

**Параллельные алгоритмы для моделирования  
прямых трёхмерных задач электротомографии и  
вертикального электрического зондирования на  
графических процессорах**

***Суродина Ирина Владимировна***

***(ИВМиМГ, Новосибирск)***

***Неведрова Нина Николаевна***

***Санчаа Айдиса Михайловна***

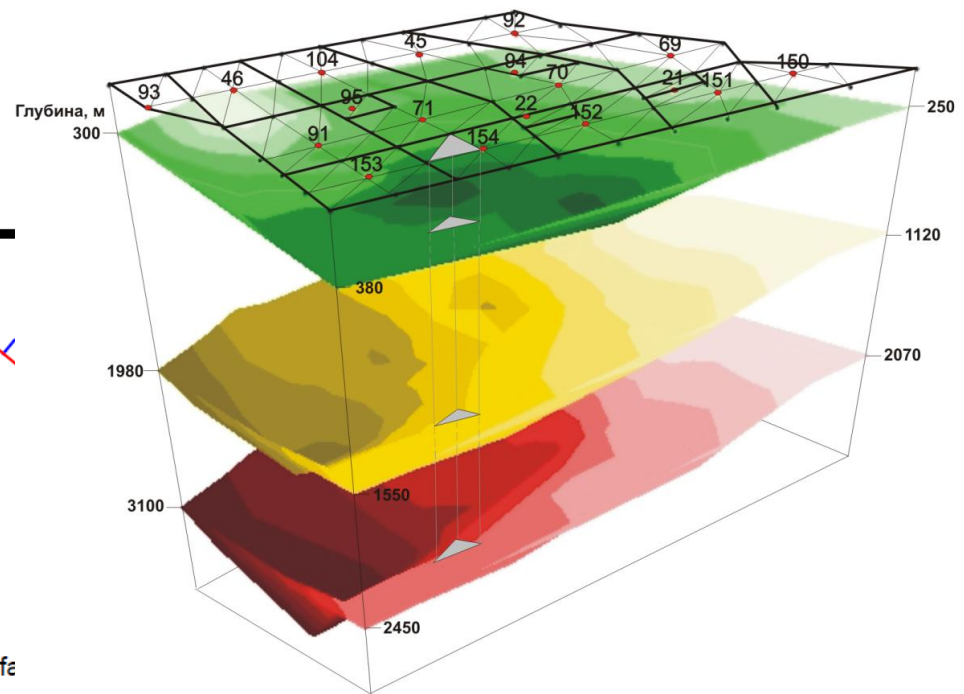
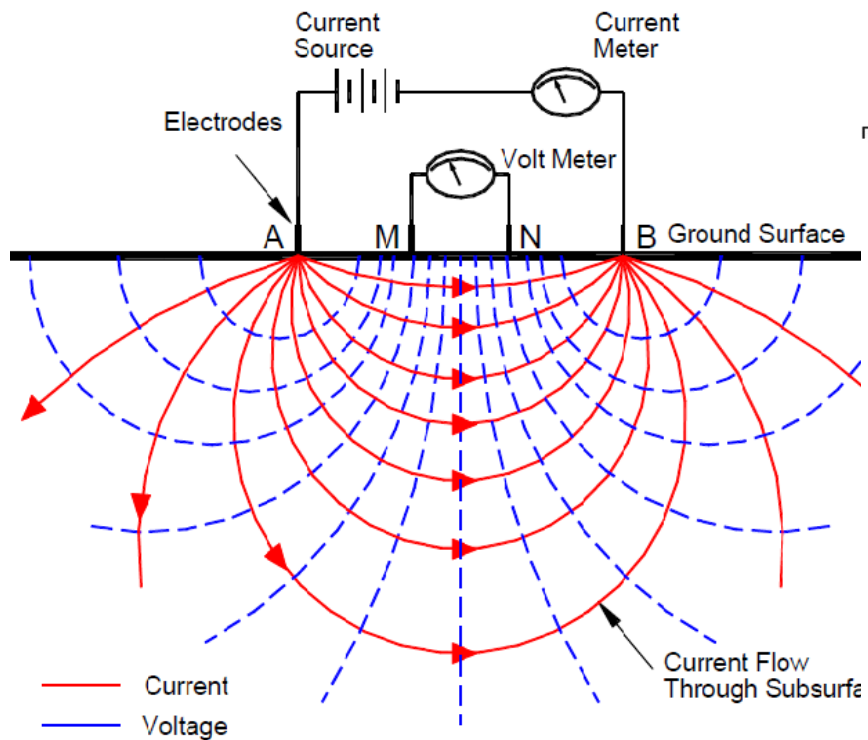
***(ИНГиГ, Новосибирск)***

**Убрау-Дюрсо, сентябрь 2015 г.**

# План

- Цели моделирования
  - Прямая задача вертикального электрического зондирования в методе сопротивлений
  - Прямая задача электротомографии
- Параллельная реализация на GPU
  - Подход к предобуславливанию
- Результаты моделирования

# Установка Шлюмберже в методе ВЭЗ





Оз. Байкал

Верхний  
Куйтун

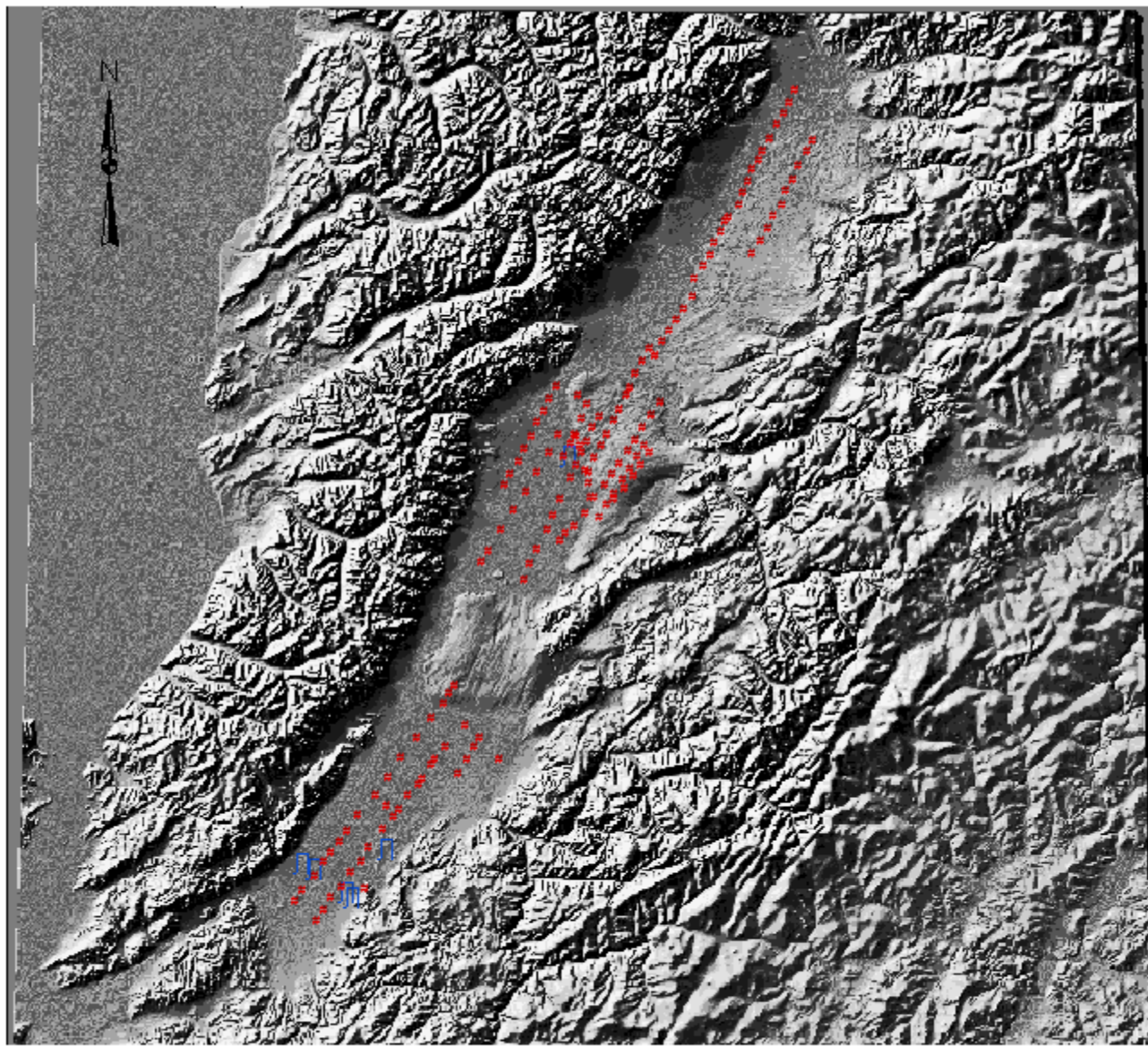
Нижний  
Куйтун

Buryatiya

© 2007 Europa Technologies  
Image © 2007 TerraMetrics

© 2007 Google™

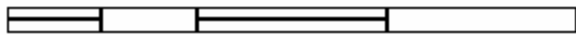




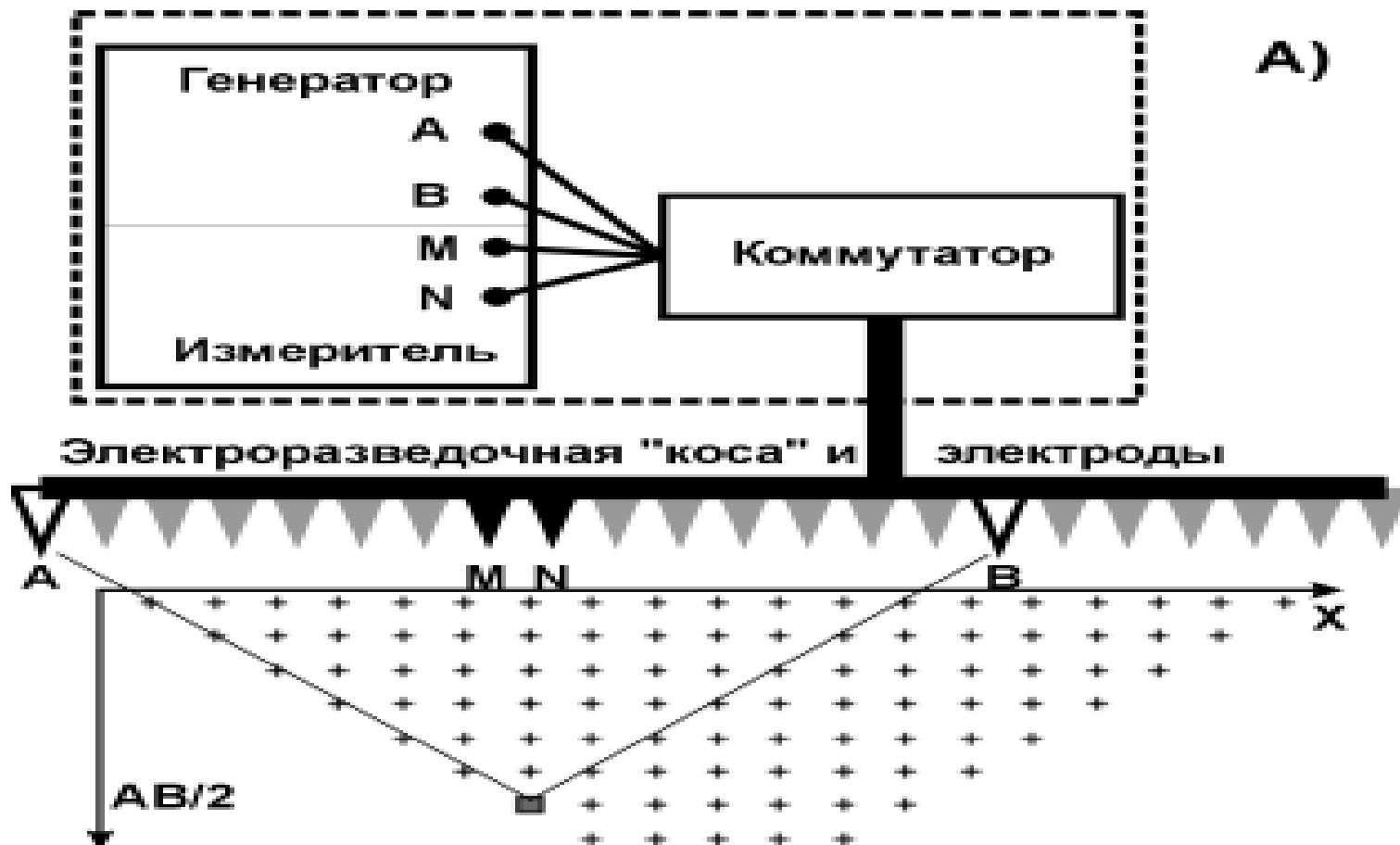
Условные обозначения:

- Пункты ВЭЗ
- Пункты ВЭЗ
- Л Скважины

30 0 30 60 Kilometers



# Многоэлектродная аппаратура для электротомографии



# Постановка задач

- Найти распределение потенциала точечного источника в сложной среде
- Уравнение Пуассона

$$\operatorname{div}(\sigma \nabla U^a) = -\operatorname{div}((\sigma - \sigma_0) \nabla U^0)$$

$$U = U^0 + U^a$$

<b>3D</b>
$\sigma = \sigma(r, \varphi, z)$
7-point stencil



- Разреженная
- Симметричная (после симметризации)
- Положительно определённая
- Нестрогое диагональное преобладание

# Алгоритм симметризации

$$\bar{A} = D^{-1/2} A D^{1/2}, \quad D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$$

$$d_0 = 1,$$

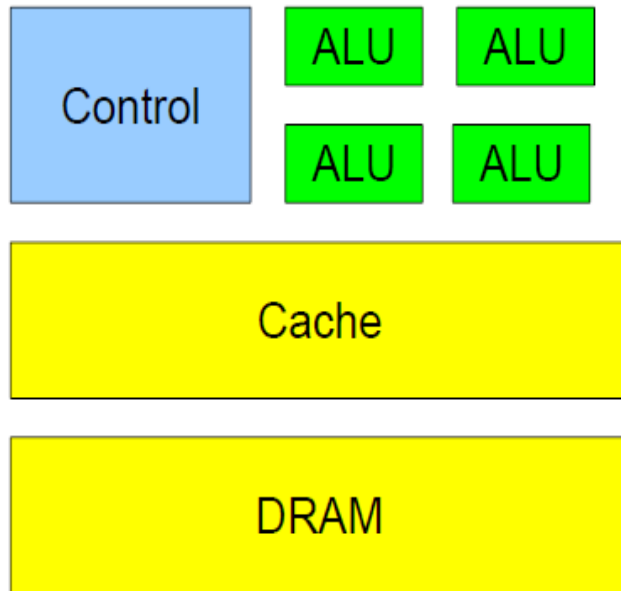
$$d_{jm+i+1} = d_{jm+i} \frac{a_{jm+i+1, jm+i}}{a_{jm+i, (j+1)m+i}}, \quad i = 1, \dots, m-1, \quad j = 0, \dots, l-1$$

$$d_{(j+1)m+1} = d_{jm+1} \frac{a_{(j+1)m+1, jm+1}}{a_{jm+1, (j+1)m+1}}, \quad i = m, \quad j = 0, \dots, l-1$$

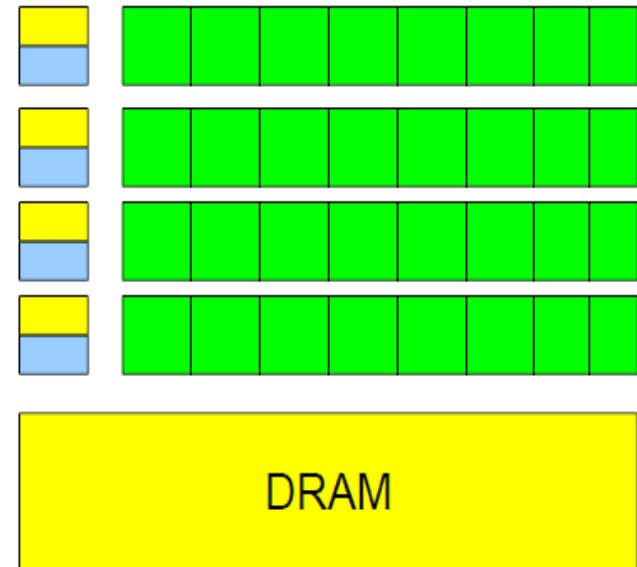
Кузнецов Ю.И., Агапитова Н.С. Математические основы компьютерного моделирования - Ю-Сахалинск: ЮСИЭПИ, 2003, 213 с.



# CPU vs. GPU



**CPU**



**GPU**

- \* Less die space for control and cache
- \* More die space for ALU

# Метод сопряжённых градиентов с предобуславлителем

$$AM^{-1}y=b, x=M^{-1}y$$

$k = 0$ : Initialization:  $x_0, r_0 = b - Ax_0, Mz_0 = r_0, p_0 = z_0$

$k \geq 0$ : While  $\frac{\|r_k\|}{\|r_0\|} > \varepsilon$

1.  $q_k = Ap_k, \alpha_k = \frac{z_k^T r_k}{p_k^T q_k}$

2.  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k, r_{k+1} = r_k - \alpha_k q_k$

3.  $Mz_{k+1} = r_{k+1}$

4.  $\beta_k = \frac{z_{k+1}^T r_{k+1}}{z_k^T z_k}, p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k p_k$

Умножение матрицы на вектор	<i>GPU SpMV kernel</i>
Preconditioning operation	<i>Next Slides</i>
Level-1 BLAS	<i>CUBLAS library</i>

# Алгоритм Хотеллинга-Шульца

$D_0$  – начальное приближение обратной матрицы

Пусть,  $R_0 = E - AD_0$ , если  $\|R_0\| \leq q \leq 1$ , то строим итерационный процесс

$$D_1 = D_0(E + R_0), R_1 = E - AD_1$$

$$D_2 = D_1(E + R_1), R_2 = E - AD_2$$

.....

.....

$$D_m = D_{m-1}(E + R_{m-1}), R_m = E - AD_m$$

$$\|D_m - A^{-1}\| \leq \|D_0\| \frac{q^{2^m}}{1 - q}$$

Если  $A = A^T$  и  $D_0 = D_0^T$ , то  $D_m = D_m^T$

*G. Schulz, Iterative Berechnung der reziproken Matrix, Z. Angew, Math. Mech. 13 (1933)*

*H. Hotelling, Analysis of a complex of statistical variables into principal components, J.Educ.Psych.,(1933)*

*В.Н. Фаддеева, Д.К.Фаддеев.Вычислительные методы линейной алгебры. Физматгиз, Москва, 1963.*

# Построение предобуславливателей

Initial inverse approximation:

$$D_0 = J = \text{diag}\{a_{11}^{-1}, a_{22}^{-1}, \dots, a_{nn}^{-1}\}$$

$$D_1(J) = J + J(I - AJ)$$

$$D_2(J) = D_1 + D_1(I - AD_1) = 2D_1 - D_1AD_1$$

$$\begin{aligned} D_3(J) &= D_2 + D_2(I - AD_2) = \\ &= 2(2D_1 - D_1AD_1) - (2D_1 - D_1AD_1)A(2D_1 - D_1AD_1) \end{aligned}$$

Neumann series:

$$D_1 = D_0(I + R_0)$$

$$D_2 = D_0(I + R_0 + R_0^2 + R_0^3)$$

$$D_3 = D_0(I + R_0 + R_0^2 + R_0^3 + R_0^4 + R_0^5 + R_0^6 + R_0^7)$$

$$D_m = D_0(I + R_0 + R_0^2 + \dots + R_0^{2^m - 1})$$

# Построение предобуславливателей D1

$$D_1 = D_0 + D_0 (I - AD_0)$$

$$d_1^3[i] = \frac{1}{a^3[i]}$$

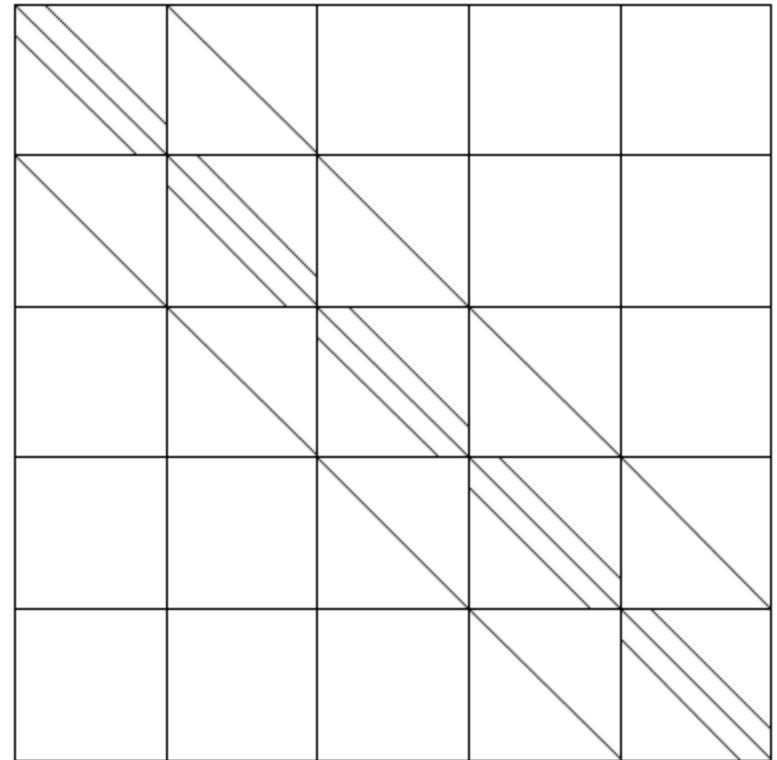
$$d_1^4[i] = -\frac{a^4[i]}{(a^3[i+1] * a^3[i])}$$

$$d_1^5[i] = -\frac{a^5[i]}{(a^3[i+1] * a^3[i])}$$

$d_1^i$  -  $i^{th}$  diagonal of  $D_1$

$a^i$  -  $i^{th}$  diagonal of  $A$

- $D_1$  has the same structure as  $A$
- 5 diagonals for 2D
- 7 diagonals for 3D
- Reuse of the SpMV for matrix  $A$





# Масштабирование коэффициентов матрицы A

- Масштабирование – простейший способ предобуславливания, существенно уменьшающий число обусловленности
- Масштабирование сохраняет симметрию матрицы
- Диагональные элементы матрицы становятся единичными

$$\tilde{A}_{ij} = 1 / \sqrt{A_{ii}} * A_{ij} * 1 / \sqrt{A_{jj}}$$

# Построение предобуславливателей, D1

$$d_1^3[i] = 1 / a^3[i] = 1$$

$$d_1^4[i] = -a^4[i] / (a^3[i+1] * a^3[i]) = -a^4[i]$$

$$d_1^5[i] = -a^5[i] / (a^3[i+m] * a^3[i]) = -a^5[i]$$

Labutun I.B., Surodina I.V. Algorithm for Sparse Approximate Inverse  
Preconditioners in Conjugate Gradient Method

// Reliable Computing (Interval Computations) Journal

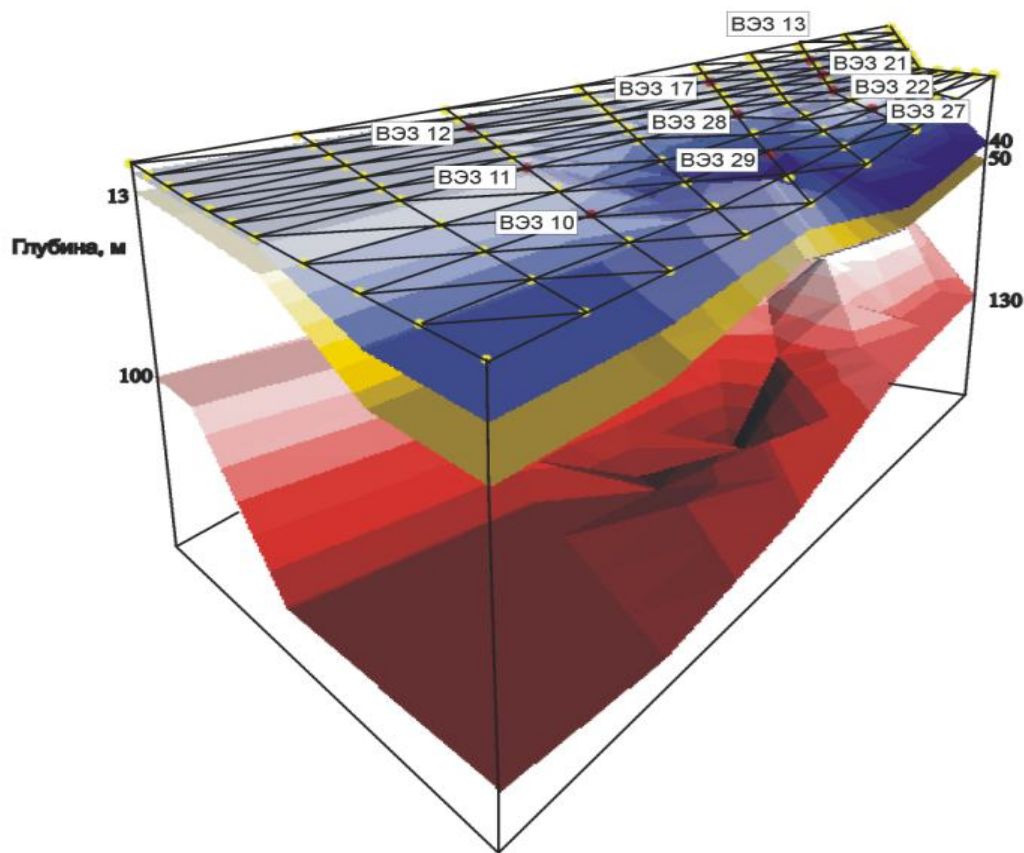
<http://interval.louisiana.edu/reliable-computing-journal/tables-of-contents.html>

[#Volume 18](#)

# Распараллеливание на кластере задачи ВЭЗ

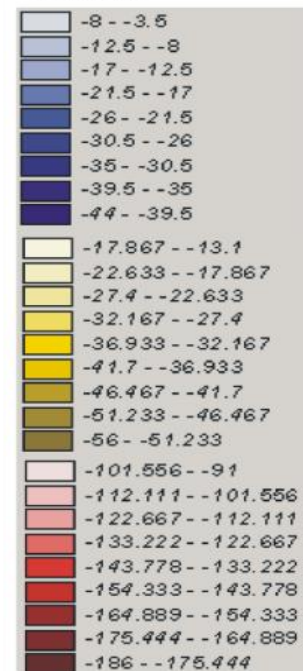
- Два источника (А,В)– два центральных процессора + 2 GPU
- Группировка разносов на сетках (5-6 разносов на сетку)
- 6 разносов – 12 CPU +12 GPU

# Вертикальное электрическое зондирование. Курайская впадина.



## Условные обозначения

Глубина, м



Пункты ВЭЗ



Узлы сетки

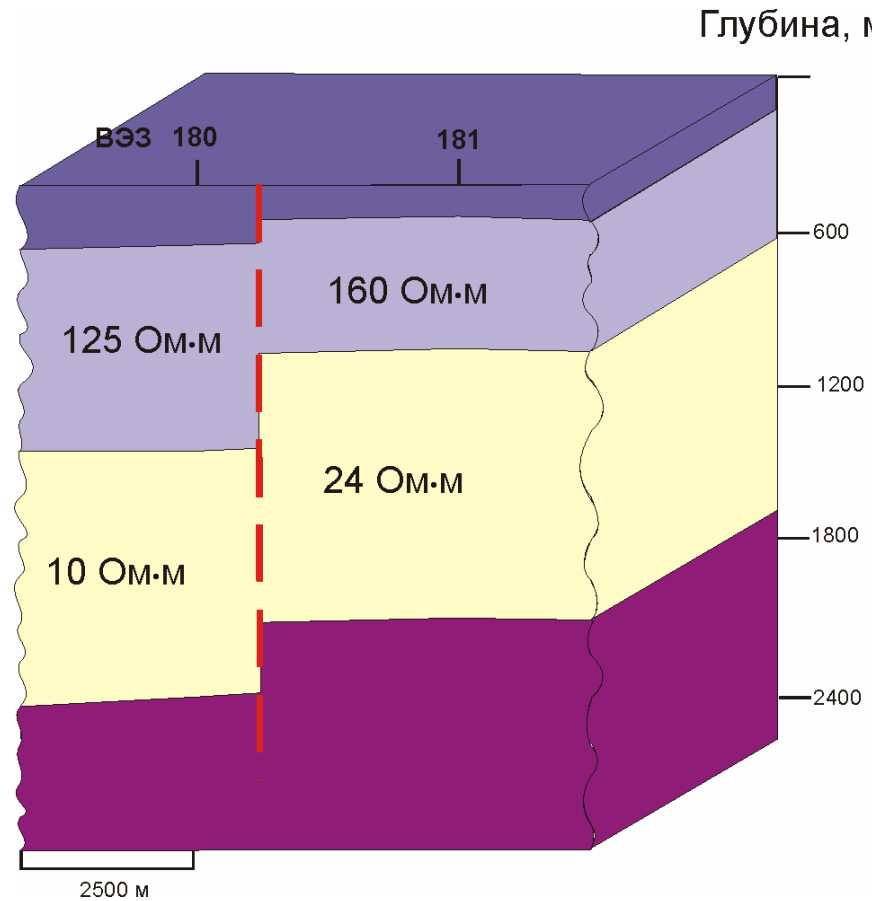


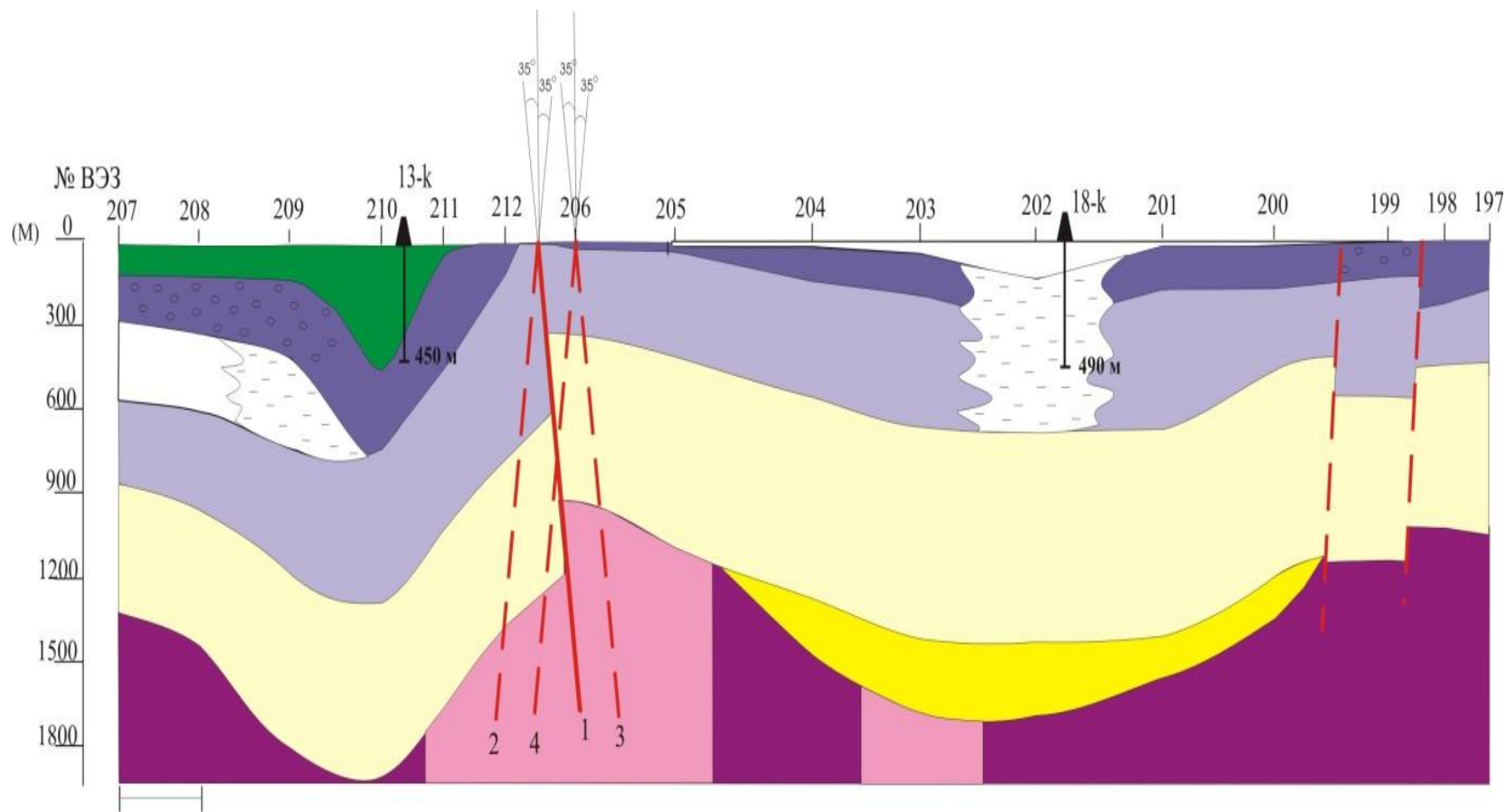
# Вертикальное электрическое зондирование. Курайская впадина, 5 точек профиля

method	N=1325490		N=1432080		N=2859360	
	Time, sec	Speed up	Time, sec	Speed up	Time, sec	Speed up
CPU(SSOR)	900	-	1336	-	1920	
GPU( $D_1$ )	23	39	40	38.3	73	26.3



















# Моделирование разломов. Баргузинская впадина



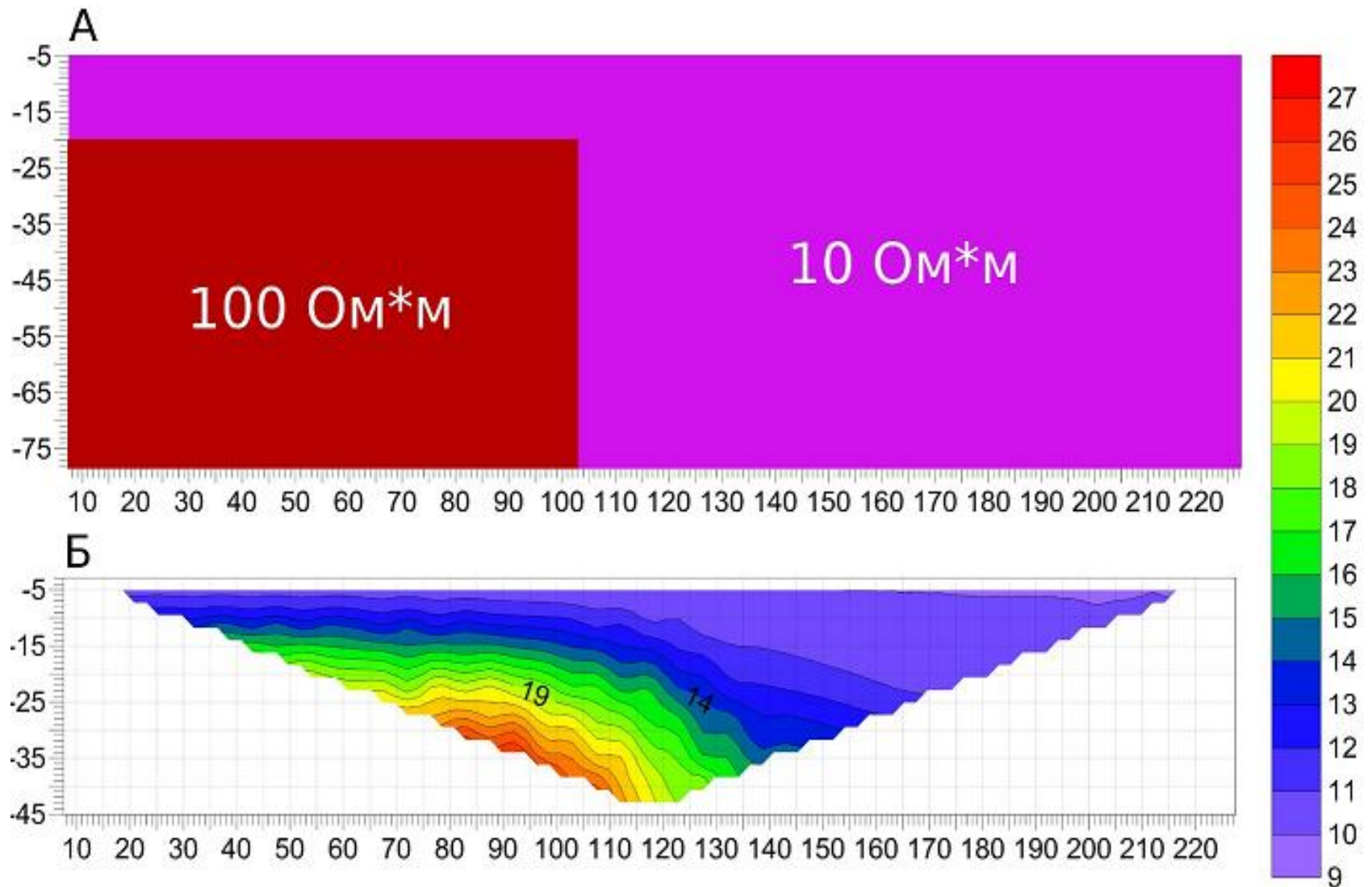


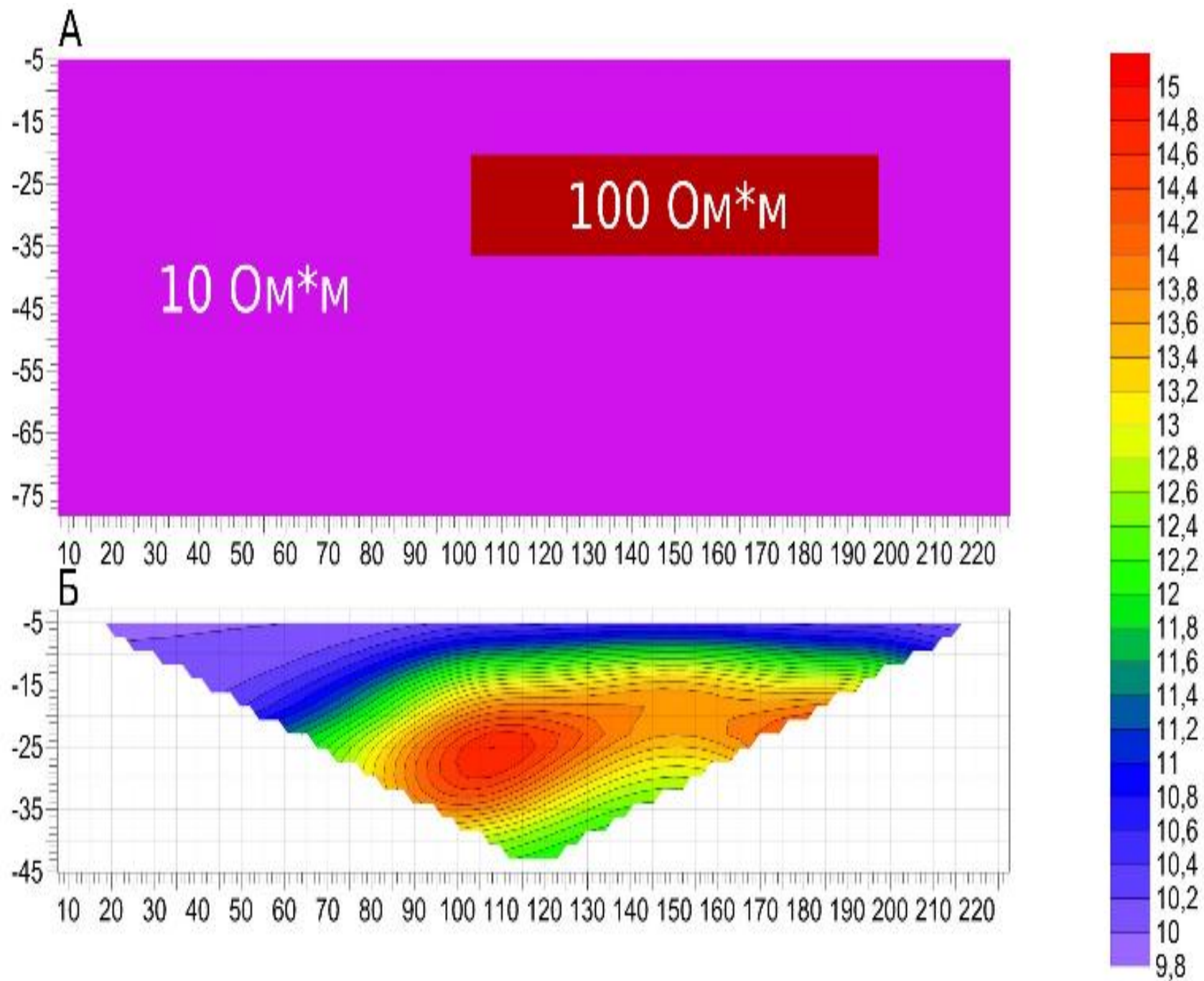
2500 м

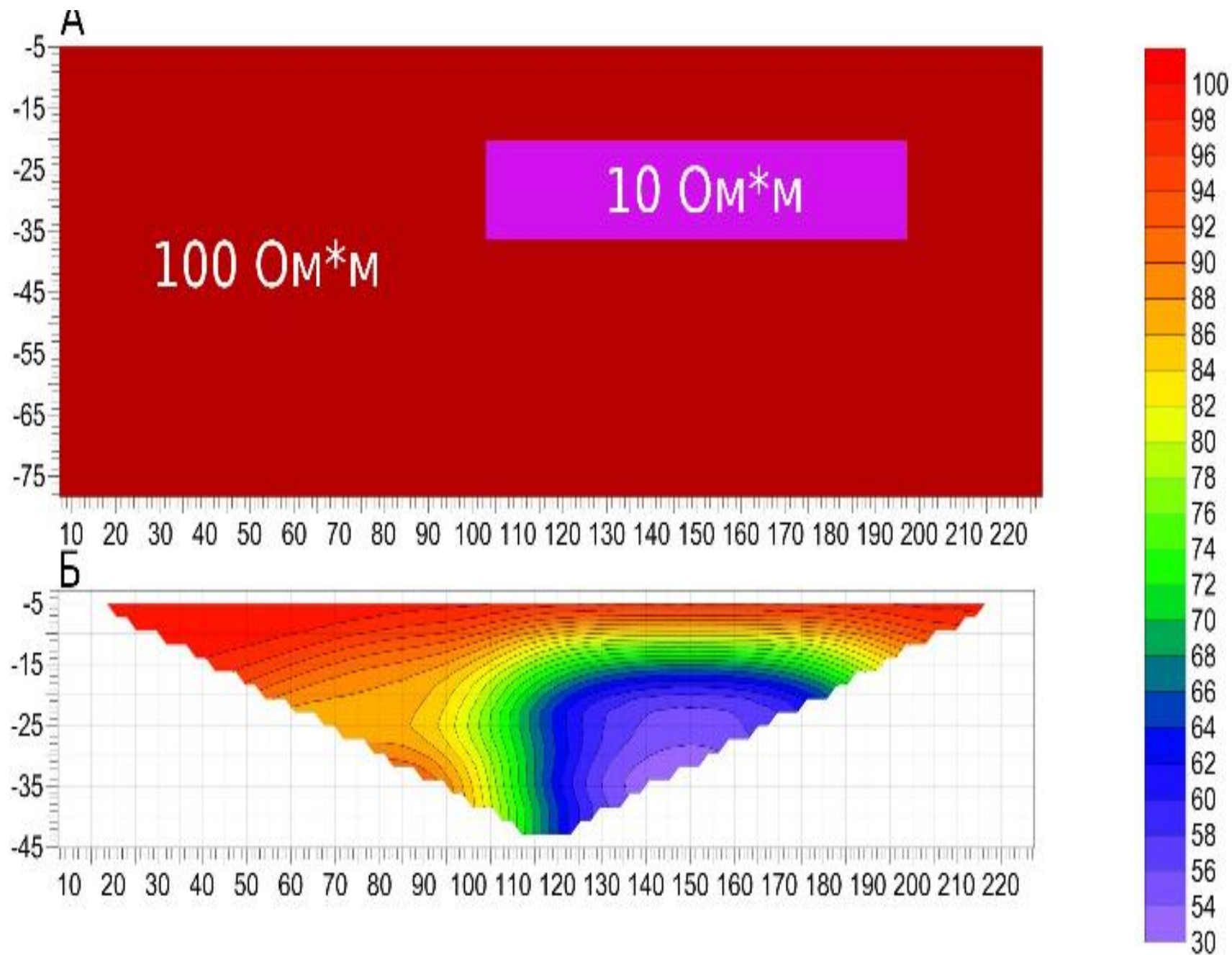
**Условные обозначения:**

 $\rho = >3900 \text{ Ом}\cdot\text{м}$	 $\rho = 230 - 280 \text{ Ом}\cdot\text{м}$	 $\rho = 15 - 29 \text{ Ом}\cdot\text{м}$	 $\rho = 100 - 1000 \text{ Ом}\cdot\text{м}$
 $\rho = 2000 - 2650 \text{ Ом}\cdot\text{м}$	 $\rho = 1900 - 650 \text{ Ом}\cdot\text{м}$	 $\rho = 38 - 50 \text{ Ом}\cdot\text{м}$	 Предполагаемые разломы
 $\rho = 220 - 320 \text{ Ом}\cdot\text{м}$	 $\rho = 100 - 600 \text{ Ом}\cdot\text{м}$	 $\rho = 10000 - 13000 \text{ Ом}\cdot\text{м}$	 Сквжина, ее номер и глубина
 Модель 1	 Модель 2	 Модель 3	 Модель 4

# Электротомография









# Заключение

- Реализованы полностью параллельные программы для задач ВЭЗ и электротомографии
- Программы активно используются для научных расчётов и существенно ускоряют процесс создания итоговых моделей

- Спасибо за внимание!