

**XVI Всероссийская конференция-школа молодых исследователей
«Современные проблемы математического моделирования»,
14-19 сентября 2015, п. Дюрсо, Россия**

Гибридная численная модель ускорения заряженных частиц

Людмила Витальевна Вшивкова (ИВМиМГ СО РАН, Новосибирск)
Галина Ильинична Дудникова (ИВТ СО РАН, Новосибирск)



Дюрсо 2015



Содержание

- Введение
 - Основные определения и модели бесстолкновительной плазмы
- Гибридная модель формирования ударной волны для исследования механизма ускорения космических лучей
 - Геометрия и предположения
 - Исходная система уравнений
 - Нормировка
 - Система уравнений в безразмерном виде
 - Начальные данные и граничные условия
 - Алгоритм вычислений
- Результаты расчетов
- Заключение

Введение

Работа посвящена численному моделированию ускорения заряженных частиц в бесстолкновительной плазме на основе кинетического описания одной из компонент плазмы и гидродинамическом приближении для другой (гибридные модели).



Введение

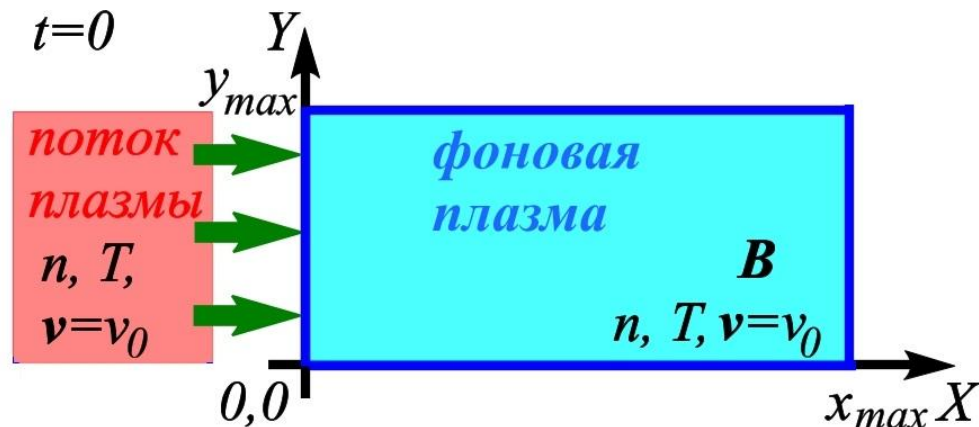
Работа посвящена численному моделированию ускорения заряженных частиц в бесстолкновительной плазме на основе кинетического описания одной из компонент плазмы и гидродинамическом приближении для другой (гибридные модели).



Гибридная численная модель ускорения заряженных частиц

1 Геометрия и предположения

- поток плазмы состоит из ионов водорода и электронов;
- однородное магнитное поле;
- квазинейтральная плазма.



Гибридная численная модель ускорения заряженных частиц

2.1 Исходная система уравнений

Уравнения движения отдельных ионов:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{u}_\alpha,$$
$$m_\alpha \frac{d\vec{u}_\alpha}{dt} = Z_\alpha e \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{u}_\alpha \times \vec{B} \right) + \vec{R}_\alpha.$$

Здесь Z_α – заряд ионов сорта α и \vec{R}_α – сила трения между ионами сорта α и электронами.

Плотность и средняя скорость ионов сорта α :

$$n_\alpha = \int f_\alpha d\vec{u}_\alpha,$$
$$\vec{V}_\alpha = \frac{1}{n_\alpha} \int f_\alpha \vec{u}_\alpha d\vec{u}_\alpha.$$

Гибридная численная модель ускорения заряженных частиц

2.2 Исходная система уравнений

Движение электронов описывается уравнениями:

$$m_e \left(\frac{\partial \vec{V}_e}{\partial t} + (\vec{V}_e \cdot \nabla) \vec{V}_e \right) = -e \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{V}_e \times \vec{B} \right) - \frac{\nabla p_e}{n_e} + \vec{R}_e,$$
$$n_e \left(\frac{\partial T_e}{\partial t} + (\vec{V}_e \cdot \nabla) T_e \right) + (\gamma - 1) p_e \nabla \cdot \vec{V}_e = (\gamma - 1) (Q_e - \nabla \cdot \vec{q}_e).$$

Уравнения Максвелла:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0.$$

Здесь \vec{j} – плотность тока, которая в случае многокомпонентной плазмы имеет вид

$$\vec{j} = e \left(\sum_{\alpha} Z_{\alpha} n_{\alpha} \vec{V}_{\alpha} - n_e \vec{V}_e \right).$$

Гибридная численная модель ускорения заряженных частиц

2.3 Исходная система уравнений

Плазма является квазинейтральной, т.е. $n_e = \sum_{\alpha} Z_{\alpha} n_{\alpha}$;

$\vec{q}_e = -k_1 \nabla T_e$, где k_1 – коэффициент электронной теплопроводности,
 $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$, $\vec{V} = \frac{1}{n_e} \sum_{\alpha} Z_{\alpha} n_{\alpha} \vec{u}_{\alpha}$ – средняя скорость ионов,
 $Q_e = \frac{j^2}{\sigma}$, $\sigma = \frac{n_e e^2}{m_e \nu}$ и силы трения плазме:

$$\vec{R}_1 = -\frac{Z_1 e}{\sigma} \vec{j}, \vec{R}_2 = -\frac{Z_2 e}{\sigma} \vec{j}, \vec{R}_e = -\frac{n_1}{n_e} \vec{R}_1 - \frac{n_2}{n_e} \vec{R}_2.$$

3 Нормировка

Нормировка: $n_0, B_0, V_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi m_i n_0}}, T_0 = \frac{B_0^2}{8\pi n_0}, \omega_{pi} = \sqrt{\frac{4\pi n_0 e^2}{m_i}}, L = \frac{c}{\omega_{pi}},$
 $t_0 = \frac{L}{V_A}, E_0 = \frac{1}{c} B_0 V_A, \beta = \frac{m_e}{m_i}.$

Гибридная численная модель ускорения заряженных частиц

4 Система уравнений в безразмерном виде

Уравнения движения отдельных ионов:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{u}_\alpha, \quad \frac{M_\alpha}{Z_\alpha} \frac{d\vec{u}_\alpha}{dt} = \vec{E} + \vec{u}_\alpha \times \vec{B} - \zeta \frac{1}{n_e} \nabla \times \vec{B}.$$

Движение электронов описывается уравнениями:

$$\beta \left(\frac{\partial \vec{V}_e}{\partial t} + (\vec{V}_e \cdot \nabla) \vec{V}_e \right) = -\vec{E} - \vec{V}_e \times \vec{B} - \frac{1}{2n_e} \nabla p_e + \zeta \frac{1}{n_e} \nabla \times \vec{B},$$
$$n_e \left(\frac{\partial T_e}{\partial t} + (\vec{V}_e \cdot \nabla) T_e \right) + (\gamma - 1) p_e \nabla \cdot \vec{V}_e = (\gamma - 1) \left(2\zeta \frac{1}{n_e} (\nabla \times \vec{B})^2 + \nabla \cdot (\zeta_1 \nabla T_e) \right).$$

Уравнения Максвелла:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \vec{B} = \vec{j}, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0.$$

Здесь $M_\alpha = \frac{m_\alpha}{m_i}$, $\zeta = \frac{m_e v c}{B_0 e}$, $\zeta_1 = \frac{4\pi e \kappa_1}{B_0 c}$, κ_1 – коэффициент теплопроводности.

Гибридная численная модель ускорения заряженных частиц

5 Начальные данные и граничные условия

Начальные данные фоновой плазмы:

$$t = 0: \quad n = n_0 = \text{const}, \quad B_z = B_0 = \text{const}, \quad B_x = B_y = 0,$$

$$T = T_0 = 0, \quad v_x = u_0, \quad v_y = v_z = 0, \quad E_x = E_y = E_z = 0,$$

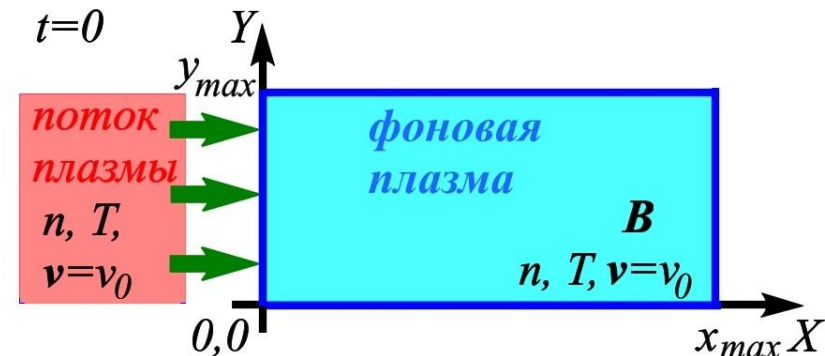
Область решения:

$$0 \leq x \leq x_{\max}, \quad 0 \leq y \leq y_{\max}.$$

Граничные условия:

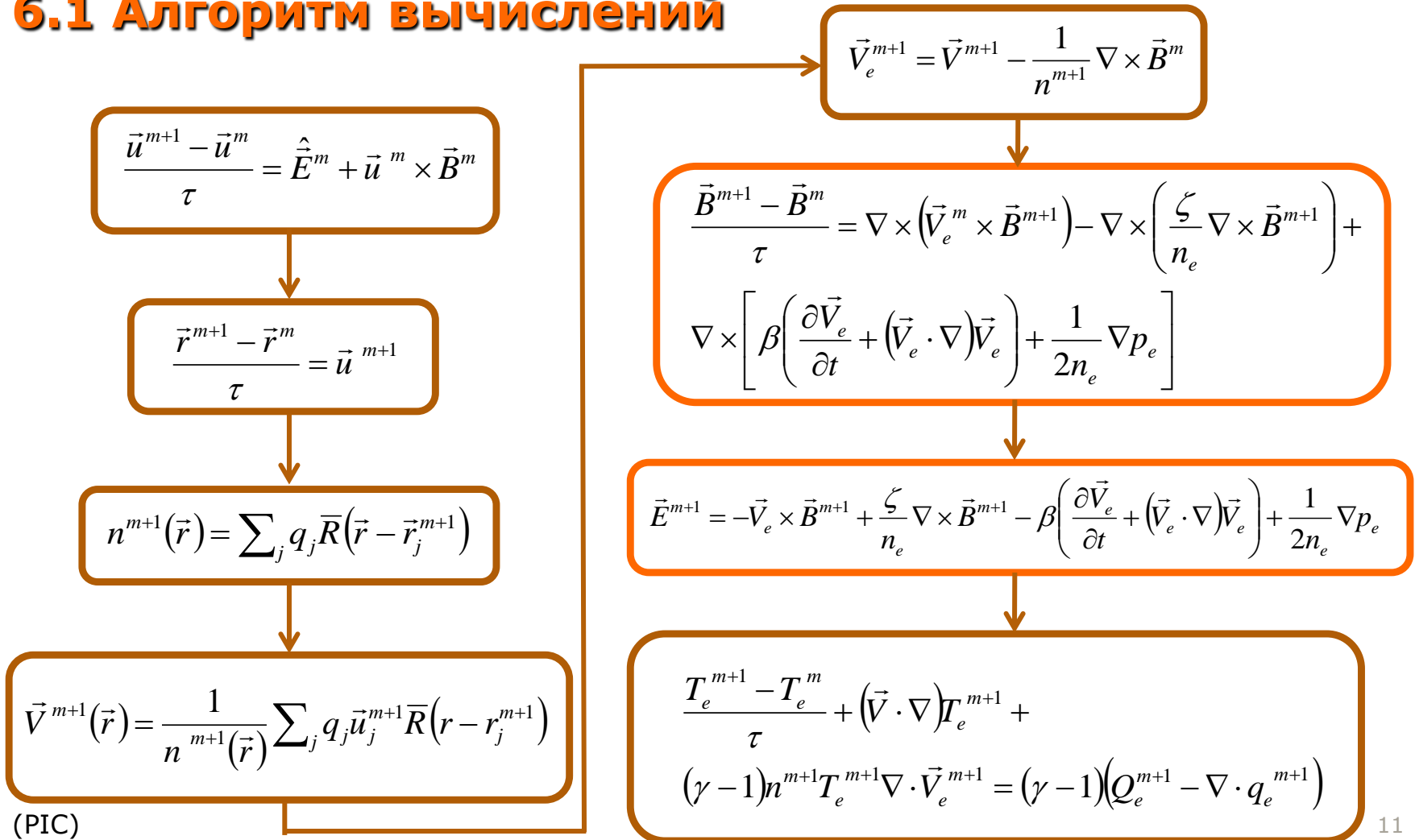
- а) для частиц: $x = 0, x = x_{\max}$ – условия отражения,
 $y = 0, y = y_{\max}$ – периодические условия;

- б)
 $x = 0, x = x_{\max} : E_x = 0, \partial E_y / \partial x = \partial E_z / \partial x = 0, \partial n / \partial x = 0;$
 $y = 0, y = y_{\max} : \text{периодические условия.}$



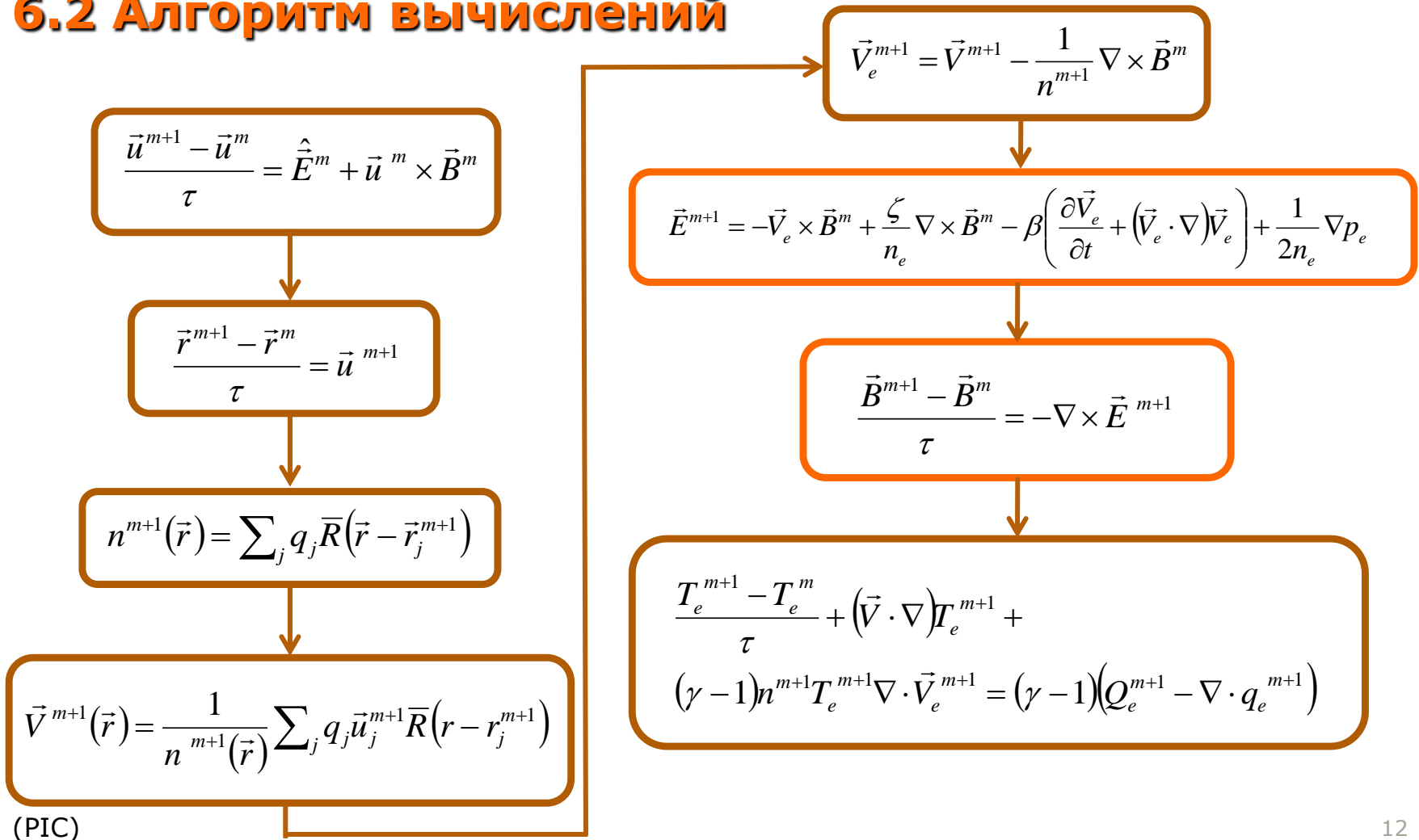
Гибридная численная модель ускорения заряженных частиц

6.1 Алгоритм вычислений



Гибридная численная модель ускорения заряженных частиц

6.2 Алгоритм вычислений

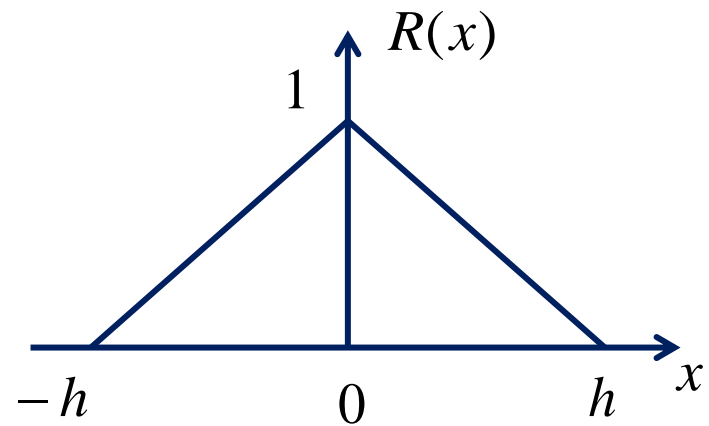


Гибридная численная модель ускорения заряженных частиц

6.3 Алгоритм вычислений

Здесь $\bar{R}(\vec{r}) = \bar{R}(x)\bar{R}(y)$ и

$$\bar{R}(f) = \begin{cases} 1 - \frac{|f|}{h}, & |f| \leq h, \\ 0, & |f| > h, \end{cases} \text{ где } f = \{x, y\}.$$



Вводится равномерная сетка с шагами h_1, h_2 по осям x, y , соответственно. Сеточные функции:

$$B_z \Rightarrow (x_i = ih_1, y_k = kh_2),$$

$$V_x, V_{ex}, E_x, B_y \Rightarrow (x_i, y_{k-1/2} = (k - 0.5)h_2),$$

$$V_y, V_{ey}, E_y, B_x \Rightarrow (x_{i-1/2} = (i - 0.5)h_1, y_k),$$

$$n, T_e, V_z, V_{ez}, E_z \Rightarrow (x_{i-1/2}, y_{k-1/2}).$$

Гибридная численная модель ускорения заряженных частиц 7 Результаты расчетов

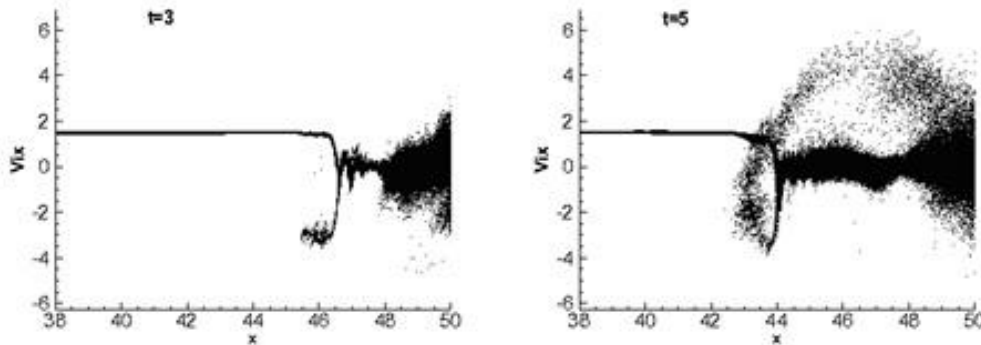


Рис. 1. Фазовые плоскости при $t = 3$ и 5 , $v_0 = 1.5$, $Ma = 2.8$. Отражение ионов ударной волной с вращением по ларморовскому радиусу и образованием квазистационарной структуры, связанной с непрерывным отражением набегающего потока плазмы ударной волной и его вращением во внешнем магнитном поле.

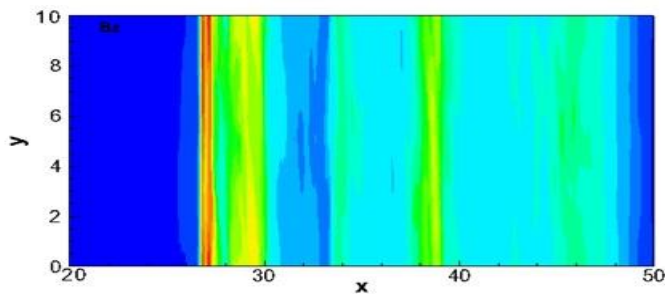


Рис. 2. Магнитное поле B_z .

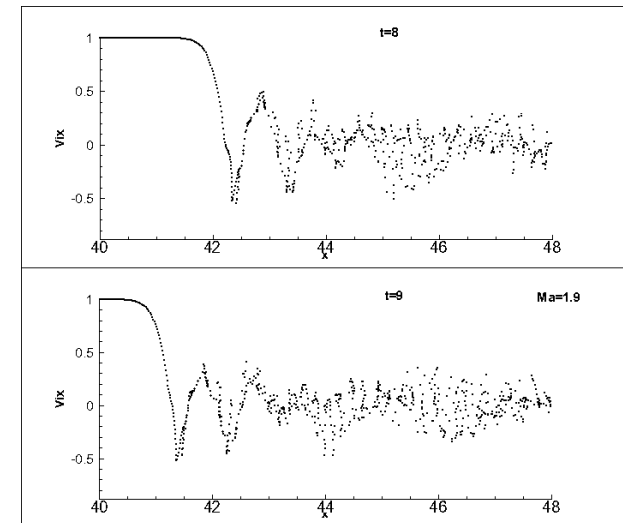


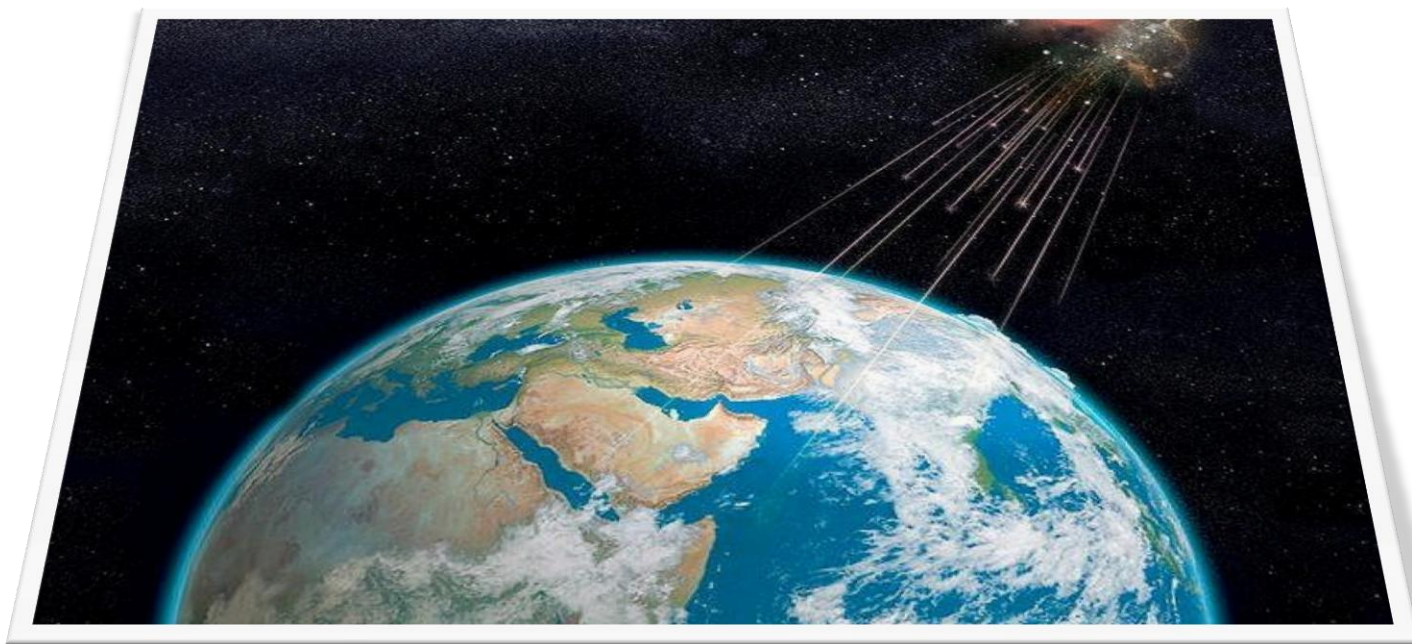
Рис. 3. Фазовые плоскости при $t = 8$ и 9 , $v_0 = 1$, $Ma = 1.9$.

Заключение

- создана новая двумерная численная модель формирования ударной волны для изучения механизма ускорения космических лучей на ее фронте;
- разработан новый численный алгоритм;
- создан программный пакет для численной реализации модели;

- планируется дальнейшая модификация модели для решения задач, приближенных к изучаемому физическому явлению (ускорение космических лучей).

Спасибо за внимание



Публикации

- **Вшивкова Л.В.** Численное моделирование динамики многокомпонентной плазмы // Вестник Новосибирского Государственного Университета, т.3, вып. 2, 2003, стр. 3-20.
- Дудникова Г. И., **Вшивкова Л. В.**, Рэнкин Р. Гибридная модель распространения альфвеновской волны сдвига в бесстолкновительной плазме // Вычислительные технологии, Том 11, № 3, 2006, стр. 50-60.
- **Vshivkova L. V.** Numerical simulation of plasma using the hybrid MHD-kinetic model // Bull. NCC. Ser. Num. An., Iss. 14, 2009, p. 95-114.
- **Вшивкова Л.В.**, Дудникова Г.И. Численные гибридные модели динамики альфвеновских волн. Информационные и математические технологии в науке и управлении // Труды XV Байкальской Всероссийской конференции «Информационные и математические технологии в науке и управлении», ч. 1, Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2010, стр. 166-174.
- **Вшивкова Л.В.**, Дудникова Г.И. Гибридная МГД-кинетическая модель дисперсионных альфвеновских волн // VI Всесибирский конгресс женщин-математиков (в день рождения Софьи Васильевны Ковалевской): Материалы Всероссийской конференции, 15-17 января 2010, Красноярск: РИЦ СибГТУ, 2010, стр. 68-71.
- Дудникова Г.И., **Вшивкова Л.В.** Гибридные численные модели волновых процессов в плазме // Тезисы докладов международной конференции "Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика", посвященная 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Яненко, 2011, стр.88.
- Galina Dudnikova, **Lyudmila Vshivkova**. Hybrid simulation of propagating magnetospheric Alfvén wave in the Earth polar area // Bulletin of the American Physical Society, 53rd Annual Meeting of the APS Division of Plasma Physics, Vol. 56, No. 16, Salt Lake City, Utah, November 14 – 18, 2011.
- **Vshivkova, L.V.** ; Dudnikova, G.I. Numerical modeling of plasma phenomena using the PIC-method // Discharges and Electrical Insulation in Vacuum (ISDEIV), IEEE Publications, 2012 25th International Symposium on, 2012 , Page(s): 398 – 400.
- **L.V. Vshivkova**, G.I. Dudnikova. Dispersion analysis of the hybrid plasma model // Bulletin Nov. Comp. Center, Numerical Analysis, vol. 16, 2013, pp. 101-106.
- **L.V. Vshivkova**, G.I. Dudnikova, T.V. Liseykina, E.A. Mesyats. Hybrid simulation of collisionless shock waves using the PIC-method // Bulletin Nov. Comp. Center, Numerical Analysis, vol. 17, 2015, pp. 79-88.

Гибридная численная модель ускорения заряженных частиц Алгоритм вычислений

$$\frac{M_\alpha}{Z_\alpha} \frac{d\vec{u}_\alpha}{dt} = \vec{E} + \vec{u}_\alpha \times \vec{B} - \zeta \frac{1}{n_e} \nabla \times \vec{B}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{u}_\alpha$$

$$n_\alpha = \int f_\alpha d\vec{u}_\alpha$$

$$\vec{V}_\alpha = \frac{1}{n_\alpha} \int f_\alpha \vec{u}_\alpha d\vec{u}_\alpha$$

(PIC)

$$\nabla \times \vec{B} = \vec{j}$$

$$\beta \left(\frac{\partial \vec{V}_e}{\partial t} + (\vec{V}_e \cdot \nabla) \vec{V}_e \right) = -\vec{E} - \vec{V}_e \times \vec{B} - \frac{1}{2n_e} \nabla p_e + \zeta \frac{1}{n_e} \nabla \times \vec{B}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} n_e \left(\frac{\partial T_e}{\partial t} + (\vec{V}_e \cdot \nabla) T_e \right) + (\gamma - 1) p_e \nabla \cdot \vec{V}_e = \\ = (\gamma - 1) \left(2\zeta \frac{1}{n_e} (\nabla \times \vec{B})^2 + \nabla \cdot (\zeta_1 \nabla T_e) \right) \end{aligned}$$

Гибридная численная модель ускорения заряженных частиц Алгоритм вычислений

$$\beta \left(\frac{\partial \vec{V}_e}{\partial t} + (\vec{V}_e \cdot \nabla) \vec{V}_e \right) = -\vec{E} - \vec{V}_e \times \vec{B} - \frac{1}{2n_e} \nabla p_e + \zeta \frac{1}{n_e} \nabla \times \vec{B}$$

$$E_x = E'_x - \frac{1}{2n_e} \frac{\partial p_e}{\partial x} = \hat{E}_x + \zeta \frac{1}{n_e} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{1}{2n_e} \frac{\partial p_e}{\partial x} = E''_x + \zeta \frac{1}{n_e} \frac{\partial B_z}{\partial y}, \quad E''_x = \hat{E}_x - \frac{1}{2n_e} \frac{\partial p_e}{\partial x},$$

$$E_y = E'_y - \frac{1}{2n_e} \frac{\partial p_e}{\partial y} = \hat{E}_y - \zeta \frac{1}{n_e} \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{1}{2n_e} \frac{\partial p_e}{\partial y} = E''_y - \zeta \frac{1}{n_e} \frac{\partial B_z}{\partial x}, \quad E''_y = \hat{E}_y - \frac{1}{2n_e} \frac{\partial p_e}{\partial y},$$

$$E_z = E'_z = \hat{E}_z + \zeta \frac{1}{n_e} \left[\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right], \quad E''_z = \hat{E}_z.$$

IV этап. $E'_x, \hat{E}_x, E'_y, \hat{E}_y, E'_z = \hat{E}_z \Rightarrow$ V этап (используя E'_x, E'_y, E'_z).

VI этап. $E''_x, E''_y, E''_z = \hat{E}_z \Rightarrow E_x, E_y, E_z \Rightarrow$ VII этап.

Гибридная численная модель ускорения заряженных частиц Результаты расчетов

Параметры расчета:

число частиц в ячейке	16-100
шаг по времени	0.0005
размер сетки по x	500
размер сетки по y	100

скорость пучка	1-20
размер области по x	50
размер области по y	10

Гибридная численная модель ускорения заряженных частиц Результаты расчетов

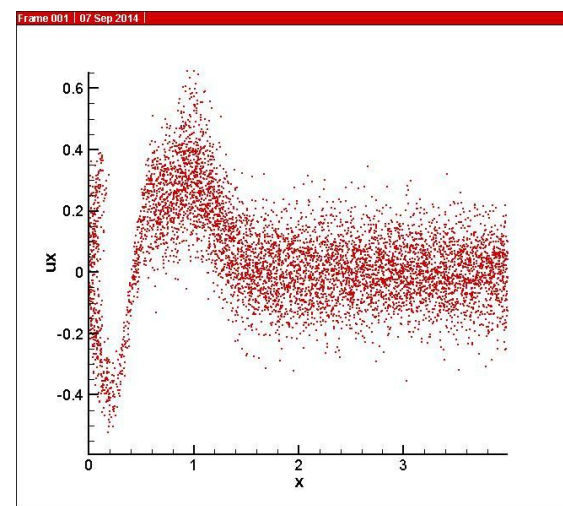
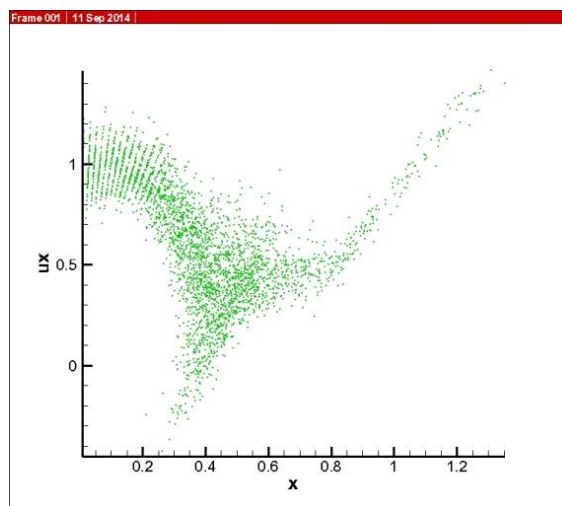
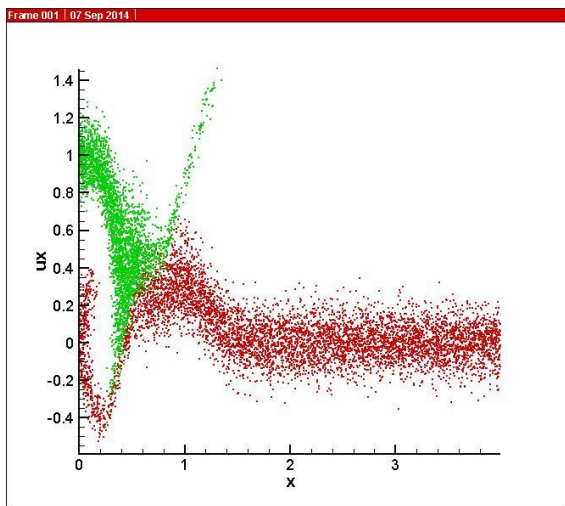
Параметры расчета:

начальное число частиц в области	6400
число частиц в ячейке области	16
число частиц в ячейке пучка	32
шаг по времени	5×10^{-4}
размер сетки по x	40
размер сетки по y	10

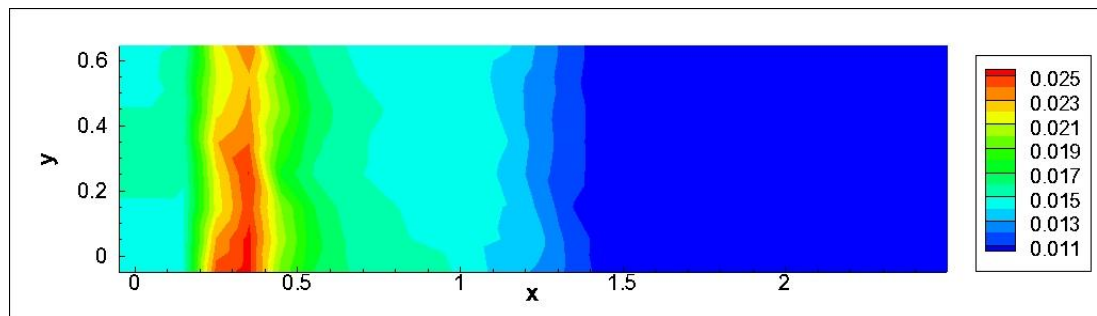
плотность фона	1
плотность пучка	0.5
скорость пучка	1
температура (Te0)	0.01
размер области по x	4
размер области по y	1

Гибридная численная модель ускорения заряженных частиц Результаты расчетов

Фазовые плоскости: 2

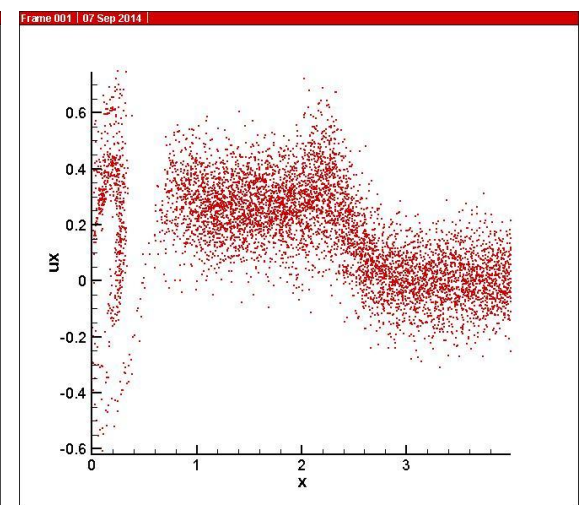
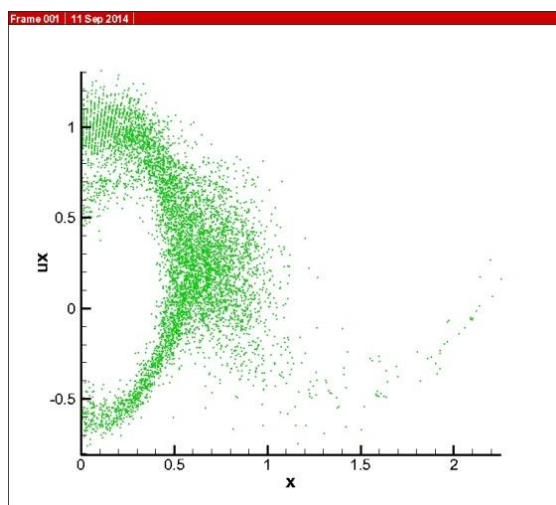
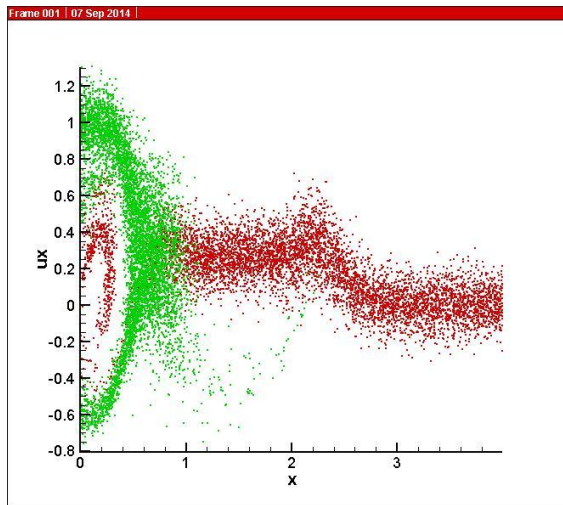


Температура:

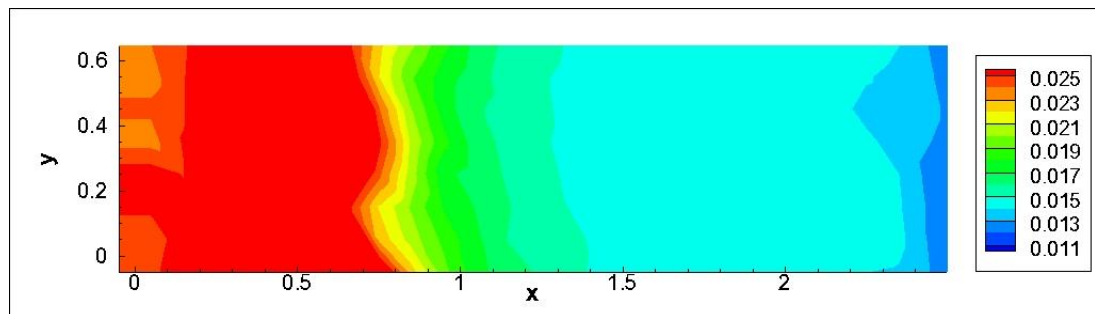


Гибридная численная модель ускорения заряженных частиц Результаты расчетов

Фазовые плоскости: 4



Температура:



Гибридная численная модель ускорения заряженных частиц Результаты расчетов

