x_{2,j-\frac{1}{2}}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Решение $u(x_1, x_2) = x_1(2 - x_1)\, x_2(1 - x_1)$

Таблица 2

h_{11} h_{12} h_2 / ε	max	L_2	$H_h \otimes H_h^*$
10^{-1} $\frac{1}{2}10^{-1}$ 10^{-1}	0.2016E-02	0.1550E-02	0.4608E-02
$\frac{1}{2}10^{-1}$ $\frac{1}{4}10^{-1}$ $\frac{1}{2}10^{-1}$	0.5025E-03	0.3858E-03	0.1152E-02
$\frac{1}{4}10^{-1}$ $\frac{1}{8}10^{-1}$ $\frac{1}{4}10^{-1}$	0.1255E-03	0.9633E-04	0.2881E-03
10^{-1} $\frac{1}{10}10^{-1}$ 10^{-1}	0.1962E-02	0.1450E-02	0.4562E-02
$\frac{1}{2}10^{-1}$ $\frac{1}{20}10^{-1}$ $\frac{1}{2}10^{-1}$	0.4878E-03	0.3610E-03	0.1141E-02
$\frac{1}{4}10^{-1}$ $\frac{1}{40}10^{-1}$ $\frac{1}{4}10^{-1}$	0.1218E-03	0.9014E-04	0.2852E-03

Неравномерная сетка+Разрывные коэффициенты

$$K(x_{1,i-\frac{1}{2}}, x_{2,j-\frac{1}{2}}) = \begin{bmatrix} p1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad K(x_{1,i-\frac{1}{2}}, x_{2,j-\frac{1}{2}}) = \begin{bmatrix} p2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Решение $u(x_1,x_2) = [-\dfrac{p2}{p1+p2}x_1 + 1]\, x_2^4(1-x_2^4)$ $\qquad u(x_1,x_2) = [\dfrac{p1}{p1+p2}(2-x_1)]\, x_2^4(1-x_2^4)$

Таблица 3 p1=10, p2=1000

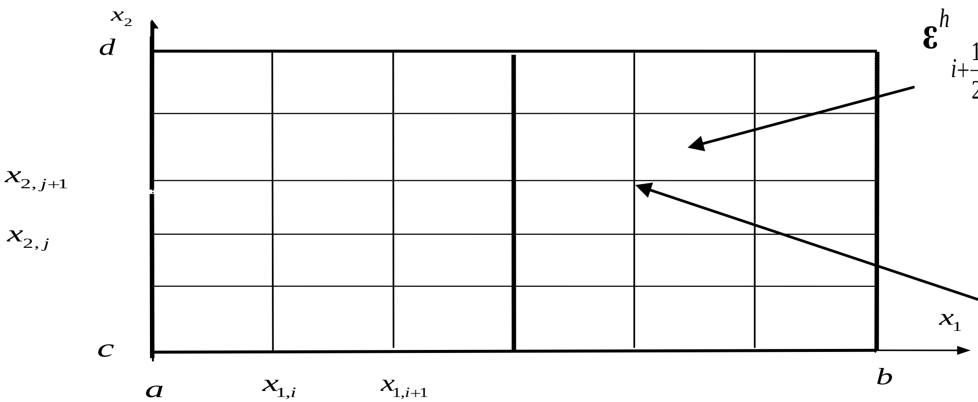
h_{11} h_{12} h_2 / ε	max	L_2	$H_h \otimes H_h^*$
$\frac{1}{2}10^{-1}$ 10^{-1} 10^{-1}	0.3316E-02	0.1185E-02	0.2096E+00
$\frac{1}{4}10^{-1}$ $\frac{1}{2}10^{-1}$ $\frac{1}{2}10^{-1}$	0.8115E-03	0.2891E-03	0.5388E-01
$\frac{1}{8}10^{-1}$ $\frac{1}{4}10^{-1}$ $\frac{1}{4}10^{-1}$	0.2008E-03	0.7176E-04	0.1357E-01
$\frac{1}{10}10^{-1}$ 10^{-1} 10^{-1}	0.3309E-02	0.1183E-02	0.2063E+00
$\frac{1}{20}10^{-1}$ $\frac{1}{2}10^{-1}$ $\frac{1}{2}10^{-1}$	0.8110E-03	0.2888E-03	0.5300E-01
$\frac{1}{40}10^{-1}$ $\frac{1}{4}10^{-1}$ $\frac{1}{4}10^{-1}$	0.2007E-03	0.7171E-04	0.1334E-01

7. Дальнейшие возможности

- 1. Теория упругости;

$$R^*\boldsymbol{\sigma} = -\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad R\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u} = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$



$$\boldsymbol{\varepsilon}^h_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = (R\mathbf{u}^h)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(u^h_{1,x_1,i,j} + u^h_{1,x_1,i,j+1}) \\ \frac{1}{2}(u^h_{2,x_2,i,j} + u^h_{2,x_2,i+1,j}) \\ \frac{1}{2}(u^h_{1,x_2,i,j} + u^h_{1,x_2,i+1,j}) + \frac{1}{2}(u^h_{2,x_1,i,j} + u^h_{2,x_1,i,j+1}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}^h_{i,j} = \begin{bmatrix} u^h_{1,i,j} \\ u^h_{2,i,j} \end{bmatrix}$$

2. Криволинейные координаты;

$$y_j = y_j\left(x_1, x_2, x_3\right),\ j = 1,2,3$$

$$Ru = -grad\ u(\mathbf{y}) = -\frac{\partial u}{\partial y_i}\mathbf{e}^i$$

$$R^*\mathbf{w} = \mathrm{div}\,\mathbf{w} = \mathrm{tr}(\nabla \mathbf{w}) = \nabla_m w^m$$

$$\nabla_j u^m = \underline{\left(\frac{\partial u^m}{\partial y_j} + u^i \Gamma_{ij}^m\right)},\quad \Gamma_{ij}^m = \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial y_j}\cdot \mathbf{e}^m.$$

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_1},\quad \mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_2},\quad \mathbf{e}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_3}$$

$$\mathbf{r} = x_1\mathbf{q}_1 + x_2\mathbf{q}_3 + x_3\mathbf{q}_3 = x_i\mathbf{q}_i.$$

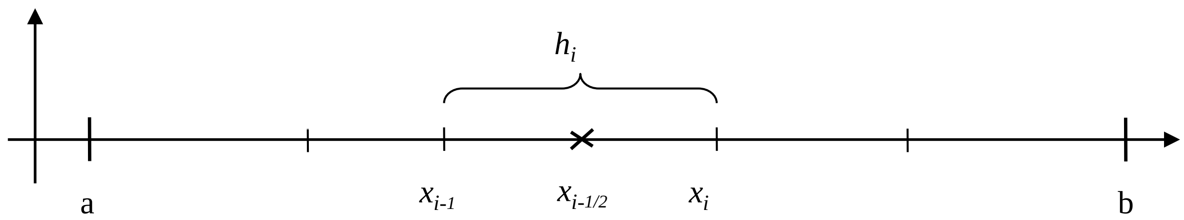
$$R_h : H_h \to H_h^*,\quad R_h^* : H_h^* \to H_h,$$

$$(R_h u^h, \mathbf{w}^h)_{H_h^*} = (u^h, R_h^*\mathbf{w}^h)_{H_h}.$$

4. Краевые условия.

$$R^* w \equiv \frac{dw}{dx} = f, \quad x \in (a,b), \quad w = k(x)q, \quad q = Ru \equiv -\frac{du}{dx},$$

$$u(a) = \frac{du}{dx}(b) = 0.$$



$$R_h : H_h \to H_h^*,$$

$$(R_h u^h)(x_{i+\frac{1}{2}}) = \begin{cases} \dfrac{-u_1^h}{h_1}, & i = 0, \\ \dfrac{u_i^h - u_{i+1}^h}{h_{i+1}}, & 1 \le i \le N, \end{cases}$$

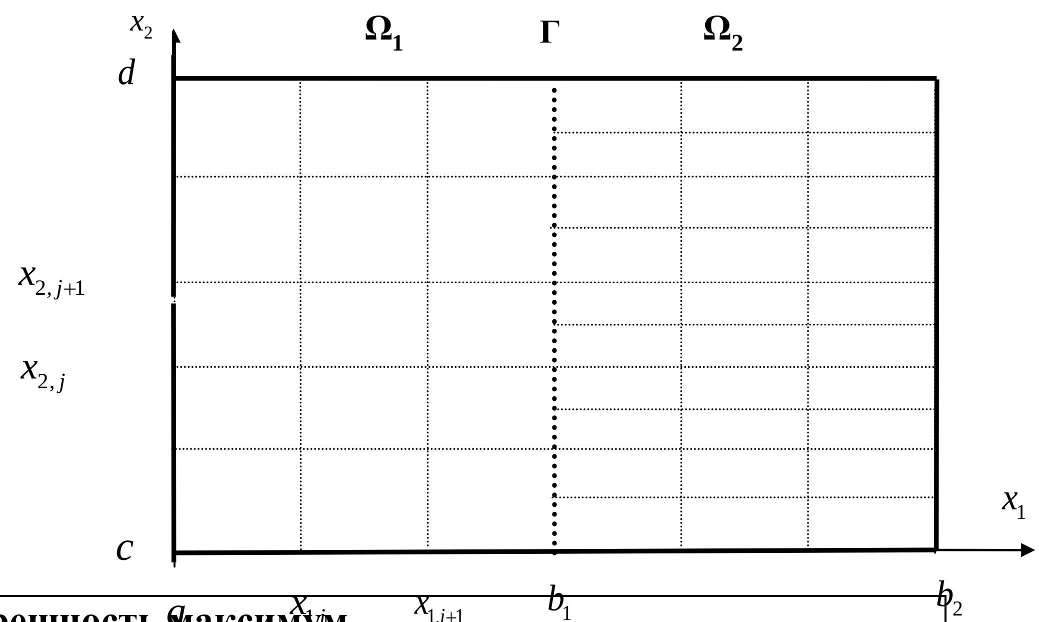
$$\Rightarrow$$

$$R_h^* : H_h^* \to H_h$$

$$R_h^* w^h(x_i) = \begin{cases} \dfrac{w^h_{i+\frac{1}{2}} - w^h_{i-\frac{1}{2}}}{\dfrac{h_i}{2} + \dfrac{h_{i+1}}{2}}, & 1 \le i \le N-1, \\ -\dfrac{w^h_{N+\frac{1}{2}}}{\dfrac{h_N}{2} + \dfrac{h_{N+1}}{2}}, & i = N. \end{cases}$$

- Sorokin S.B. Conjugate-factorized models in plate theory. Сибирский журнал вычислительной математики РАН СО, т. 2, № 1, Новосибирск, 1999 , стр. 81-88.
- Sorokin S.B. Efficient direct methods for discrete conjugate-operator models. The Far-Eastern School - seminar on mathematical modeling and numerical analysis. The proceeding and abstracts, Khabarovsk, 1999, pp. 99-107.
- Сорокин С.Б. Оценка точности двусторонних приближений для задачи Штурма - Лиувилля. Сибирский журнал вычислительной математики РАН СО, т. 3, № 1, Новосибирск, 2000, стр. 77-94.
- Сорокин С.Б. Обоснование метода двусторонних приближений для собственных чисел эллиптического оператора второго порядка. Сибирский журнал вычислительной математики РАН СО, т. 4, № 1, Новосибирск, 2001 г., стр. 61-84.
- Сорокин С.Б. Обоснование асимптотического разложения для спектральных задач в методе фиктивных областей. Тезисы докладов Третьего Сибирского конгресса по прикладной и индустриальной математике (INPRIM-98), Часть III, Новосибирск, Изд. ИМ СО РАН 1998, стр. 23.

Тест



- Решение *U(x)=x*

Погрешность максимум

h_{x_1}	h_{x_2}	h_{y_1}	h_{y_2}	$\max \Omega_1$	$\max \frac{1}{2}\Omega_1$	$\max \Omega_2$	$\max \frac{1}{2}\Omega_2$	$\max \Gamma$
0.1	0.1	0.1	0.05	0.2037E-02	0.6160E-03	0.2988E-02	0.8632E-03	0.1050E-01
0.05	0.05	0.05	0.025	0.1242E-02	0.3371E-03	0.1568E-02	0.3994E-03	0.5245E-02
0.025	0.025	0.025	0.0125	0.6791E-03	0.1763E-03	0.8020E-03	0.1920E-03	0.2622E-02

Погрешность $\mathbf{L_2}$

h_{x_1}	h_{x_2}	h_{y_1}	h_{y_2}	$\mathbf{L_2}\ (\Omega_1)$	$\mathbf{L_2}\ (\frac{1}{2}\Omega_1)$	$\mathbf{L_2}\ (\Omega_2)$	$\mathbf{L_2}\ (\frac{1}{2}\Omega_2)$	$\mathbf{L_2}\ (\Gamma)^*$
0.1	0.1	0.1	0.05	0.2215E-02	0.1885E-03	0.1067E-02	0.2666E-03	0.2191E-02
0.05	0.05	0.05	0.025	0.7731E-03	0.9443E-04	0.5382E-03	0.1124E-03	0.7591E-03
0.025	0.025	0.025	0.0125	0.2741E-03	0.4717E-04	0.2695E-03	0.5147E-04	0.2651E-03