

Южный федеральный университет (ЮФУ, г. Ростов-на-Дону)
Институт математики, механики и компьютерных наук
им. И.И. Воровича (ИММиКН, г. Ростов-на-Дону)
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
(ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва)



СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Сборник трудов
XXI ВСЕРОССИЙСКОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

пос. Абрау-Дюрсо, 15–20 сентября 2025

Ростов-на-Дону – Таганрог
Издательство Южного федерального университета
2025

УДК 519.6+004.942(063)
ББК 22.19+87.256.631.0 я431
С56

Ответственные редакторы:

Муратова Г. В., Шабас И. Н.

С56 Современные проблемы математического моделирования :
сборник трудов XXI Всероссийской научной конференции (пос. Абрау-
Дюрсо, 15–20 сентября 2025) / отв. ред. Г. В. Муратова, И. Н. Шабас ;
Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону ; Таганрог :
Издательство Южного федерального университета, 2025. – 104 с.
ISBN 978-5-9275-5146-0

В сборнике представлены доклады участников XXI Всероссийской научной конференции «СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ», посвященной памяти Л.А. Крукиера, организованной Южным федеральным университетом, Институтом математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича и Институтом прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, проходившей с 15 по 20 сентября 2025 года в поселке Абрау-Дюрсо, Новороссийск, Россия. В работе конференции приняли участие представители научных центров Екатеринбурга, Самары, Черноголовки, Жуковского, Новосибирска, Таганрога и Ростова-на-Дону.

УДК 519.6+004.942(063)
ББК 22.19+87.256.631.0 я431

ISBN 978-5-9275-5146-0

© ИММиКН им.И.И.Воровича ЮФУ, 2025
© Южный федеральный университет, 2025

Оглавление

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ГИДРОДИНАМИКА ПОДВОДНЫХ БИОМИ- МЕТИЧЕСКИХ РОБОТОТЕХНИЧЕСКИХ АППАРАТОВ Аббасов И.Б.	5
СТЕПЕННЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ ПОЛИКРИСТАЛЛОВ Ахметова М.А., Николаев Д.Н., Острик А.В.	10
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭФФЕКТА ОЛЛИ В ПОПУЛЯЦИИ ХИЩНИКА Гайбарян С.А., Зеленчук П.А.	16
МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ФОРМЫ ЖИДКИХ ВКЛЮЧЕ- НИЙ В КРИСТАЛЛЕ И МАССОПЕРЕНОСА В НИХ: ОТ ОДНОМЕР- НОГО ДО ТРЕХМЕРНОГО Гармашов С.И.	21
СРЕДА ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ VVFLOW — ФУНКЦИ- ОНАЛЬНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ И НАУЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ Дынников Я.А.	28
МОДЕЛЬ ЭВОЛЮЦИОННО СТАБИЛЬНОЙ СТРАТЕГИИ ДЛЯ БИО- ЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДИФФУЗИЕЙ Зеленчук П.А.	30
О НЕКОТОРЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ ОБРАБОТКИ РАЗРЕЖЕННЫХ МАТРИЦ В ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ Игнатенко И.Д., Оганесян П.А., Фоменко Е.И.	36
ВЫДЕЛЕНИЕ ПРИКАТОДНОЙ ОСОБЕННОСТИ ПРИ МОДЕЛИРО- ВАНИИ ИНТЕНСИВНЫХ ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ Комаров Д.С., Свешников В.М.	41
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ РЕГУЛЯРНЫХ И СИНГУЛЯРНЫХ МАТРИЧНЫХ ПУЧКОВ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ Мартынова Т.С., Муратова Г.В., Оганесян П.А., Игнатен- ко И.Д.	47
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ НА ИНТЕРФЕЙСЕ ПРИ ДЕКОМПОЗИЦИИ 2D РАС- ЧЁТНОЙ ОБЛАСТИ Неборский И.К., Свешников В.М., Яклюшин А.М.	55
АЛГОРИТМЫ УСВОЕНИЯ ДАННЫХ ДЛЯ ЗАДАЧ МОДЕЛИРОВА- НИЯ АТМОСФЕРНОЙ ХИМИИ ГОРОДОВ Пененко А.В.	59

ПРИМЕНЕНИЕ НЕКОНФОРМНОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА ПРИ БУРЕНИИ ВЕРТИКАЛЬНЫХ СКВАЖИН

Петров М.Н., Марков С.И...... 65

НЕКОТОРЫЕ ПОДХОДЫ К ПОВЫШЕНИЮ МОТИВАЦИИ СТУДЕНТОВ В СОВРЕМЕННОМ ОБЩЕСТВЕ

Пичугина О.А...... 67

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТЬЮРИНГА В СИСТЕМЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Ревина С.В...... 71

ПОСТОЯННЫЕ ФУНКЦИИ НА КЛАССАХ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ РАВНОУГОЛЬНЫХ ФРЕЙМОВ

Севостьянова В.В...... 79

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ В ПОРИСТОМ ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ ПРИ НЕОДНОРОДНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

Селищев А.А., Цибулин В.Г...... 81

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ТЕПЛОФИЗИКИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ В АРКТИКЕ

Филимонов М.Ю., Ваганова Н.А...... 82

МОДЕЛЬ ПОСТРОЕНИЯ ТРАЕКТОРИЙ ОСМОТРА СЛОЖНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Шапошников Д.Г., Шапошникова И.Ю...... 90

ДЕТАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ОБОНЯТЕЛЬНОЙ ЛУКОВИЦЫ КРЫСЫ

Шапошников П.Д., Аверин А.В...... 98

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ГИДРОДИНАМИКА ПОДВОДНЫХ БИОМИМЕТИЧЕСКИХ РОБОТОТЕХНИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

Аббасов И.Б.

*Южный федеральный университет,
Инженерно-технологическая академия*

Введение

Биомиметика использует идеи из биологического мира, имитируя особенности, поведение и функции организмов. Она позволяет создавать уникальные конструкции, которые направлены на повышение скорости, надежности и маневренности подводных устройств, а также на снижение помех и шума. В последние десятилетия наблюдается стремительный рост интереса к подводным робототехническим изделиям, что связано с увеличением потребности в проведении различных подводных операций, мониторинг экосистем, выполнение строительных и ремонтных работ, а также поисково-спасательные операции. В условиях сложной подводной среды, где действуют различные физические факторы, применение вычислительной гидродинамики становится важным аспектом разработки и оптимизации подводных робототехнических изделий.

Цель исследования

Статья посвящена обзору основные методы вычислительной гидродинамики, включая численные модели и алгоритмы, используемые для симуляции потоков жидкости вокруг подводных роботов робототехнических систем [1], [2]. Основная цель работы показать уровень исследований работ в области биомиметики, для оценки и анализа перспектив.

Методы моделирования

В работе используются основные методы вычислительной гидродинамики, включая численные модели и алгоритмы, используемые для симуляции потоков жидкости вокруг подводных роботов и существующее программное обеспечение, позволяющее моделировать и рассчитывать гидродинамические показатели различных робототехнических систем [3], [4]. В работе [5] для исследований используется метод вычислительной гидродинамики.

Создана реалистичная трёхмерная модель поверхности дельфина с использованием кинематики плавания, реконструированной по видеозаписи. Трёхмерная модель дельфина была создана в Autodesk Maya, с обеспечением гладкости поверхности модели. Упрощенная поверхностная сетка, разделяющая тело, показана на рис.1(a2) и (b2). Модель поверхности была оснащена анатомически реалистичным виртуальным скелетом, для реалистичного управления позой модели дельфина и соответствующей деформацией кожи.

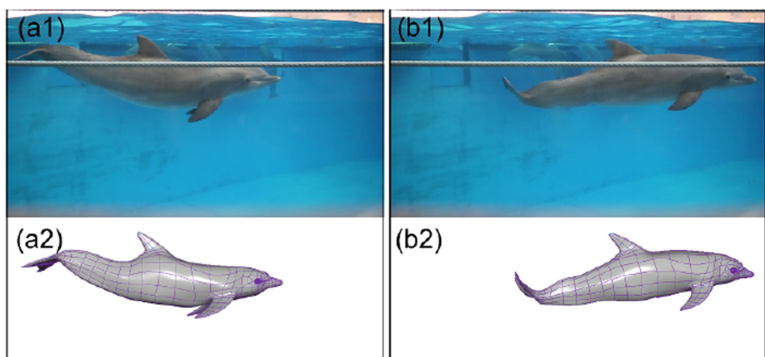


Рис. 1: Реконструкция кинематики плавания дельфина, (a1) и (b1) кадры высокоскоростной видеозаписи, (a2) и (b2) вычислительная модель дельфина с упрощенной поверхностной сеткой [5]

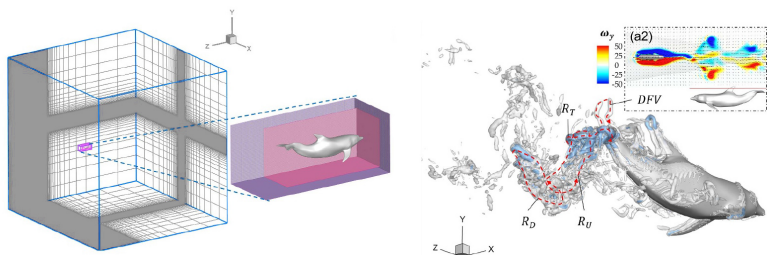


Рис. 2: Настройка вычислительной сетки: с количеством ячеек грубой и плотной настройки сетки 7,0 миллионов и 41,6 миллиона ячеек. Структура кильватерного следа колеблющегося дельфина [5]

Модель дельфина совершала колебания на месте, при этом на отрицательной границе z было применено граничное условие притока с постоянной скоростью, на положительной границе z – граничное условие оттока, а на положительной границе x и y – условия отсутствия градиента для скорости потока. Давление на всех границах регулировалось граничным условием Неймана. Для пространственной дискретизации области использовалась декартова сетка, которая показана на рисунке 2(а). Вокруг тела дельфина была создана плотная область с равномерным шагом сетки, растягивающиеся сетки окружали плотную область, при этом коэффициент растяжения в области следа за дельфином был установлен равным 0,65, так что шаг сетки на выходе ($\Delta z=0,05$) был достаточно мал для разрешения вихрей сопоставимых размеров.

Работа [6] посвящена исследованию рыб-батонидов, которые обладают высокой маневренностью за счет взмахов грудных плавников со сложными волнообразными движениями. Чтобы выявить влияние кинематики движения плавников на крутящий момент, численно изучается модель ската-корононоса с асимметричной локомоцией левого и правого грудных плавников. Результаты моделирования показывают, что картины течения за левым и правым плавниками сильно различаются из-за разной кинематики движения (рис.3). Данная работа может быть использована при разработке системы управления маневренностью подводных роботов, основанных на волнообразной форме движения плавников.

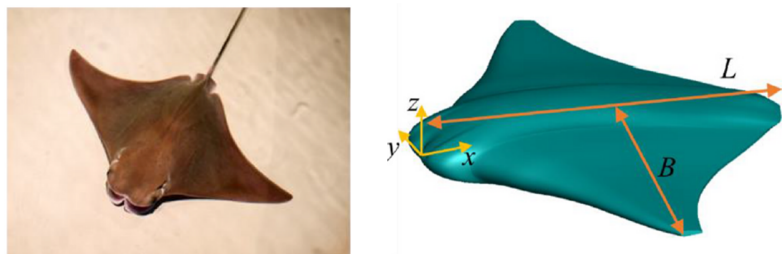


Рис. 3: Корононосый скат *Rhinoptera javanica* и трёхмерная модель ската-корононоса с амплитудой колебаний кончиков плавников

Расчетная область и сгенерированная сетка жидкости вокруг поверхности носового луча показаны на рис. 4. На поверхности модели применяется условие прилипания (при этом нормальная и касательная скорости жидкости на твердой неподвижной границе равны нулю). Это предположение, что при контакте жидкости с твердой стенкой скорость на стенке равна нулю, а на остальных границах – условие неотражающей дальней зоны.

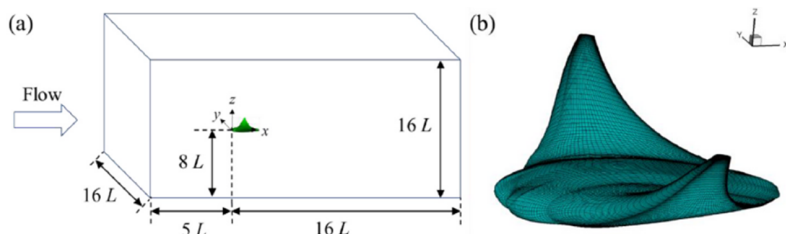


Рис. 4: Макет вычислительной области (не в масштабе) (а) и созданная сетка среднего размера вокруг поверхности ската (б)

На рис.5 представлены структуры трёхмерной завихрённости вокруг левого и правого плавников.

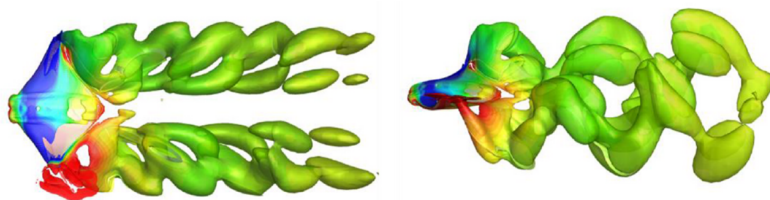


Рис. 5: Трёхмерные структуры поперечной завихрённости вокруг левого и правого ребер, на дорсальном виде и на виде слева

Заключение

В работе наглядно были иллюстрированы достигнутые результаты в области вычислительной гидродинамики биомиметических подводных объектов. Результаты визуализации представлены в виде трёхмерных следов, что подчёркивает уровень исследований в данной области [7], [8]. Для примера были представлены биомиметические модели подводных объектов в виде дельфина, и в виде ската. Эти биологические объекты используют разные механизмы движения. В заключение можно подчеркнуть важность применения вычислительных методов в процесс проектирования подводных роботов для достижения высоких эксплуатационных характеристик и расширения их функциональных возможностей.

Литература

1. *Sfakiotakis M., Lane D. M., Davies J. B. C.* Review of fish swimming modes for aquatic locomotion //IEEE Journal of oceanic engineering. – 1999. – Т. 24. – №2. – Р.237-252.
2. *Бургов Е.В., Буш А.Г., Орлинский Е.П., Малышев А.А.* Двигательные системы исследовательских малозаметных подводных роботов, подобных рыбам. Обзор// Подводные исследования и робототехника. 2022. №1(39). С.17–31. DOI:10.37102/1992-4429_2022_39_01_02.
3. *Gao P., Huang Q., Pan G., Song D., Gao Y.* Research on Swimming Performance of Fish in Different Species//Phys. Fluids 2023, 35, 061909. <https://doi.org/10.1063/5.0154914>
4. *Li X., Gu J., Su Z., Yao Z.* Hydrodynamic Analysis of Fish Schools Arranged in the Vertical Plane //Phys. Fluids 2021, 33, 121905. <https://doi.org/10.1063/5.0073728>
5. *Luo Y., Xu T., Huang Q., Hou Z., Pan G.* A Numerical Investigation on Thrust and Torque Production of a Batoid Fish with Asymmetric Pectoral Fins Flapping //Ocean Eng. 2022, 263, 112342. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.112342>
6. *Guo J., Zhang W., Han P., Fish F.E., Dong H.* Thrust Generation and Propulsive Efficiency in Dolphin-like Swimming Propulsion. //Bioinspir. Biomim. 2023, 18, 056001. DOI:10.1088/1748-3190/ace50b
7. *Аббасов И.Б., Тихомиров С.А.* Обзор некоторых современных автономных биомиметических подводных аппаратов //Cifra. Машиностроение. 2024. N 3 (4). DOI:10.60797/ENGIN.2024.4.1 <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=68928997>
8. *Гриценко Д.А., Аббасов И.Б.* Обзор тенденций в разработке биомиметических подводных аппаратов //Известия ЮФУ. Технические науки. 2025. N 1 (243). С. 185-203. DOI:10.18522/2311-3103-2025-1-185-203

СТЕПЕННЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ ПОЛИКРИСТАЛЛОВ¹

Ахметова М.А., Николаев Д.Н., Острик А.В.

*Федеральный исследовательский центр проблем химической
физики и медицинской химии РАН, Черноголовка*

Введение

В настоящее время имеется представительный набор уравнений состояния (УРС) поликристаллических тел, в том числе, и табличных. Однако при их использовании в численных кодах значительная часть времени затрачивается не на численное решение дифференциальных уравнений рассматриваемой задачи, а на интерполирование 2D-таблиц термодинамических функций в зависимости от параметров состояния. На практике часто требования к точности описания поведения вещества не столь высоки, как достигаемые в табличных УРС. Поэтому целесообразна разработка малопараметрических УРС с информацией в аналитическом виде или на основе 1D-таблиц. В этом случае для аналитического представления термодинамических потенциалов оказываются удобными степенные функции определенных видов.

В работе строятся малопараметрические УРС для полиморфных форм (ПФ) диоксида кремния в области сжатия. Диоксид кремния (кремнезем) относится к группе основных порообразующих минералов и входит в состав коры и мантии Земли, а также других планет. Построение УРС кремнезема при высоких давлениях требуется при исследованиях формирования и эволюции космических тел, в том числе, и при прогнозировании последствий их столкновения. Кроме того, диоксид кремния используется в динамических экспериментах в качестве эталонного материала в методе отражения. Метод отражения предполагает наличие надежных УРС для описания поведения материала эталона при высоких давлениях. При ударном сжатии переход SiO_2 (α -кварца) в кристаллические модификации (в коэсит, а затем в штишовит) и в расплав требует заметных затрат энергии, и при построении УРС учет полиморфизма важен [1].

¹Работа выполнена в рамках Госзадания № FFSG-2024-0001

I Основные соотношения уравнений состояния

Уравнения состояния записываются в форме Ми-Грюнайзена:

$$E = E(\rho, T) = E_c(\rho) + E_T(\rho, T) = E_c(\rho) + \int_0^T C_v(\rho, T) dT, \quad (1)$$

$$P = P_c + P_T = P_c(\rho) + \Gamma(\rho, T)\rho E_T = \rho^2 \frac{dE_c}{d\rho} + \Gamma(\rho, T)\rho \int_0^T C_v(\rho, T) dT,$$

где ρ – плотность вещества; E , E_c , E_T – полная, холодная и тепловая удельные внутренние энергии; P , P_c , P_T – полное, холодное и тепловое давления; $\Gamma(\rho, T)$ – функция Грюнайзена; $C_v(\rho, T)$ – удельная теплоемкость при постоянном объеме.

Для дебаевского приближения с температурой Дебая $\theta_D(\rho)$, зависящей от плотности, имеем (ν – число атомов в молекуле, $x = \theta_D(\rho)/T$, S – удельная энтропия, S_0 – константа, зависящая от уровня отсчета энтропии)

$$E_T(\rho, T) = \frac{3RT\nu}{\mu} D(x), \quad C_v = \frac{9R\nu}{\mu} \left(\frac{4}{3} D(x) - \frac{x}{e^x - 1} \right),$$

$$S = \frac{3R\nu}{\mu} \left(\frac{4}{3} D[x] - \ln(1 - e^{-x}) \right) + S_0, \quad (2)$$

где функция Дебая $D(x)$ рассчитывается по формуле

$$D(x) = \frac{3}{x^3} \int_0^x \frac{t^3 dt}{e^t - 1}.$$

В рамках этого приближения функция Грюнайзена не зависит от температуры и определяется соотношением

$$\Gamma(\rho) = \Gamma_0(\rho) = -\frac{d \ln(\theta_D)}{d \ln(1/\rho)}, \quad (3)$$

что обеспечивает выполнение условия термодинамической совместности [2].

Для поликристаллического тела функция Грюнайзена определяется из известного обобщенного соотношения Ващенко–Зубарева ($t = 0$ – теория Ландау–Слэтера; $t = 1$ – теория Дуглейла–Макдональда; $t = 1$ – теория свободного объема)

$$\Gamma_0(\rho) = \frac{t-2}{3} - \frac{1}{2\rho} \frac{\frac{d^2}{d(1/\rho)^2}(\rho^{-\gamma} P_c(\rho))}{\frac{d}{d(1/\rho)}(\rho^{-\gamma} P_c(\rho))}, \quad P_c(\rho) = -\frac{dE_c}{d(1/\rho)}, \quad \gamma = \frac{2t}{3}. \quad (4)$$

II Степенные потенциалы

Из приведенных соотношений следует, что при сделанных предположениях УРС полностью могут быть построены заданием лишь одной функции: удельной холодной энергии от плотности. Зададим её в степенной форме

$$E_c = \frac{K_0}{(n-m)\rho_0} \left(\frac{\delta^n}{n-1} - \frac{\delta^m}{m-1} \right) + E_0, \quad \delta = \frac{\rho}{\rho_0},$$

где δ – степень сжатия; ρ_0, K_0 – плотность и объемный модуль сжатия при давлении и абсолютной температуре равных нулю; E_0 – константа, зависящая от уровня отсчета энергии; n, m – параметры потенциалов ($n > m$). Тогда из (4) следует, что

$$P_c(\rho) = -\frac{dE_c}{d(1/\rho)} = \frac{K_0}{n-m}(\delta^n - \delta^m),$$

$$\Gamma(\rho) = \Gamma_0(\rho) = \frac{t-2}{3} + \frac{(m-\gamma)(m-\gamma+1) - (n-\gamma)(n-\gamma+1)\delta^{n-m}}{2(m-\gamma - (n-\gamma)\delta^{n-m})}. \quad (5)$$

Согласно (5) при больших плотностях коэффициент Грюнайзена стремится к $(3n-1)/6$, и если принять, в соответствии с квантово-статистической моделью Томаса–Ферми, что для сильно сжатого холодного вещества $\Gamma = 2/3$, то получаем часто используемое значение $n = 5/3$. При $\delta = 1$ получаем из (5) значение коэффициента Грюнайзена $\Gamma_0(\rho_0) = (3(m+n) - 2t - 1)/6$ и в случае, когда эта величина известна, имеем соотношение для определения свободного параметра t

$$t = (3(m+n) - 6\Gamma_0(\rho_0) - 1)/2,$$

откуда в рамках модели следует при $t \geq 0$ ограничение на показатели степени

$$m+n \geq 2\Gamma_0(\rho_0) + 1/3.$$

Функцию температуры Дебая от плотности находим подстановкой (5) в (3) и интегрированием. В результате имеем

$$\theta_D = \delta^{\frac{t-2}{3}} \sqrt{\frac{(n-\gamma)\delta^{n-\gamma+1} - (m-\gamma)\delta^{m-\gamma+1}}{n-m}} \theta_{D0}. \quad (6)$$

Полагая $m > \gamma, n > \gamma$, из (6) получаем, что хотя мы рассматриваем сжатие ($\delta > 1$), в случае растяжения ($\delta < 1$) соотношение (6) формально имеет смысл до значений $\delta > [(m-\gamma)/(n-\gamma)]^{1/(n-m)}$.

Отметим, что при $n = 5/3, m = 4/3, t = 1$ соотношения (5), (6) записываются, как

$$\Gamma_0(\rho) = \frac{2\delta^{1/3} - 1}{3\delta^{1/3} - 2}, \quad \theta_D = \theta_{D0} \left(3\delta^{4/3} - 2\delta \right)^{1/2}$$

и в таком виде успешно использовались в работе [3] для описания поведения стишовита при высоких давлениях. Однако параметр t в ней не варьировался (использовалась теория Дуглейла–Макдональда с $t = 1$), что приводило к значению $\Gamma_0(\rho_0) = 1$, отличному от известных данных для стишовита. Хотя это отличие оказалось несущественным для согласия с экспериментальными данными, полученного в работе [3], но изменением значения параметра t можно получить и требуемое значение $\Gamma_0(\rho_0)$.

Таким образом, рассматриваемые семипараметрические УРС для каждой из полиморфных форм определяются в области сжатия следующим набором параметров, характеризующих конкретное поликристаллическое вещество: $\rho_0, K_0, n, m, \Gamma_0(\rho_0), \theta_{D0}, \nu$. Эти параметры находятся из условия наилучшей возможной аппроксимации экспериментальных данных о термодинамических свойствах исследуемого вещества. В частности, ударных адиабат (УА), зависимостей теплоемкостей (при постоянном давлении и/или при постоянном объеме) и молярных объемов от температуры при постоянном давлении. Полученные в данной работе параметры УРС для ПФ диоксида кремния представлены в таблице 1.

Таблица 1: Параметры УРС полиморфных форм SiO_2

ПФ	ρ_0 , г/см ³	K_0 , ГПа	n	m	$\Gamma_0(\rho_0)$	θ_{D0} , К	ν
α -кварц	2,65	53,11	3,20	0	0,6	990	3
коэсит	2,92	89,42	2,66	1,40	0,4	1081	3
стишовит	4,30	353,09	5/3	1,18	1,25	1130	3

III Расчет фазовой диаграммы и ударной адиабаты с учетом полиморфизма

Построенные УРС каждой из ПФ позволяют рассчитать фазовую диаграмму и УА с учетом полиморфизма. При этом для согласования уровней отсчета энергии и энтропии (определения констант E_0, S_0 для различных ПФ) требуется привлечение дополнительной информации по стандартным молярным энтальпиям образования и энтропиям каждой из полиморфных форм. Это согласование требуется также для расчета УА с учетом полиморфных переходов.

По известной удельной внутренней энергии (1) и удельной энтропии (2) строится удельный термодинамический потенциал Гиббса каждой ПФ

$$G(P, T) = E(T, \rho(P, T)) - TS(T, \rho(P, T)) + P/\rho(P, T).$$

Тогда граница между различными ПФ 1 и 2 определяется равенством на ней температур, давлений и удельных термодинамических потенциалов Гиббса (при условии неизменности химического состава) $G_1(P, T) = G_2(P, T)$.

Ударная адиабата рассчитывается из соотношений Ренкина–Гюгонио

$$\begin{cases} \rho(D - U) = \rho_{00}D, \\ P_k = P_0 + \rho_{00}DU, \\ E_k(\rho, T) - E_l(\rho_{00}, T_0) = (P_k(\rho, T) + P_l(\rho_{00}, T_0))(1/\rho_{00} - 1/\rho)/2, \end{cases} \quad (7)$$

где ρ_{00}, T_0, P_0 – термодинамические параметры среды (считаются известными) перед ударной волной (УВ); $P_l(\rho, T)$, $E_l(\rho, T)$ – УРС l -ой (начальной) фазы: в большинстве случаев начальное состояние α -кварц и $l = \alpha Q$) ПФ SiO_2 ; $P_k(\rho, T)$, $E_k(\rho, T)$ – УРС k -ой (конечной) ПФ. В системе трех нелинейных уравнений (7) четыре неизвестных ρ, T, D, U и, следовательно, если задать одну из них за УВ, то остальные неизвестные могут быть определены решением этой системы. Тогда при найденных ρ, T ударная сжимаемость $P_H(\rho)$ определяется из УРС конечной ПФ $P_H(\rho) = P_k(\rho, T)$.

В случае учета полиморфных переходов расчет УА осложняется тем, что задание одной из неизвестных непосредственно не определяет значения k (в какую ПФ попадет вещество после ударного сжатия). Правильность выбора k зависит от положения границ состояний на фазовой плоскости, где одной из независимых переменных является температура. Следовательно, представляется целесообразным первоначально задавать температуру. Тогда, обратившись к рассчитанной фазовой диаграмме при фиксированном значении T , мы получаем набор возможных в этом случае k (в том числе, и для двухфазных областей с $k = \alpha QC, CS$) и соответствующих им интервалов плотностей. Далее задача решается перебором k из полученного набора и поиском плотности из соответствующего этому k интервалу плотностей посредством решения третьего уравнения системы (7). В случае, если решение существует, то текущие значения k и является искомым.

При известных ρ, T, P_H скорость ударной волны D и массовая скорость частиц U за УВ находятся из первых двух уравнений системы (7)

$$D = \sqrt{\delta_0 \frac{P_H - P_0}{\rho - \rho_{00}}}, \quad U = \sqrt{(\delta_0 - 1) \frac{P_H - P_0}{\rho}}, \quad \delta_0 = \frac{\rho}{\rho_{00}}.$$

Таким образом, при описанном подходе ударная сжимаемость $P_H(\rho)$ и ударная адиабата $D(U)$ получаются в параметрическом виде (в качестве

параметра служит температура T)

$$\begin{cases} P_H = P_H(T), \\ \rho = \rho(T), \end{cases} \quad \begin{cases} D = D(T), \\ U = U(T). \end{cases}$$

Литература

1. Григорян С.С., Евтерев Л.С., Замышляев Б.В., Кривошеев С.Г. Об ударноволновых процессах в силикатных породах с учетом фазовых превращений // Докл. АН СССР, 1978, том 241, N 6, 1292–1295.
2. A. Ostriik and D. Nikolaev Shock induced melting of sapphire // J. Phys.: Conf. Ser. 2154 012010 (2022).
3. Надыкто Б.А., Надыкто А.Б., Ломайкин А.И. Уравнение состояния стишовита до 1000 ГПа и более 10000 К, фазовая стабильность стишовита и описание при высоких давлениях ударных адиабат полиморфных фаз SiO₂ как ударных адиабат пористого стишовита // ВАНТ. Серия: Теоретическая и прикладная физика. 2020. N 1. С. 29–39.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭФФЕКТА ОЛЛИ В ПОПУЛЯЦИИ ХИЩНИКА¹

Гайбарян С.А., Зеленчук П.А.

ЮФУ, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И.Воровича, Ростов-на-Дону

Введение

Влияние численности популяции на текущую скорость ее роста имеет существенное значение для многих биологических видов. В некоторых случаях, когда немногочисленным особям популяции трудно находить партнеров для размножения, коллективно добывать пищу или защищаться от хищников, это может привести к необратимым последствиям [1]. Данное явление известно в науке как эффект Олли, названный в честь одного из первых его исследователей Уордера Клайда Олли (Warder Clyde Allee), изучавшего динамику популяции золотых рыбок [2].

Ввиду возможного риска вымирания редких биологических видов и других экологических угроз, изучению данной проблемы было посвящено большое количество научных работ [3, 4, 5, 6].

I Математическая модель

Математически эффект Олли обычно выражается введением в уравнения положительной обратной связи, влияющей на скорость роста в зависимости от текущего размера (плотности) популяции. Например, для системы «хищник–жертва» [7] с идеальным свободным распределением (ИСП):

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u \left[a_1 u \left(1 - \frac{u}{p} \right) - \frac{b_1 v}{p} \right], \\ \frac{dv}{dt} = v \left[\frac{a_2 u}{p} - b_2 \right], \end{cases} \quad (1)$$

где $u(x, t)$ и $v(x, t)$ — жертва и хищник соответственно, $p(x)$ — функция ресурса, $a_i, b_i > 0$ — коэффициенты прироста и убыли ($i = 1, 2$), эффект

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-21-00419, <https://rscf.ru/project/25-21-00419/> в Южном федеральном университете

Олли для популяции жертвы может быть введен в виде множителя $(u - m_1)$:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u \left[a_1 \left(1 - \frac{u}{p} \right) (u - m_1) - \frac{b_1 v}{p} \right], \\ \frac{dv}{dt} = v \left[\frac{a_2 u}{p} - b_2 \right], \end{cases} \quad (2)$$

где m_1 — параметр Олли, т. е. пороговый уровень численности, ниже которого жертва обречена на вымирание. ИСР представляет из себя концепцию, согласно которой [5] распределение популяций на ареале осуществляется пропорционально доступному ресурсу, что дает системе возможность реализовать эволюционно стабильную стратегию (ЭСС), т. е. стратегию, обеспечивающую долговременное существование без риска быть вытесненными аналогичными популяциями [9].

Обе системы (1),(2) дополняются начальными условиями

$$u(x, 0) = u^0, \quad v(x, 0) = v^0. \quad (3)$$

Влияние эффекта Олли на стационарные решения задачи (2),(3) легко проследить по таблице 1 в сравнении с первой задачей (1),(3), без эффекта.

Таблица 1: Сравнение стационарных решений и условий их устойчивости для двух системы «хищник-жертва»

№	Без эффекта Олли, система (1),(3)	с эффектом Олли, система (2),(3)
1	$u = 0, v = 0$ <i>неустойчиво</i>	$u = 0, v = 0$ <i>устойчиво при $m > 0$</i>
2	—	$u = m, v = 0$ <i>неустойчиво</i>
3	$u = p, v = 0$ <i>устойчиво при $b_2 > a_2$</i>	$u = p, v = 0$ <i>устойчиво при $b_2 > a_2$</i>
4	$u = \frac{a_2}{b_2} p, v = \frac{a_1}{b_1} \left(1 - \frac{b_2}{a_2} \right) \frac{b_2}{a_2} p^2$ <i>устойчиво при $\frac{a_2}{2} < b_2 < a_2$</i>	$u = \frac{a_2}{b_2} p, v = \frac{a_1}{b_1} \left(1 - \frac{b_2}{a_2} \right) \left(\frac{b_2}{a_2} p - m_1 \right) p$ <i>устойчиво при $\frac{a_2(p + m_1)}{2p} < b_2 < a_2$</i>

Видно, что наличие эффекта Олли приводит к смене устойчивости тривиального нулевого решения (первая строка таблицы). Интересно отметить,

что в системе (2),(3) появляется новое, неустойчивое стационарное состояние, которого нет в первой системе (вторая строка таблицы). Для стационарного состояния, отвечающего сосуществованию двух видов, эффект Олли приводит к уменьшению численности популяции хищника. Более того, диапазон устойчивости этого стационарного решения существенно сужается слева на m_1 . Укажем также на то, что при уменьшении параметра m_1 до нуля обе колонки таблицы 1 совпадут.

Для любого нетривиального стационарного решения популяция жертвы сохраняет ИСР, в то время как популяция хищника может быть пропорциональна квадрату ресурса.

II Эффект Олли в популяции хищника

В отличие от популяции жертвы, эффект Олли в популяции хищника исследован в меньшей степени [5, 6].

Построим математическую модель системы «хищник–жертва» с эффектом Олли для популяции хищника в виде:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u \left[a_1 \left(1 - \frac{u}{p} \right) - \frac{b_1 v}{p} \right], \\ \frac{dv}{dt} = v \left[\frac{a_2 u}{p} \left(\frac{v}{v + m_2} \right) - b_2 \right], \end{cases} \quad (4)$$

где m_2 — параметр Олли для популяции хищника. Для нахождения нетривиального стационарного состояния рассмотрим систему:

$$\begin{cases} 0 = a_1 \left(1 - \frac{u}{p} \right) - \frac{b_1 v}{p}, \\ 0 = \frac{a_2 u}{p} \left(\frac{v}{v + m_2} \right) - b_2. \end{cases} \quad (5)$$

Используя замену

$$U = \frac{u}{p}, \quad V = \frac{v}{p}, \quad A = \frac{a_1}{b_1}, \quad B = \frac{b_2}{a_2}, \quad M = \frac{m_2}{p}, \quad (6)$$

получим

$$\begin{cases} U_{1,2} = \frac{1 + B \pm \sqrt{(1 - B)^2 - 4B \frac{M}{A}}}{2} = \frac{1 + B \pm Q}{2}, \\ V_{1,2} = A(1 - U_{1,2}). \end{cases} \quad (7)$$

Для существования решений (7) необходимо выполнение условия:

$$(1 - B)^2 - 4B \frac{M}{A} > 0. \quad (8)$$

В итоге имеем два стационарных решения (рис. 2):

$$\begin{cases} u_1 = \frac{p}{2} (1 + B + Q), \\ v_1 = \frac{Ap}{2} (1 - B - Q), \end{cases} \quad (9)$$

и

$$\begin{cases} u_2 = \frac{p}{2} (1 + B - Q), \\ v_2 = \frac{Ap}{2} (1 - B + Q). \end{cases} \quad (10)$$

Первое решение (u_1, v_1) всегда неустойчиво (седло на фазовом портрете), в

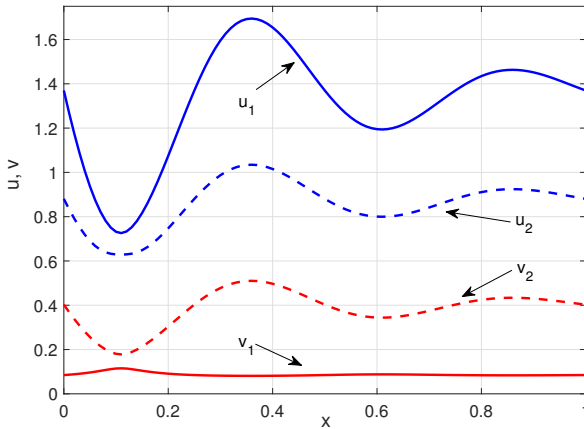


Рис. 1: Распределение жертвы (синий) и хищника (красный) для двух стационарных решений (9)–(10) при $a_1 = 0.65$, $a_2 = 2$, $b_1 = b_2 = 1$, $m_2 = 0.07$

то время как второе решение (u_2, v_2) устойчиво при выполнении условия

$$a_2 \frac{\frac{AM}{2} (1 - B + Q)}{\left(\frac{A}{2} (1 - B + Q) + M\right)^2} < a_1. \quad (11)$$

При нарушении условия (11) возникает бифуркация Андронова–Хопфа, приводящая к предельному циклу (зарождение колебательного режима).

Литература

1. *Courchamp F., Berec J., Gascoigne J.* Allee effects in ecology and conservation. New York: Oxford University Press, 2008. 266 p.
2. *Allee W.C.* Animal Aggregations // The Quarterly Review of Biology. 1927. Т. 2. N. 3. С. 367–398.
3. *Courchamp, F., Clutton-brock, T., Grenfell, B.* 1999. Inverse density dependence and the Allee effect. Trends Ecol. Evol. 14, 405–410, 1999
4. *Shu-Rong Zhou, Ya-Feng Liu, Gang Wang* The stability of predator–prey systems subject to the Allee effects // Theoretical Population Biology. 2005. Vol.67. Is. 1. pp. 23–31.
5. *Aguirre P., Gonzalez-Olivares E., Saez E.* Two limit cycles in a Leslie-Gower predator-prey model with additive Allee effect. // Nonlinear Analysis: Real World Applications. 2009. Vol.10. Is.3. pp. 1401–1416.
6. *Guin L. N., Pal P. J. et. al.* Influence of Allee effect on the spatiotemporal behavior of a diffusive predator-prey model with Crowley-Martin type response function. // Scientific Reports. 2023. 13, 4710]
7. *Зеленчук П.А.* Численное исследование диффузионно–адвективных моделей «хищник–жертва» с идеальным свободным распределением: диссертация на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук. 2023. – 109 с.
8. *Cantrell R.S., Cosner C., Deangelis D.L., Padron V.* The ideal free distribution as an evolutionarily stable strategy // Journal of Biological Dynamics. 2007. Vol. 1. N 3. P. 249–271.
9. *Зеленчук П.А., Цибулин В.Г.* Разнообразие эволюционных стратегий для математической модели «хищник–жертва» // Современные информационные технологии: тенденции и перспективы развития : Материалы XXXII научной конференции, Ростов-на-Дону, 17–19 апреля 2025 года. – Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2025. С. 197–200.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ФОРМЫ ЖИДКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ В КРИСТАЛЛЕ И МАССОПЕРЕНОСА В НИХ: ОТ ОДНОМЕРНОГО ДО ТРЕХМЕРНОГО

Гармашов С.И.

Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону

Введение

Анализ поведения жидких включений в кристалле при изменениях условий равновесия (наложение и снятие градиента температуры, колебания температуры) даёт возможность исследовать механизм и кинетику процессов кристаллизации и растворения, анизотропию удельной межфазной энергии (УМЭ). Для проведения такого анализа возникает необходимость в математической модели включения и процессов массопереноса, протекающих в нём. В общем случае включение в кристалле является трёхмерным объектом, но в зависимости от особенностей его фактической геометрии и требований к точности модели используются одномерные и двумерные приближения.

С помощью одномерной аналитической модели автором [1] была выявлена зависимость скорости миграции плоской прослойки жидкой фазы под действием градиента температуры (или кратко – термомиграции [2]) от её толщины. Поскольку характер этой зависимости определялся механизмом межфазных процессов, на ее основе были построены разные методы [3] определения действующего механизма кристаллизации и растворения по экспериментальным данным о скорости миграции плоских включений.

Одномерное численное моделирование термомиграции, но при наличии колебаний температуры, позволило выявить ряд интересных эффектов [4] в случае нелинейных механизмов межфазных процессов, в частности, увеличение скорости движения прослойки жидкой фазы в нестационарных тепловых условиях при том же градиенте температуры.

Необходимость в двумерной модели возникает при изучении миграции включений цилиндрической формы. Двумерное моделирование термомиграции требует учета анизотропии межфазной кинетики (различия в механизмах роста/растворения на разных участках границы включения) и анизотропии УМЭ, характерной для включений в кристаллах. В этом случае важно знать не только распределение температуры вдоль межфазной границы, но и геометрию самой этой границы, поскольку от ее кривизны зависит межфазное давление и, следовательно, граничные условия для уравнения массопереноса.

Аналитическое решение двумерной задачи возможно для некоторых частных случаев, описанных в [2]. Для произвольной анизотропии межфазной кинетики и удельной межфазной энергии предпочтительно применять метод граней, предложенный в работе [2] и использованный в работах [5] - [8]. Суть его заключается в аппроксимации криволинейной части границы включения набором плоских участков (граней) с фиксированным углом между ними, но разной шириной. Используя такую модель, автором [5, 7] было проведено сравнение зависимостей скоростей миграции цилиндрического включения и плоской прослойки одинаковой толщины при прочих равных условиях. Из анализа двумерной модели термомиграции автором [6, 7] удалось получить формулы для расчета степени анизотропии УМЭ и относительной затрудненности межфазных процессов по некоторым характеристическим размерам элементов формы сечения мигрирующего цилиндрического включения.

Применение методик [6, 7] определения некоторых параметров системы по стационарной форме и скорости включения корректно, если включение действительно приняло такую форму. Для того чтобы оценить продолжительность установления формы и скорости включения возникает необходимость в нестационарном двумерном моделировании, описывающем эволюцию формы сечения включения. В работе [8] представлена такая модель и результаты по оценке погрешности определения некоторых параметров системы по не совсем установившейся форме.

Методики из работ [6, 7], построенные на основе двумерного приближения, иногда применяются для анализа сечений реальных — трехмерных — включений, имеющих сопоставимые размеры по всем трем направлениям. То, насколько допустимо такое применение, можно определить, разработав трехмерную модель термомиграции включений.

I Физическая модель (3D случай)

Будем считать, что равновесная форма включения представляет собой куб с округлыми ребрами (рис. 1а), что характерно для включений в щелочно-галлоидных кристаллах (например, KCl, KBr) и соответствует анизотропии УМЭ с острыми минимумами энергии на шести атомно-гладких гранях куба (рис. 1б). Межфазные процессы (кристаллизация и растворение) протекают на этих гранях, как правило, по дислокационному или зародышевому механизмам [1], а на криволинейных (атомно-шероховатых) участках границы (округлых ребрах куба) — по нормальному механизму.

Кроме того, предполагается, что градиент температуры ($\mathbf{G}$) может быть приложен перпендикулярно паре параллельных граней куба; влияние теплоты фазовых переходов на распределение температуры пренебрежимо мало;

массоперенос в объеме жидкой фазы имеет исключительно диффузионный характер.

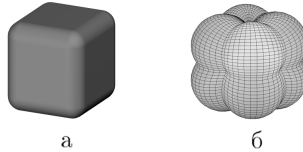


Рис. 1: Равновесная форма включения (а), определяемая заданной анизотропией УМЭ (б)

II Математическая модель (3D случай)

Моделирование основано на решении нестационарного уравнения диффузии

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) \quad (1)$$

в трехмерной области в виде многогранника с подвижными четырехугольными гранями (рис. 2), где $C = C(x, y, z, t)$ — концентрация раствора кристалла в точке включения с координатами (x, y, z) в момент времени t ; D — коэффициент взаимодиффузии компонентов жидкой фазы.

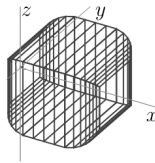


Рис. 2: Область моделирования

Решение уравнения (1) осуществлялось методом сеток по явной схеме. С этой целью округлые участки границы включения (рис. 1а) аппроксимировались набором граней с разным наклоном (рис. 2), который оставался постоянным в процессе моделирования, а изменения претерпевали только размеры этих аппроксимирующих граней. Для простоты первой версии трехмерной модели криволинейность ребер куба, параллельных направлению движения включения (ось x), не учитывалась.

Граничные условия на атомно-гладких (вертикальных и горизонтальных) гранях куба задавались в виде нелинейной функциональной зависимости плотности потока J^* от пересыщения согласно выбранному механизму (дислокационному или зародышевому [1]) межфазных процессов:

$$J^* \sim f(C(x, y, z, t) - C^*(x^*, y^*, z^*)),$$

где $C^*(x^*, y^*, z^*)$ — равновесная концентрация в рассматриваемом граничном узле с координатами (x^*, y^*, z^*) , которая определяется температурой в этом узле $T(x^*, y^*, z^*) = T(0, 0, 0) + Gx^*$ и межфазным давлением $P(x^*, y^*, z^*)$. Формула для расчета межфазного давления выводилась для каждой грани как отношение приращения поверхностной энергии к приращению объема включения при бесконечно малом смещении рассматриваемой грани вдоль нормали с учетом значения УМЭ данной грани и соседних с нею, а также её размеров [2].

Методика моделирования эволюции формы включения при нарушении или восстановлении равновесия построена на многократном повторении операции вычисления установившихся нормальных скоростей граней включения путем решения уравнения (1) (методом установления) для заданной (текущей) формы включения при стационарных граничных условиях и операции параллельного переноса граней согласно вычисленным скоростям за некоторый малый промежуток времени для построения новой формы включения.

III Некоторые результаты трехмерного моделирования

III.1 Эволюция формы включения от неравновесной к равновесной

В качестве тестовой задачи для построенной трехмерной модели рассмотрена эволюция неравновесной формы включения, заданной в виде шара, к равновесной форме в виде округлого куба согласно заложенной в модели анизотропии УМЭ. Результаты моделирования на рис. 3 демонстрируют приобретение включением равновесной формы согласно правилу Вульфа [2] с погрешностью, обусловленной конечным количеством граней, аппроксимирующих криволинейные участки границы включения.

III.2 Эволюция формы включения под действием градиента температуры

При моделировании эволюции формы включения в неоднородно нагретом кристалле интерес представляет установившаяся форма сечения этого включения и сравнение его с формой сечения цилиндрического включения при

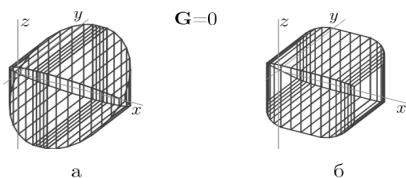


Рис. 3: Эволюция формы включения от неравновесной (а) к равновесной (б)

прочих равных условиях, а также продолжительность этого установления. На рис. 4 представлено поэтапное преобразование исходной "шарообразной" формы включения к стационарной неравновесной форме с одновременным перемещением всего включения вдоль оси x под действием градиента температуры G .

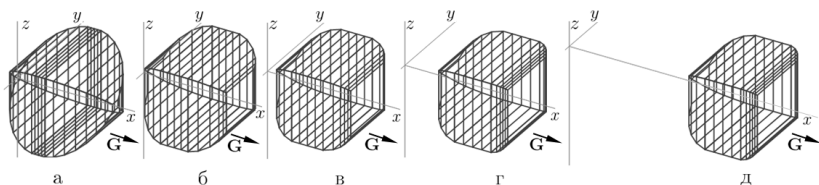


Рис. 4: Результат моделирования эволюции формы включения (а-г) к стационарной неравновесной форме (г, д) при миграции включения в направлении градиента температуры G

Из проведенных расчетов следует, что существует некоторое различие в установившейся геометрии сечения цилиндрического и кубического включений, мигрирующих в кристалле при прочих равных условиях. Однако анализ этого сравнения требует отдельного рассмотрения.

III.3 О модели, учитывающей криволинейность формы включения во всех трех плоскостях

Для более детального моделирования формы включений в кристалле требуется учет анизотропии УМЭ (рис. 16) во всех трех координатных плоскостях. С этой целью в настоящей работе предпринята попытка построить трехмерную сетку из набора двумерных сеток (рис. 5а, 5б, тонированные области), учитывающих кривизну границы включения в плоскостях, перпендикулярных направлению движения включений вдоль оси x .

Поскольку при таком подходе расположение узлов двумерных сеток (рис. 5в) не совпадает вдоль оси x , для описания массопереноса в этом

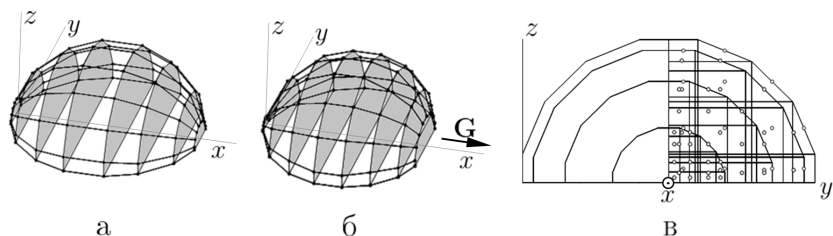


Рис. 5: Система двумерных сеток (тонируемые области (а, б)) и узлов в них (в), использованная для более детального учета кривизны границы включения и анизотропии УМЭ

направлении использовалась билинейная интерполяция распределения концентраций $C(x, y, z)$ в областях двумерных сеток.

Проведенные тестовые расчеты по такой модели дают качественно правдивые результаты, но алгоритм требует оптимизации из-за большого объема вычислений, вызванного увеличением количества аппроксимирующих граней по сравнению с упрощенной трехмерной моделью формы включения, описанной в предыдущих разделах.

Представленные в настоящей работе 3D модели будут использованы как базовые для их дальнейшего совершенствования и анализа особенностей эволюции формы жидких включений в кристалле в трехмерном случае.

Литература

1. *Tiller W. A.* Migration of a liquid zone through a solid: Part I // *J. Appl. Phys.* 1963. Vol. 34. №9. P. 2757–2762.
2. *Cline H.E., Anthony T.R.* Nonequilibrium morphology of liquid inclusions migrating in solids // *J. Appl. Phys.* 1977. Vol. 48. № 12. P. 5096–5104.
3. *Лозовский В.Н., Лукин Л.С., Попов В.П.* Зонная перекристаллизация градиентом температуры полупроводниковых материалов. Москва: Металлургия, 1987. 232 с.
4. *Гершанов В.Ю., Гармашов С.И.* Нелинейные нестационарные эффекты в процессах массопереноса. Ростов-на-Дону: Издательство ЮФУ, 2014. 114 с.
5. *Гармашов С.И.* О скорости термомиграции жидких цилиндрических включений в кристалле в стационарных тепловых условиях // *ФТТ.* 2019. Т. 61. № 12. С. 2303–2306.

6. *Garmashov S.I.* A model of shapes of liquid cylindrical inclusions migrating through a non-uniformly heated crystal: Fundamentals and applications for studying crystallization and dissolution // J. Cryst. Growth. 2021. Vol. 574. P. 126312.
7. *Гармашов С.И.* Модель термомиграции жидких цилиндрических включений в кристалле и ее применение. Ростов-на-Дону; Таганрог: Издательство ЮФУ, 2022. 99 с.
8. *Garmashov S.I.* Evolution of cross-sectional shapes of liquid inclusions enclosed in a crystal: Computer simulation and its application for studying interface kinetics // J. Cryst. Growth. 2024. Vol. 627. P. 127532.

СРЕДА ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ VVFLOW — ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ И НАУЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ¹

Дынников Я.А.

Московский Государственный Университет им. М.В.

Ломоносова, НИИ механики, Москва,

yaroslav.dynnikov@yandex.ru

Среда численного моделирования Vvflow реализует метод вязких вихревых доменов (ВВД) и доступна на Github под открытой лицензией MIT [1]. И сам метод, и его программная реализация разработаны в НИИ механики МГУ (лаб. 107). Пакет предназначен для решения широкого круга задач гидродинамики, включая взаимодействие вязкой несжимаемой жидкости с погруженными твердыми телами. Особое внимание уделяется задачам с подвижными границами и сложной геометрией, где традиционные сеточные методы сталкиваются с трудностями.

Метод вязких вихревых доменов (ВВД) относится к классу бессеточных вихревых методов и служит для решения двумерных уравнений Навье-Стокса [2]. Отличительной особенностью метода является возможность эффективно решать задачи взаимосвязанного движения жидкости и погруженных в нее тел с кинематическими и упругими связями. Примечательно, что для решения сопряженной задачи используется единая система линейных уравнений, что позволяет избежать расщепления схемы на отдельные шаги для уравнений гидродинамики и динамики тела [3].

Среди успешных применений метода можно выделить объяснение механизмов влияния упругой связи на пропульсивную силу крылового профиля при полудетерминированных колебаниях [4]. Кроме того, был решен ряд задач с соударениями твердых тел, включая автоколебания цилиндра в узком канале [5] и обратного флюгера в плоском диффузоре (генератор импульсных струй) [6]. Также была разработана теория, объясняющая существование различных режимов автоколебаний упруго закрепленных цилиндрических тел, и приведены критерии устойчивости таких колебаний [7].

Доклад является собой обзор успешных применений пакета Vvflow и приглашает к сотрудничеству заинтересованных исследователей.

Литература

1. CFD software for performing flow simulations with Viscous Vortex Domains method. <https://github.com/vvflow/vvflow>

¹Работа выполнена в рамках государственного задания МГУ имени М. В. Ломоносова

2. Андронов П.Р., Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я. Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок: Изд-во Моск. ун-та, Москва, 2006, ISBN 5-211-05256-0, 184 с.
3. Дынников Я.А. Бессеточная технология численного моделирования взаимодействий вязкой жидкости и систем профилей с кинематическими и упругими связями. Кандидатская диссертация, 2016.
4. S. V. Guvernuyuk, Ya A. Dynnikov, G. Ya Dynnikova, and T. V. Malakhova. Hydrodynamic mechanisms of the influence of an elastic constraint on the propulsive force of airfoil under semideterministic oscillations in viscous fluid flow // Fluid Dynamics. 2022. 57(5):549–557. DOI 10.1134/S001546282205007X.
5. Гувернюк С. В., Дынникова Г. Я., Дынников Я. А. и др. Гидродинамика автоколебаний с соударениями тел в каналах // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник трудов в 4 томах. — Т. 2 из Механика жидкости и газа. Уфа: РИЦ БашГУ Уфа, 2019. С. 103–105. DOI: 10.22226/2410-3535-2019-congress-v2.
6. Гувернюк С. В., Дынников Я. А., Дынникова Г. Я., Зубков А. Ф. Моделирование соударений тел в вязкой жидкости в приложении к теории генератора импульсных струй // Материалы XXVII научно-технической конференции по аэродинамике. Жуковский: Изд. отдел ЦАГИ, 2016. С. 91–92.
7. G. Ya. Dynnikova, Ya. A. Dynnikov, and P. R. Andronov. Mechanism underlying stability of a vortex-induced vibration // Physics of Fluids. 2025. 37(7):074105. DOI 10.1063/5.0272438.

МОДЕЛЬ ЭВОЛЮЦИОННО СТАБИЛЬНОЙ СТРАТЕГИИ ДЛЯ БИОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДИФФУЗИЕЙ¹

Зеленчук П.А.

ЮФУ, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И.Воровича, Ростов-на-Дону

Введение

Исследование пространственных распределений биологических систем является важной задачей популяционной динамики [1]. Для этого используются дифференциальные уравнения в частных производных, позволяющие описать процессы формирования устойчивых пространственных структур [2, 3]. Один из видов таких уравнений — уравнения диффузии–реакции.

Диффузия в популяционной динамике представляет собой процесс случайного перемещения особей из областей с высокой плотностью населения в области с низкой плотностью, аналогичный диффузии веществ в физике. Математически каждая популяция характеризуется некоторым коэффициентом диффузии, который вместе с параметрами, описывающими процессы рождаемости–смертности и взаимодействия с другими популяциями, задает определенную стратегию поведения во времени и пространстве.

Эволюционно стабильной стратегией (ЭСС) называется такая стратегия поведения, направленная на решение адаптационных задач, при которой популяция обеспечивает свое долговременное существование и не может быть вытеснена с ареала аналогичной популяцией с другой стратегией [4]. В теории игр ЭСС является переработанным вариантом равновесия Нэша, в предположении, что индивидуальная приспособленность особей может рассматриваться как аналог теоретико-игрового понятия выгоды, оптимизируемой игроками для достижения своих целей. Вопрос реализации ЭСС представляет особый интерес. Некоторые исследователи считают [5], что достичь ЭСС можно с использованием концепции идеального свободного распределения (ИСР), согласно которой [6] особи популяции размещаются на ареале пропорционально доступному ресурсу, имеют идеальное представление о его распределении и могут свободно перемещаться в пространстве с целью повысить свою индивидуальную приспособленность.

В данной работе рассматривается математическая модель ЭСС для системы двух конкурирующих за общий ресурс популяций на неоднородном

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-21-00419, <https://rscf.ru/project/25-21-00419/> в Южном федеральном университете

ареале. Построение модели ведется на основе системы одномерных уравнений диффузии–реакции, реализующей концепцию ИСР [7, 8].

I Постановка задачи

Рассмотрим систему двух популяций (U_1, U_2) , конкурирующих за неравномерно распределенный на ареале ресурс $p(x)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_1}{\partial t} &= D_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + a_1 U_1 p(x) - b_{11} U_1^2 - b_{12} U_1 U_2, \\ \frac{\partial U_2}{\partial t} &= D_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + a_2 U_2 p(x) - b_{21} U_2^2 - b_{22} U_1 U_2.\end{aligned}\quad (1)$$

Система (1) дополняется условиями периодичности

$$U_1(0, t) = U_1(1, t), \quad U_2(0, t) = U_2(1, t), \quad (2)$$

и начальными условиями

$$U_1(x, 0) = U_1^0, \quad U_2(x, 0) = U_2^0. \quad (3)$$

Функция ресурса нигде на ареале не обращается в нуль и имеет достаточное количество производных. В выражении (1) D_1, D_2 – коэффициенты диффузии, a_1, a_2 – параметры роста обеих популяций соответственно. Коэффициенты b_{11}, b_{22} отвечают за конкуренцию между особями внутри каждой популяции, а b_{12}, b_{21} – за конкуренцию между популяциями.

Большое количество коэффициентов наделяет модель (1)–(3) множеством разнообразных стратегий, которое, однако, достаточно тяжело анализировать. Значительного упрощения можно достичь используя следующую замену переменных [7]

$$\begin{aligned}t &= \frac{\tau}{a_1}, \quad d_1 = \frac{D_1}{a_1}, \quad d_2 = \frac{D_2}{a_1}, \quad \gamma = \frac{a_2}{a_1}, \\ \beta_1 &= \frac{b_{12}}{b_{22}}, \quad \beta_2 = \frac{b_{21}}{b_{11}}, \quad u_1 = \frac{a_1}{b_{11}} U_1, \quad u_2 = \frac{a_2}{b_{22}} U_2.\end{aligned}\quad (4)$$

В результате получим новую систему:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial \tau} &= d_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + u_1 [p(x) - u_1 - \beta_1 \gamma u_2], \\ \frac{\partial u_2}{\partial \tau} &= d_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \gamma u_2 \left[p(x) - \frac{\beta_2}{\gamma} u_1 - u_2 \right],\end{aligned}\quad (5)$$

которую гораздо проще исследовать.

II Основные результаты

Если коэффициенты диффузии настолько малы, что ими можно пренебречь ($d_1 = d_2 = 0$), то система уравнений (5) будет иметь три нетривиальных стационарных состояния $\{u_1, u_2\}$, каждое из которых вместе со своим условием устойчивости, приведено ниже:

$$\{0, p\}, \quad \gamma \beta_1 > 1, \quad \beta_2 < \gamma, \quad (6)$$

$$\{p, 0\}, \quad \gamma \beta_1 < 1, \quad \beta_2 > \gamma, \quad (7)$$

$$\left\{ \frac{p(1 - \beta_1 \gamma)}{1 - \beta_1 \beta_2}, \frac{p(1 - \beta_2/\gamma)}{1 - \beta_1 \beta_2} \right\}, \quad \gamma \beta_1 < 1, \quad \beta_2 < \gamma, \quad \beta_1 \beta_2 < 1. \quad (8)$$

Стационарные состояния (6),(7) отражают факт полной победы одного из конкурентов. Решение (8) соответствует сосуществованию двух популяций (рис. 1). Отметим, что каждое из состояний (6)–(8) удовлетворяет ИСР в смысле пропорциональности плотности [9] функции ресурса $p(x)$.

Для численного решения начально-краевой задачи (1)–(3) при наличии диффузии использовался метод прямых на основе компактной разностной схемы по пространственной координате [10]. Интегрирование по времени велось с помощью метода Рунге–Кутты четвертого порядка точности. В качестве неравномерно распределенного ресурса рассматривалась функция

$$p(x) = 1,5 + 0,8 \sin(4\pi x + \pi) e^{-2,5x}. \quad (9)$$

В случае построения модели ЭСС для одной, выбранной популяции, необходимо указать такой набор диапазонов параметров системы (5), при котором она может неограниченно долго существовать на ареале. Так, для популяции u_1 , в рамках допущения об отсутствии диффузии, ЭСС будет существовать при выполнении условий из выражений (7)–(8).

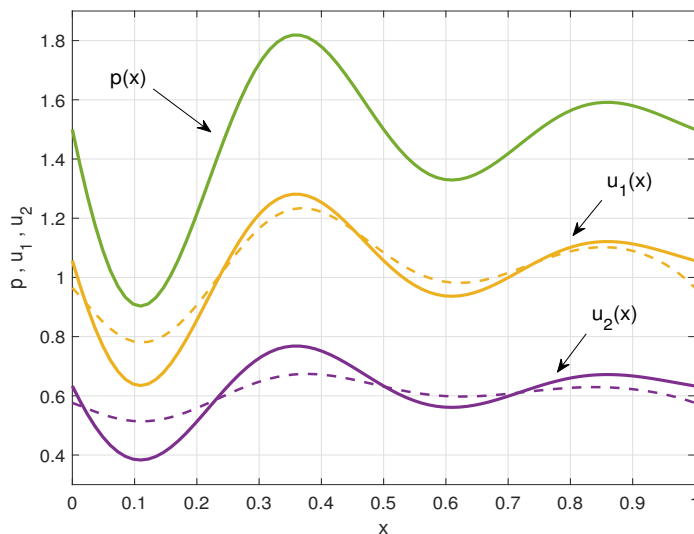


Рис. 1: Распределение ресурса (сплошной зеленый) и конкурирующих популяций для стационарного решения (8) без диффузии (сплошные линии) и при ее наличии (пунктир) $d_1 = d_2 = 0,005$ ($\gamma = 0,5$; $\beta_1 = 1,4$; $\beta_2 = 0,4$).

Наличие диффузии не приводит к появлению принципиально новых решений [2, 3], но заметно осложняет анализ задачи (5). Отталкиваясь от стационарных состояний полученных для локальной системы, можно сказать, что в этом случае распределение популяций будет их повторять «размазывая» по ареалу благодаря диффузии (пунктирные кривые на рис. 1). Однако, в том случае, когда все условия (6)–(8) нарушены и имеют место неравенства

$$\gamma\beta_1 > 1, \quad \beta_2 > \gamma, \quad \beta_1\beta_2 > 1, \quad (10)$$

система (5) бистабильна и ее финальное состояние зависит от начальных условий и соотношения между коэффициентами диффузии.

Так, популяция u_2 может добиться вытеснения конкурента используя четырехкратный численный перевес, рис. 2 (а). Но снижая коэффициент диффузии в два раза, u_1 может легко вернуть себе превосходство, рис. 2 (б).

В распределенной системе (5) при обострении борьбы, условия (10), побеждает не просто более сильный конкурент, а популяция, оптимально сочетающая свои способности со стартовыми данными и значениями коэффициентов диффузии, в этом и состоит суть ЭСС, позволяющей так подобрать необходимые параметры, чтобы обеспечить свое существование на ареале.

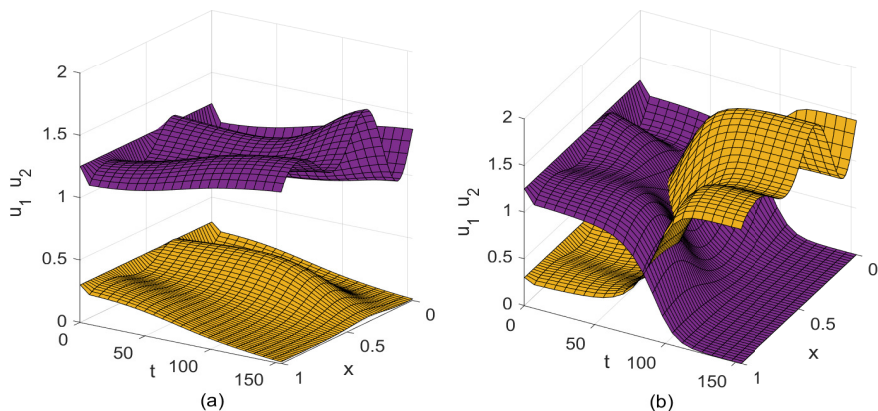


Рис. 2: Влияние диффузии на конкурентную борьбу при одинаковых начальных данных и выполнении условий (10): слева – побеждает u_2 (фиолетовый) при $d_1 = d_2 = 0,001$, справа – побеждает u_1 (желтый) при $d_1 = 0,0005$, $d_2 = 0,001$ ($\gamma = 0,5$; $\beta_1 = 2,1$; $\beta_2 = 0,6$; $u_1^0(x) = 0,3$; $u_2^0(x) = 1,25$).

Литература

1. *Averil I., Lou Y., Munther D.* On several conjectures from evolution of dispersal // *Journal of Biological Dynamics*. 2012. Vol. 6. № 2. P. 117–130.
2. *Holmes E., Lewis E., Banks J., Veit R.* Partial Differential Equations in Ecology: Spatial Interactions and Population Dynamics // *Ecology*. 1994. Vol. 75. P. 17–29.
3. *Ризниченко Г.Ю., Рубин А.Б.* Математические методы в биологии и экологии. Биофизическая динамика продуктивных процессов в 2 ч. Часть 2. Москва: Издательство Юрайт, 2019. 185 с.
4. *Van Cleve J.* Evolutionarily stable strategy analysis and its links to demography and genetics through invasion fitness // *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences*. 2023. B378:20210496.
5. *Cantrell R.S., Cosner C., Deangelis D.L., Padron V.* The ideal free distribution as an evolutionarily stable strategy // *Journal of Biological Dynamics*. 2007. Vol. 1. № 3. P. 249–271.
6. *Fretwell S.D., Lucas H. L.* On territorial behavior and other factors influencing habitat distribution in birds // *Acta Biotheoretica*. 1969. Vol. 19. P. 16–36.

7. Зеленчук П.А. Математическая модель эволюционно стабильной стратегии для популяции в условиях конкуренции на неоднородном ареале // Российский журнал биомеханики. 2025. Т. 29. № 2. С. 36–48.
8. Зеленчук П.А. Эволюционно стабильная стратегия с учетом диффузии в системе двух конкурирующих популяций // Экология. Экономика. Информатика. Серия: Системный анализ и моделирование экономических и экологических систем. 2025. Т. 1. № 10. С. 37–44.
9. Зеленчук П.А., Цибулин В.Г. Математическая модель идеального свободного распределения в системе хищник-жертва // Современная математика. Фундаментальные направления. 2023. Т. 69. № 2. С. 237–249.
10. Зеленчук П.А., Нгуен Х. Б., Цибулин В.Г. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2025680157 Российская Федерация. Программа SPECIES-25 для анализа систем популяционной динамики : заявл. 27.06.2025 : опубли. 04.08.2025. Заявитель Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южный федеральный университет».

О НЕКОТОРЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ ОБРАБОТКИ РАЗРЕЖЕННЫХ МАТРИЦ В ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ¹

Игнатенко И.Д. *, Оганесян П.А. **,*, Фоменко Е.И. *

** Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

*** Университет МГУ-ППИ, г. Шенчжень, Китай*

Введение

В задачах моделирования устройств из электроупругих материалов встречается несколько наиболее востребованных видов численных экспериментов. Определение собственных частот и соответствующих им собственных векторов для пьезоустройства является необходимым шагом компьютерного дизайна, так как позволяет предсказать рабочие режимы устройства, первично определить электромеханические свойства, оптимизировать параметры для достижения необходимых рабочих режимов. Решение такой задачи методом конечных элементов сводится к решению обобщенной задачи на собственные значения для сильно разреженных седловых матриц большой размерности. В данной работе рассматривается решение системы линейных уравнений, возникающей в статических задачах и задачах на собственные значения. Приводится алгоритм эффективного решения задачи с использованием параллельных вычислений на платформе CUDA для блочного формата хранения разреженных матриц, результаты решения тестовых задач сравниваются с модельными решениями, полученными с помощью MATLAB.

I Структура разреженных матриц

Процесс формирования разреженных матриц для задач упругости и электроупругости был ранее представлен в работах [1, 2]. Упрощенно, схему построения глобальных матриц, участвующих в решении итоговой задачи, можно представить в виде следующего процесса: моделируемое тело разбивается на примитивы (конечные элементы), для каждого примитива строится локальная матрица, описывающая взаимодействие между узлами этого тела, множество всех неизвестных в узлах тела соответствует множеству строк глобальной матрицы, получаемой путем сложения локальных

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-21-00205) в Южном федеральном университете.

с учетом нумерации узлов. Отсюда следует важность выбора способа нумерации узлов и неизвестных в них. В данной работе применялся подход, при котором неизвестные в каждом узле имели последовательные порядковые номера в глобальной матрице. Это позволило применить собственную реализацию структуры хранения разреженных матриц на основе блочного формата (BSR, Block Sparse Row) [3].

II Реализация алгоритма

В качестве модельной задачи рассматривалось решение систему линейных алгебраических уравнений, полученных для упругой и электроупругой задачи в статической постановке. Генерация матриц осуществлялась в пакете ACELAN-COMPOS. Решение задачи выполнялось с помощью стабилизированного метода бисопряжённых градиентов (Bi-conjugate gradient stabilized method, BiCGStab). Данный метод относится к классу итерационных методов решения СЛАУ крыловского типа. В отличие от классического метода сопряженных градиентов, применение которого возможно только для решения систем с симметричной и положительно определенной матрицей, BiCGStab может использоваться для решения систем линейных алгебраических уравнений произвольного вида [5]. Выбор итерационного метода обусловлен тем, что при обращении разреженных матриц, в том числе и частичном, возникают сложности с заполнением значительной части матриц ненулевыми элементами. При этом итерационные методы выбранного типа не требуют большого объема дополнительной памяти, а производительность их зависит в первую очередь от реализации базовой операции умножения разреженной матрицы на плотный вектор. В силу озвученных выше особенностей структуры матриц, был использован блочно-разреженный формат с фиксированным размером квадратного блока $B \times B$, где $B = 3$ для упругой задачи и $B = 4$ для электроупругой. Отметим, что аналогичные блоки возникают и для других видов задач.

Для основной операции умножения разреженной матрицы на плотный вектор было реализовано ядро для платформы CUDA, работающий с фиксированным количеством потоков. Были реализованы дополнительные версии операции с накоплением результата умножения и с учетом транспонирования матрицы. Для остальных операций с плотными векторами, таких как скалярное произведение векторов и нормирование, использовалась библиотека cuBLAS. Исходная матрица может быть загружена в расчетный модуль в формате списка триплетов, используемого в пакете ACELAN-COMPOS, или в соответствии со спецификацией формата **Matrix Market**. При загрузке выполняется агрегация ненулевых элементов по блокам. Каждый ненулевой

блок хранится в виде заполненной подматрицы размера $B \times B$, а структура разреженности задается массивами индексов блок-строк и блок-столбцов, вычисляемых на этапе загрузки. Такая реализация хранения повышает локальность данных, что, в свою очередь, влияет на эффективность операций чтения/записи матриц на GPU.

III Решение тестовой задачи

Для проверки корректности и исследования численных свойств реализованного решателя рассмотрена тестовая задача с несимметричной матрицей, полученная для модели пьезоупругого тела. Отметим, что в предложенной реализации алгоритма BiCGStab не рассматриваются современные способы предобуславливания. Рассматриваемая матрица была предварительно преобразована средствами пакета ACELAN следующим образом [6]:

Пусть исходная матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и диагональ $d_i = A_{ii}$. Вводим диагональную матрицу

$$D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n), \quad S = \text{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{|d_1|}}, \frac{1}{\sqrt{|d_2|}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{|d_n|}}\right).$$

Предобуславливание выполнялось симметричным масштабированием: умножаем систему слева и справа

$$\tilde{A} = SAS, \quad \tilde{b} = Sb,$$

так что новая система $\tilde{A}x = \tilde{b}$ эквивалентна исходной. Диагональные элементы $\tilde{A}_{ii} = S_{ii}A_{ii}S_{ii} = \frac{A_{ii}}{|A_{ii}|}$ становятся равными ± 1 с сохранением исходного знака, а вне диагонали коэффициенты приводятся к сопоставимому масштабу, особенно в ситуациях, когда исходная матрица была близка к диагональному преобладанию. Практически это значит, что мы делим каждую строку и соответствующий столбец на $\sqrt{|A_{ii}|}$. Для устранения отрицательных элементов на диагонали выполняется второе преобразование, строим

$$\Theta = \text{diag}(\text{sign}(A_{11}), \dots, \text{sign}(A_{nn})).$$

Умножаем систему $\tilde{A}x = \tilde{b}$ слева и справа на Θ :

$$\hat{A} = \Theta \tilde{A} \Theta, \quad \hat{b} = \Theta \tilde{b}.$$

Тогда $\hat{A}_{ii} = 1$. Окончательно решаем

$$\hat{A}y = \hat{b}, \quad x = S\Theta y.$$

В этой ситуации глобальная матрица жесткости для задачи электроупругости теряет симметричность, однако содержит два крупных внедиагональных блока, отличающихся лишь знаком. В данной работе не рассматривается формат хранения, при котором учитывалась бы данная особенность, и матрица рассматривается как несимметричная. Размер рассматриваемой матрицы – около 15 тысяч строк.

В качестве опорного решения для валидации результатов использована функция `mldivide` из пакета MATLAB. Согласно документации [7], для данного типа матриц решение осуществляется с помощью LDL-разложения [8]. Численные результаты, представленные на рисунке 1, показывают, что полученное векторное решение x по своей структуре и масштабу близко к решению, вычисленному в MATLAB, что подтверждает корректность реализации базовых операций и самого алгоритма на GPU.

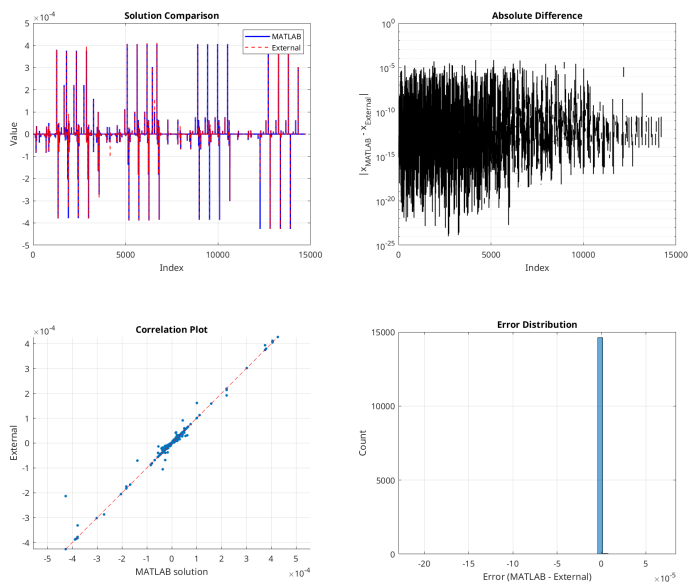


Рис. 1: Сравнение результатов MATLAB с разработанным алгоритмом (BiCGStab) – на графике отмечен как External. Приводится визуализация сравнения характера решений, абсолютной разницы, график корреляции решений и диаграмма распределения ошибок.

Наблюдаемые различия в точности решений не являются следствием принципиальных ограничений метода BiCGStab или особенностью реализации на GPU, а связаны с двумя факторами: во-первых, в текущей реализации алгоритма используется простой предобуславливатель, а во-вторых, одинарная (float) точность вычислений, тогда как в MATLAB – двойная. Дальнейшее повышение скорости сходимости и устойчивости метода BiCGStab, а также увеличение точности получаемого решения достижимы при использовании более сложных предобуславливателей [5].

Литература

1. *Soloviev A.N., Oganessian P.A., Skaliukh A.S.* Modeling of Piezoelectric Elements with Inhomogeneous Polarization by Using ACELAN. Advanced materials - studies and applications. 2015. P. 169–192.
2. *Martynova T., Muratova G., Oganessian P., Shtein O.* The numerical solution of large-scale generalized eigenvalue problems arising from finite-element modeling of electroelastic materials. *MDPI, Symmetry*, 15(1), (2023), 171.
3. *Vuduc R.W., Moon H.-J.* Fast sparse matrix-vector multiplication by exploiting variable block structure // *High Performance Computing and Communications*. Springer, 2005. P. 807–816.
4. *N.V. Kurbatova, D.K. Nadolin, A.V. Nasedkin, P.A. Oganessian, A.N. Soloviev* Finite element approach for composite magneto-piezoelectric materials modeling in ACELAN-COMPOS package, *Advanced Structured Materials*, (2018), 69-88.
5. *van der Vorst H.A.* Iterative Krylov Methods for Large Linear Systems. Cambridge University Press, 2003. 221 p.
6. *Belokon A.V., Eremeyev V.A., Nasedkin A.V., Solov'yev A.N.* Partitioned schemes of the finite element method for dynamic problems of acoustoelectroelasticity. *J. Appl. Math. Mech.* 2000. Vol. 64, № 3. P. 367–377.
7. *Документация по функции mldivide* MATLAB Help Center. <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/double.mldivide.html#bt4jslc-6>.
8. *Davis T.A.* Algorithm 849: A concise sparse Cholesky factorization package. *ACM Trans. Math. Softw.* 2005. Vol. 31, № 4. P. 587–591. <https://doi.org/10.1145/1114268.1114277>.

ВЫДЕЛЕНИЕ ПРИКАТОДНОЙ ОСОБЕННОСТИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ИНТЕНСИВНЫХ ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ¹

Комаров Д.С., Свешников В.М.

*Институт вычислительной математики и математической
геофизики СО РАН, Новосибирск*

Введение

Математическое моделирование интенсивных пучков заряженных частиц требует решения нелинейных самосогласованных задач электронной оптики, с учётом сил пространственного заряда. В важном для практики ρ -режиме в таких задачах возникает прикатодная особенность: вблизи катода плотность объемного заряда обращается в бесконечность, хотя объемный заряд конечен. Вследствие численного решения непосредственно с катода приводит к неустраняемой погрешности, которая начиная с некоторого значения, не уменьшается при дроблении расчетной сетки [1-3].

Эффективным подходом к решению данной проблемы является метод декомпозиции расчетной области [4]. Исходная область разделяется на прикатодную подобласть, где решение находится аналитически [5], и основную подобласть, где применяются численные методы. Согласование решений на общей границе приводит к необходимости решения нелинейного уравнения Пуанкаре–Стеклова, что определяет итерационный процесс по нелинейности для всей задачи [2].

В настоящей работе предлагается применение метода секущих для решения нелинейного уравнения Пуанкаре–Стеклова. Основное преимущество подхода заключается в вычислительной экономичности и потенциальной возможности расширения на двумерный случай при моделировании методом трубок тока. В работе приводится результат серии расчётов численного эксперимента по расчету плотности тока в модельной задаче о плоском диоде, демонстрирующие высокую эффективность предложенного метода.

Расчёт плотности тока

Рассматривается стационарная самосогласованная задача для интенсивного пучка заряженных частиц в замкнутой области G . Задача описывается

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код проекта FWNM-2025-0001)

системой уравнений, включающей уравнения движения частиц в электрическом поле с потенциалом φ и напряженностью $\vec{E}$, уравнение Пуассона для φ и уравнение неразрывности для плотности тока $\vec{j}$ [6].

Разделим всю расчетную область G линией Γ_{cb} на подобласти G_c и G_b . Граница Γ той же линией разбивается на Γ_c , Γ_b такие, что $\bar{G}_c = G_c \cup \Gamma_c \cup \Gamma_{cb}$, $\bar{G}_b = G_b \cup \Gamma_b \cup \Gamma_{cb}$, G_c содержит катод C . Будем называть $\bar{G}_c$ прикатодной подобластью, а $\bar{G}_b$ – основной подобластью.

Исходная самосогласованная задача в $\bar{G}$ решается построением в подобластях последовательных приближений с решением соответствующих подзадач в $\bar{G}_c$ и $\bar{G}_b$. Зададим условие на Γ_{cb} для потенциала φ вида

$$\varphi|_{\Gamma_{cb}} = w,$$

где $w = w(T)$ – заданная функция точки $T \in \Gamma_{cb}$. Аналитически рассчитывается плотность тока j и пучок в $\bar{G}_c$, тем самым определяется движение частиц на Γ_{cb} . Используя полученные величины и w , решается численными методами подзадача в $\bar{G}_b$. После чего пересчитывается функция w согласно правилам, приведенным ниже, и описанный процесс повторяется на следующем приближении.

В целях согласования решений на Γ_{cb} зададим условие

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right)_c - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right)_b = 0, \quad (1)$$

здесь $\vec{n}$ – нормаль к Γ_{cb} , индексы c, b указывают на соответствие величин в скобках к $\bar{G}_c$ и $\bar{G}_b$. Для определенности примем, что $\vec{n}$ – внутренняя по отношению к $\bar{G}_b$.

Производные же в формуле (1) являются функциями от w , который согласно антипараксиальной теории определяет плотность тока $j = j(w)$. Тогда сформулировать исходную задачу нахождения j можно в виде операторного уравнения

$$Fw \equiv f_c(w) - f_b(w) = \left(\frac{\partial \varphi(w)}{\partial \vec{n}} \right)_c - \left(\frac{\partial \varphi(w)}{\partial \vec{n}} \right)_b = 0, \quad (2)$$

где $F : W \rightarrow W$ – нелинейный оператор, действующий в пространстве W функций, определённых на Γ_{cb} . Это уравнение по аналогии с линейными задачами будем называть уравнением Пуанкаре – Стеклова.

Уравнение (2) решаем приближенно. Построим на Γ_{cb} сетку $\omega = \{T_i \in \Gamma_{cb}, i = 1, 2, \dots, N_\Gamma\}$ с шагами $h_i = l(T_{i+1}) - l(T_i) > 0$, $i = 1, 2, \dots, N_\Gamma - 1$, где N_Γ – заданное целое число, а $l(T_i)$ – длина отрезка $[T_1, T_i]$ границы Γ_{cb} , отсчитываемая от точки T_1 .

Перейдем к приближенной задаче нахождения в узлах сетки функции дискретного аргумента, под которой и будем в дальнейшем понимать функцию w . Для чего определим систему нелинейных операторных уравнений

$$\Phi(w) \equiv \{f_i(w)\} = 0.$$

$$f_i(w) = \left(\frac{\partial \varphi(w)}{\partial \vec{n}} \right)_{c,i} - \left(\frac{\partial \varphi(w)}{\partial \vec{n}} \right)_{b,i}, \quad i = \overline{1, N_\Gamma}. \quad (3)$$

При моделировании пучка методом трубок тока будем считать, что число трубок равно N_Γ . Также полагаем, что каждый i -ый узел является точкой пересечения соответствующей i -ой трубки тока с интерфейсом Γ_{cb} с определённым на ней $f_i(w)$. Взаимодействие между трубками тока происходит опосредовано через общее электрическое поле.

В каждом i -ом узле уравнение $f_i(w)$ будем решать методом секущих

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{f_i(w_i^n)(w_i^n - w_i^{n-1})}{f_i(w_i^n) - f_i(w_i^{n-1})}, \quad (4)$$

где n – номер итерации. Далее в тексте индекс i опускаем. Преимуществом метода является отсутствие необходимости решения вспомогательных подзадач на каждой итерации и как следствие повышенная вычислительная экономичность.

В $\bar{G}_c$ нахождение решения самосогласованной задачи осуществляется на основе антипараксиальной теории В.А. Сырового [5] и следующему из нее обобщенному закону «3/2». Для одномерной трубки тока решение имеет вид (здесь индекс n опускается)

$$j = c_j \frac{w^{3/2}}{l^2}, \quad \varphi(s) = \left(\frac{s}{l} \right)^{\frac{4}{3}} w, \quad (5)$$

$$f_c(w) = \left(\frac{\partial \varphi(w)}{\partial \vec{n}} \right)_c = \frac{4w}{3l}, \quad (6)$$

где s – расстояние от катода по нормали, l – расстояние от катода до Γ_{cb} , c_j – размерная константа (подробнее см. [7]).

Решение задачи в $\bar{G}_b$ проводится численными методами. Производная $f_b(w)$ в $\bar{G}_b$ аппроксимируется трёхточечной разностной схемой.

Численный эксперимент

Проведена серия расчётов для численного эксперимента на одномерной модельной задаче о плоском диоде. Вся расчётная область представляет собой отрезок прямой $0 \leq x \leq d$ (d – расстояние от катода до анода), с

заданной величиной потенциала V на аноде. Для данной задачи существует точное аналитическое решение j_a

$$j_a = c_j \frac{V^{3/2}}{d^2}. \quad (7)$$

Итерационный процесс (4) проводился с точностью 10^{-10} . Технология проведения расчёта заключается в следующем:

1. Инициализация

Задаётся $d = 100$, $l = \frac{1}{10}d$, $V = 100$. На отрезке $[l, d]$, представляющем собой $\bar{G}_b$, вводится равномерная сетка Ω , которую будем варьировать в пределах от 10 до 10^6 узлов. Для первой итерации метода секущих будем вычислять значения разностной производной для двух начальных фиксированных значений $w^0 = 1$, $w^{1/2} = w^0 + 0.01V$.

2. Итерационный процесс

Проводим итерационное решение уравнения (3) до сходимости. На каждом приближении w^n выполняются следующие действия:

- (а) Рассчитываем плотность тока j^n в $\bar{G}_c$ согласно выражению (5). С полученным j^n решаем подзадачу в $\bar{G}_b$ на сетке Ω . Найдем распределение потенциала при w^n . Уравнение Пуассона аппроксимируется трёхточечными разностными выражениями, имеющими погрешность второго порядка, и решается относительно приближенного распределения потенциала в узлах сетки методом экономичной прогонки, требующей для своей реализации $4(N - 1)$ сложений и один дополнительный массив размера $N - 1$ [8].
- (б) Используя трехточечную разностную схему и распределение потенциала находим $f_b(w^n)$. После исходя из формул (3), (6) находим разность производных на интерфейсе $f(w^n)$. Следующее приближение w^{n+1} берётся согласно (4).

Рассчитывается относительная погрешность в процентах $\varepsilon\%$

$$\varepsilon\% = \left| \frac{j - j_a}{j_a} \right| 100,$$

где j – решение, полученное в результате численно-аналитического метода. В Таблице 1 приведены результаты расчётов.

Из данной таблицы видно, что решение имеет второй порядок точности, а также приемлемую скорость сходимости в пределах 14-16 итераций.

N	$\varepsilon\%$	Кол-во итераций
10^1	3,00	16
10^2	4,78E-02	14
10^3	5,08E-04	14
10^4	5,11E-06	14
10^5	5,02E-08	14
10^6	4,67E-10	14

Таблица 1: Точность решения и число итераций до сходимости

Заключение

Разработан алгоритм решения нелинейного уравнения Пуанкаре–Стеклова на основе метода секущих с декомпозицией области и учётом прикатодной особенности. Экспериментально подтверждены второй порядок точности и высокая скорость сходимости. Перспективы дальнейших исследований могут включать в себя полноценное расширение метода секущих на двумерные задачи путём моделирования методом трубок тока и прямое сравнение с другими методами. Также они могут быть направлены на расширение области применения метода на более сложные конфигурации электронно-оптических систем и разработку параллельных алгоритмов для проведения расчетов на многопроцессорных вычислительных системах.

Литература

1. *Свешников В.М.* Численное моделирование интенсивных пучков заряженных частиц: диссертация доктора физико-математических наук: 05.13.18. Новосибирск, 2006. 333 с.
2. *Свешников В.М.* Нелинейное уравнение Пуанкаре – Стеклова и его решение в задачах электронной оптики // *Нелинейный мир*. 2014. № 12. С. 20–25.
3. *Свешников В.М.* Решение самосогласованных задач электронной оптики методом итераций по подобластям без налегания и смены типа граничного условия // *Вычислительные технологии*. 2006. Т. 11, № 5. С. 77–90.
4. *Сыровой В.А., Свешников В.М., Козырев А.Н.* Аналитическое и численное моделирование интенсивных пучков заряженных частиц. Новосибирск: Сибирское отделение РАН, 2023. 316 с.
5. *Сыровой В.А.* Введение в теорию интенсивных пучков заряженных частиц. Москва: Энергоатомиздат, 2004. 488 с.

6. *Ильин В.П.* Численные методы решения задач электрофизики. Москва: Наука, 1985. 333 с.
7. *Свешников В.М.* Расчет прикатодной области в электронно-оптических системах, формирующих интенсивные пучки заряженных частиц // Прикладная физика. 2004. № 1. С. 50–55.
8. *Свешников В.М.* Об автоматизации численного решения стационарных и нестационарных задач электронной оптики: диссертация кандидата физико-математических наук: 01.01.10. Новосибирск, 1976.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ РЕГУЛЯРНЫХ И СИНГУЛЯРНЫХ МАТРИЧНЫХ ПУЧКОВ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ¹

Мартынова Т.С., Муратова Г.В., Оганесян П.А.,
Игнатенко И.Д.

ЮФУ, Институт математики, механики и компьютерных наук им. Воровича И.И., Ростов-на-Дону

Введение

В настоящее время в численной линейной алгебре и приложениях теория матричных пучков большой размерности занимает одно из ведущих мест. Это связано как с потребностью решать соответствующие задачи на современных компьютерах (с использованием параллельных вычислений), так и с необходимостью развивать существующую теорию численных методов для данного класса задач.

Если A и B – матрицы одинаковых размеров, то они определяют пучок, под которым понимается множество матриц $A + \sigma B$, где σ – параметр. Теория матричных пучков строится обычно над полем C , в таком случае σ может принимать любые комплексные значения, однако случай, когда A и B – вещественные матрицы, а σ – вещественный параметр представляет наибольший практический интерес. Заметим, что в регулярной паре (A, B) матрица B может быть как невырожденной, так и вырожденной. Пара с невырожденной матрицей называется неособой [1].

У пары с вырожденной матрицей B могут существовать бесконечные собственные значения. Однако, усложнений, связанных с допущением бесконечного собственного значения, можно избежать путём преобразования заданной регулярной пары в неособую. Такое преобразование можно осуществить различными способами. Заметим, что хотя обе матрицы регулярной пары (A, B) могут быть вырожденными, их ядра должны иметь тривиальное пересечение [2].

В спектральной теории матриц большую роль играет понятие инвариантного подпространства, знание которого позволяет свести исходную задачу к решению задачи гораздо меньшего порядка. Это особенно актуально для матриц огромных размеров, получаемых при дискретизации современных задач методом конечных разностей и конечных элементов и последующем

¹Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00205, <https://rscf.ru/project/24-21-00205/> в Южном федеральном университете

их численном решении. Для соответствующего расщепления матрицы используются преобразования подобия. При работе с парами матриц (A, B) те же функции выполняют преобразования эквивалентности [1] .

Численные методы

Следует отметить существенное отличие пучковой ситуации от обычной теории матриц. Эрмитова матрица является частным случаем нормальной и, следовательно, также имеет ортонормированный базис из собственных векторов. В то же самое время эрмитовы пары отнюдь не составляют подмножества нормальных пар (и, в общем случае, не могут быть приведены к диагональному виду). Однако есть специальный класс эрмитовых пар, для которого приведение к диагональному виду возможно. Это пучки (A, B) с положительно или отрицательно определённой матрицей B . Такие пары называют определёнными. Но и для определённых пар базис из собственных векторов не будет ортогональным, если исключить случай перестановочных матриц. Следует отметить, что эквивалентность двух вещественных симметричных или двух эрмитовых пучков недостаточна для их конгруэнтности [2, 8].

Чтобы эрмитов пучок (A, B) можно было привести к диагональному виду с помощью унитарной конгруэнции, матрицы пучка должны коммутировать, а сопровождающая матрица будет эрмитовой и диагонализуется тем же преобразованием. То же самое справедливо в отношении вещественных симметричных пар, диагонализующихся ортогональными конгруэнциями. Таким образом, диагонализуемость определённой пары (A, B) есть следствие того, что сопровождающая матрица диагонализуема и имеет вещественный спектр.

Существуют различные аналогии между свойствами определённых пучков и обычных эрмитовых матриц. Так, крайние собственные значения пучка (A, B) являются экстремумами обобщённого отношения Релея:

$$\rho(A, B; x) = (Ax, x)/(Bx, x). \quad (1)$$

Имеются точные эквиваленты для минимаксных (и максиминных) равенств Куранта-Фишера, теорем о перемежаемости собственных значений (матрицы и ее главных подматриц): эти соответствия лучше всего объясняются в рамках теории евклидовых или унитарных пространств. Отдельным вопросом при работе с большими пучками матриц является способ описания чувствительности инвариантных подпространств к малым возмущениям элементов матрицы. Чтобы получить такой способ, нужно прежде всего указать меру, посредством которой оценивается близость подпространств. Если интерес представляет чувствительность отдельного, причём простого

собственного значения λ , то наиболее точную оценку даёт индивидуальное число обусловленности.

Заметим, что одновременная диагонализация двух матриц пучка (эрмитовых или вещественных симметричных) возможна и тогда, когда ни одна из них не определена, но в пучке $(\alpha A + \beta B)$ имеются определённые матрицы. При решении обобщенной задачи на собственные значения, возникающей в результате конечно-элементного моделирования электро-эластичных материалов, в работах [3, 4, 5] рассмотрен случай, когда матрица A является симметричной квази-определённой (SQD), т.е. незнакоопределённой, а матрица B - вырожденной. При этом существует линейная комбинация матриц такая, что матричный пучок является положительно определённым (например, $\alpha = -0.5, \beta = 7$).

Способность выявить определённую заданной эрмитовой пары (A, B) , а затем найти положительно определённую линейную комбинацию $(\alpha A + \beta B)$ имеет большое значение при решении спектральных задач. Это связано с тем, что техника решения задач

$$Ax = \lambda Bx, \quad (2)$$

где A и B эрмитовы и $B > 0$, известна. Если ни одна из матриц не определена, но пучок (A, B) определён, то есть возможность перейти к эквивалентной задаче с положительно определённой матрицей. Алгоритм построения положительно определённой линейной комбинации заданных эрмитовых матриц A и B имеется в работе [6].

Для такого класса матриц предложены и реализованы численные методы на основе алгоритма Ланцоша со сдвигом и обращением как для модельных матриц небольшого размера, так и для больших матричных пучков с использованием параллельных вычислений и эффективной реализации матрично-векторных произведений. При реализации данных алгоритмов во внутреннем цикле метода Ланцоша использованы различные подходы к решению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), учитывающие свойства данной матричной пары [3, 4, 5]. Среди численных методов при решении СЛАУ большой размерности предпочтение отдаётся методам подпространств Крылова [7], хотя многое при выборе методов определяют свойства матриц, входящих в пучок [12].

Исследование спектра пары в зависимости от значений параметра σ показало, что матрица $(A - \sigma B)$ в пределах интервала $(0, \lambda_{min})$ является SQD, внутри интервала $(\lambda_{min}, \lambda_{max})$ - незнакоопределённой, при $(\lambda > \lambda_{max})$ данная матрица является отрицательно определённой, что и определяет выбор метода для решения соответствующей СЛАУ. Для решения систем линейных уравнений с незнакоопределёнными матрицами используются такие методы, как MINRES и SYMMLQ [12].

Предобусловленные методы вариационного типа для решения задачи с большими матричными парами

В ряде задач структурного анализа искомой обычно является только нижняя часть спектра. Эта особенность позволяет использовать для их решения вариационные методы, в частности, методы сопряжённых градиентов (СГ). Собственные значения (2) находятся последовательно, начиная с наименьшего. Спектр задачи предполагается упорядоченным в возрастающем порядке. Возможно наличие кратных собственных значений, что не снижает эффективности используемых алгоритмов. Для замыкания сошедшихся собственных векторов используется B -ортогональная дефляция. Заметим, что в решаемых задачах характерно сгущение спектра именно в его нижней части. Для решения задачи (2) применяются следующие вариационные методы: RQMIN [9], DACG (Deflation-Accelerated Conjugate Gradient) [10], LOCGM (локально оптимальный метод сопряжённых градиентов) [11], а также их блочные и предобусловленные варианты [5]. Данные алгоритмы основаны на свойстве собственных чисел и собственных векторов последовательно минимизировать обобщённое отношение Релея (1). Для получения положительной определённости матрицы B делается переход к эквивалентной задаче с использованием дополнения Шура. Это позволяет как понизить размерность задачи, так и решает проблему бесконечных собственных значений. Если матрица, стоящая в правой части (2) является симметричной положительно-определённой, то все собственные значения задачи являются конечными.

Методы вариационного типа при решении (2) уступают по скорости сходимости методам, основанным на обратных итерациях. Поэтому их асимптотическое поведение желательно иметь эквивалентным асимптотической скорости сходимости методов решения СЛАУ. Скорость сходимости итерационных методов оптимизации зависит от числа обусловленности матрицы Гессе в точке минимума. При этом собственные числа сходятся в два раза быстрее, чем соответствующие собственные векторы.

Для эффективного применения вариационных методов требуется выбор предобусловливателя, который действует на текущее значение невязки (градиента) [11]. Целесообразен поиск предобусловливателей не учитывающих конкретную структуру разреженности матриц, связанную со свойствами математических моделей. Наиболее эффективным подходом для решения задач умеренного размера является использование полного и неполного разреженного разложения Холецкого, тогда как для пучков большого размера наиболее эффективными являются алгебраические многосеточные методы.

Вырожденные матричные пучки

Обобщённая проблема собственных значений (2) для сингулярных матричных пар (A, B) принципиально труднее задачи с положительно-определёнными симметричными пучками, т.к. здесь могут иметь место явления, осложняющие локализацию собственных значений [2, 12]. Наиболее часто вырожденность пучка обусловлена тем, что матрицы пары имеют общие нуль-векторы x такие, что $Ax = Bx = 0, x \neq 0$. Эти векторы являются собственными векторами пары, но любое число будет являться её собственным значением. Эта неопределённость вызывает теоретические и вычислительные трудности и делает неизбежным первоначальный анализ такой пары.

Мы сначала ищем, а затем избавляемся от общего нуль-пространства вырожденной матричной пары. Теоретически это делается сужением пучка на инвариантное подпространство пары (A, B) . Но на практике возможны ситуации присутствия в такой паре векторов, которые аннулируются (или почти аннулируются) обеими матрицами. После дискретизации проблемы методом конечных элементов это приводит к тому, что некоторые собственные значения вычисляются абсолютно неверно. Эти собственные числа очень чувствительны к любым возмущениям матриц пары, и их наличие в пучке понижает устойчивость вычислительного алгоритма в целом при определении остальных собственных чисел. Поэтому на этапе анализа и модельных расчетов с небольшими вырожденными парами нужно обязательно избавляться от общего нуль-пространства расчётного пучка. Мы используем для этой цели сингулярное разложение матриц (SVD) [1, 2, 12].

Предложен алгоритм SVD, который имеет быструю сходимость, поскольку для практического применения с огромными матричными парами требуется проведение сингулярного разложения в реальном времени. Одним из известных методов, обеспечивающих сходимость при сингулярном разложении, является метод Якоби [12], который имеет квадратичную сходимость. Этот метод является более точным, чем известные алгоритмы на основе QR-разложения. Для SVD используется двустороннее плоское вращение Якоби. Левостороннее вращение Якоби влияет только на элементы в нужных столбцах, а правостороннее вращение — только на элементы в соответствующих строках. Таким образом, для матричных пар размером N могут решаться параллельно $N/2$ подзадач. Однако при работе с очень большими матричными пучками достижение быстрой сходимости является сложной задачей даже при использовании циклической версии данного алгоритма. Для плохо обусловленных СЛАУ используется усечённая версия SVD-алгоритма для решения приведённой системы уравнений с матрицей, которая имеет меньшее число обусловленности.

Программная реализация

Расчёты для матриц малого и среднего размера проводились в среде MATLAB (R2019a). Поскольку точное решение задачи неизвестно, итерационные методы были протестированы первоначально на диагональной матрице 1000×1000 .

Мы также сравниваем приближённо вычисленные собственные пары с соответствующими, полученными встроенным решателем EIGS.m пакета MATLAB. Начальный вектор берётся равным $x_0 = [1, 1, \dots, 1]^T$ нужного размера, так что $x_0^T B x_0 = 1$ и x_0 является B -ортогональным множеству ранее вычисленных собственных векторов. Все итерации останавливались, когда $\|res_k\|_2 < \varepsilon$, где res_k – вектор невязки на k -итерации, $\varepsilon = 10^{-8}$.

Следует отметить две особенности использованных вариационных методов при решении (2). Во-первых, все методы без труда находят кратные собственные значения. Во-вторых, они находят собственные числа, сконцентрированные в кластерах малого размера ($\sim 10^{-5}$), увеличивая при этом вычислительное время на 25% приблизительно. Все рассмотренные методы CG-типа опережают метод Ланцоша со сдвигом и обращением, когда ищется небольшое число собственных пар. С другой стороны, очевидным преимуществом метода Ланцоша является возможность находить собственные значения в середине спектра на заданном интервале или возле заранее заданного сдвига. Однако, при использовании последнего метода часть собственных пар может быть потеряна, когда сходимость внешних итераций уже достигнута.

При программной реализации методов была предусмотрена вычислительная ветвь для случая, когда матричная пара (A, B) оказывается сингулярной. В этом случае производится исчерпывание общего нуль-пространства матриц пучка посредством сингулярного разложения. Корректность проведенных вычислений проверяется сравнением с результатами, полученными встроенной MATLAB-процедурой SVD.m. После этого собственные числа расчётного пучка находятся решением стандартной проблемы собственных значений. В частных случаях при наличии у пары кратных собственных значений структура пучка позволяет строить для решения проблемы (2) эффективные параллельные вычислительные схемы.

Представленные в работе методы применялись для решения тестовых задач с электроупругими материалами. Численные эксперименты проводились с матрицами жесткости и масс, полученными на основе конечно-элементных сеток двух видов: с четырехугольными линейными элементами в форме тетраэдра и с восьмиугольными линейными элементами в форме гексаэдра.

Применялись различные форматы хранения разреженных матриц и алгоритмы перенумерации неизвестных, что, в отдельных случаях, привело к

сокращению времени вычислений на 20-30%. Размер тестовых матриц варьировался от 2 до 200 тысяч строк. Матрицы меньшего размера использовались для отладки алгоритма, а матрицы большего – для анализа ограничений существующих программных решений и собственных реализаций.

Итоговая реализация пригодна для решения задач модального анализа для электроупругих тел с моделями среднего размера – до нескольких сотен тысяч элементов. Переход к использованию технологии AMG на графических процессорах позволит перейти к матрицам размерности 10^6 и выше.

Литература

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. Москва: Физматлит, 2010. 560 с.
2. Parlett B.N. The symmetric eigenvalue problem. SIAM: Philadelphia, 1998. 382 с.
3. Martynova T., Muratova G., Oganessian P., Shtein O. The Numerical Solution of Large-Scale Generalized Eigenvalue Problems Arising from Finite-Element Modeling of Electroelastic Materials // MDPI, Symmetry. 2023. Vol. 15. Issue 1(171).
4. Muratova G.V., Martynova T.S., Oganessian P.A. Numerical solution of partial symmetric generalized eigenvalue problems in piezo device modal analysis // Communications on Applied Mathematics and Computation. 2025. Vol. 7. P. 1002–1015.
5. Мартынова Т.С., Муратова Г.В., Оганесян П.А. Итерационные методы градиентного типа для решения обобщённой проблемы собственных значений // Материалы XXXI научной конференции <Современные информационные технологии: тенденции и перспективы развития>: Ростов-на-Дону; Таганрог: Изд-во Южного федерального университета. 2024. С. 283–285.
6. Crawford C.R., Moon Y.S. Finding a positive definite linear combination of two Hermitian matrices // Linear Algebra and Appl. 1983. Vol. 51. P. 37–48.
7. Мартынова Т.С., Муратова Г.В., Оганесян П.А., Штейн О.О. Решение частичной проблемы собственных значений для симметричных незнакоопределённых матриц на подпространствах Крылова // Материалы XXIX научной конференции <Современные информационные технологии: тенденции и перспективы развития>: Ростов-на-Дону; Таганрог: Изд-во Южного федерального университета. 2022. С. 193–197.
8. Ikramov Kh.D. Matrix pencils: Theory, applications, and numerical methods // Journal of Soviet Math. 1993. Vol. 64. P. 783–853.

9. *Longsine D.E., McCormick S.F.* Simultaneous Rayleigh-quotient minimization methods for $Ax = \lambda Bx$ // Linear Algebra Appl. 1980. Vol. 34. P. 195-234.
10. *Perdon A., Gambolati G.* Extreme eigenvalues of large sparse matrices by Rayleigh Quotient and modified conjugate gradients // Comp. Meth. Appl. Mechanics and Engineering. 1986. Vol. 56. P. 251–264.
11. *Knyazev A.V.* The preconditioned gradient-type iterative methods in a subspace for partial generalized symmetric eigenvalue problem // SIAM J. Numerical Analysis. 1994. Vol. 31. P. 1226–1239.
12. *Saad Y.* Numerical methods for large eigenvalue problems. SIAM: second edition, 2011. 276 c.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ НА ИНТЕРФЕЙСЕ ПРИ ДЕКОМПОЗИЦИИ 2D РАСЧЁТНОЙ ОБЛАСТИ

Неборский И.К., Свешников В.М., Яклюшин А.М.

*Институт вычислительной математики и математической
геофизики СО РАН, Новосибирск*

Введение

В данной работе рассматриваются численные методы решения краевых задач с эллиптическим оператором для двумерных областей с использованием метода декомпозиции. Центральным элементом методов декомпозиции области является процедура согласования ("сшивки") решений, полученных в смежных подобластях. Для этого на границе сопряжения подобластей, называемой интерфейсом, вводится уравнение Пуанкаре–Стеклова. Коренным отличием предлагаемого подхода от известных методов декомпозиции области [1-2] является построение конечно-разностной аппроксимации уравнения Пуанкаре–Стеклова непосредственно для проведения внешнего итерационного процесса на интерфейсе, который, в свою очередь, определяет итерации по подобластям.

Для решения задач в подобластях на каждой внешней итерации проводятся внутренние итерации. Целью настоящей работы является экспериментальное исследование нового подхода к организации внутренних итераций, названного методом простой итерации с однократным проходом. Этот метод основан на предположении, что на начальных этапах внешних итераций приближения на интерфейсе еще далеки от точного решения, и поэтому нет необходимости добиваться полной сходимости внутренних итераций. Вместо этого предлагается выполнять фиксированное малое число внутренних итераций, что позволяет существенно сократить вычислительные затраты.

Постановка задачи

Рассматривается замкнутая область $\bar{G} = G \cup \Gamma$ с границей Γ . Необходимо найти решение краевой задачи:

$$\Delta \varphi = f \quad \text{в области } G, \quad l\varphi = g \quad \text{на границе } \Gamma, \quad (1)$$

где Δ – оператор Лапласа, l – оператор граничных условий, φ – искомая функция, f, g – заданные функции координат (x, y) . Рассматриваются граничные условия Дирихле и Неймана.

Метод декомпозиции области

Для решения задачи (1) строится квазиструктурированная сетка, состоящая из макросетки Ω_h , осуществляющая декомпозицию $\bar{G}$ на непересекающиеся и подобласти, и подсетки. На границе сопряжения подобластей справедливо уравнение Пуанкаре–Стеклова:

$$\left(\frac{\partial \varphi(\psi)}{\partial \vec{n}} \right)_{\gamma}^{(+)} + \left(\frac{\partial \varphi(\psi)}{\partial \vec{n}} \right)_{\gamma}^{(-)} = 0 \quad (2)$$

где ψ – след функции φ на γ , $\vec{n}$ – внутренняя нормаль к γ в каждой подобласти, индексы $+$, $-$ указывают на принадлежность объекту разных сторон интерфейса. Дискретизация подзадач сводится к решению приближенной задачи на подсетках квазиструктурированной сетки [3]:

$$\Delta_h u = f_h, \quad l_h u|_{\Gamma} = 0, \quad u|_{\gamma} = v.$$

где Δ_h , l_h – приближенные на интерфейсе операторы Лапласа и граничных условий, v , u – приближенные значения функций φ , ψ . Основной проблемой является вычисление функции v на интерфейсе.

Итерационные методы на интерфейсе

Для вычисления функции v используем разностные аналоги нормальных производных в уравнении (2):

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right)_{\gamma} \approx d_h u,$$

$$\{(d_h u)_i^{(+)} + (d_h u)_i^{(-)}\} = 0, \quad i = 1, \dots, N_{\gamma}, \quad (3)$$

где d_h – линейный оператор, определяющий конкретную схему, согласованную по порядку точности с порядком решения приближенных задач, N_{γ} – число узлов подсетки на γ .

Метод простой итерации с однократным проходом

Используем трехточечные схемы второго порядка для аппроксимации нормальных производных в уравнении (3) на n -ой итерации:

$$(d_h^{(+)} u)_i^n = \frac{3u_i^n - 4u_{i+1}^n + u_{i+2}^n}{2h_+}, \quad (d_h^{(-)} u)_i^n = \frac{-3u_i^n + 4u_{i-1}^n - u_{i-2}^n}{2h_-}.$$

Тогда при условии $h_- = h_+$ метод простой итерации будет определяться как:

$$u_i^{n+1} = \frac{4u_{i+1}^n + 4u_{i-1}^n - u_{i+2}^n - u_{i-2}^n}{6}, \quad i = 1, \dots, N_\gamma.$$

Для метода однократного прохода выполняется фиксированное малое число внутренних итераций (в работе рассматривается одна итерация).

Численные расчёты и анализ

Тестовая задача

Для тестирования используется краевая задача для уравнения Лапласа в области $G = [0.3, 0.7] \times [0, 0.4]$ с граничными условиями:

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{в области } G, \quad \varphi = g \quad \text{на границе } \Gamma,$$

где аналитическое решение в полярных координатах:

$$\varphi(r) = \frac{\ln\left(\frac{rR_2}{R_1^2}\right)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}, \quad \varphi(R_1) = 1, \quad \varphi(R_2) = 2, \quad R_1 = 0.1, \quad R_2 = 1.$$

Искомая область декомпозируется на равные макросетки, а макросетки в свою очередь декомпозируются на равные подсетки. Используются макросетки 2×2 и 4×4 , подсетки размера $2^k + 2$, $k = 3, \dots, 7$.

Сравнение методов

Критерии сравнения: точность решения, время вычислений и количество итераций. Таблица 1, где $Q_0(L_0)$ – отношение времени (количества итераций) множественного запуска к однократному, а $N_m(N_s)$ – размер макросетки(подсетки), показывает эффективность однократного прохода по отношению к запуску до сходимости.

Ошибки в обоих подходах соответствуют второму порядку точности $O(h^2)$. Выигрыш однократного прохода по отношению к многократному на макросетке 2×2 составляет 131 раз, на макросетке 4×4 – 91 раз. Несмотря на проигрыш по итерациям. Соответственно 0.64, 0.53.

N_m	N_s	Q_0	L_0
2	10	8,4	0,67
2	18	19,1	0,63
2	34	29,7	0,63
2	66	58,5	0,63
2	130	128,5	0,63
4	10	5,2	0,59
4	18	11,5	0,54
4	34	20,3	0,53
4	66	42,2	0,53
4	130	89	0,53

Таблица 1: Сравнение метода простой итерации с однократным проходом и запуском до сходимости

Заключение

Исследован новый подход к организации внутренних итераций, названного методом простой итерации с однократным проходом, для решения краевых задач на интерфейсе при декомпозиции 2D областей. Показано, что данный метод позволяет сохранить точность решения второго порядка, значительно сокращая время вычислений, но увеличивая число итераций. Метод имеет перспективы для параллельной реализации и применения в более сложных конфигурациях расчетных областей.

Литература

1. Quarteroni A., Valli A. Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations. UK: Clarendon Press, 1999. 376 p.
2. Василевский Ю.В., Ольшанский М.А. Краткий курс по многосеточным методам и методам декомпозиции области. М.: МГУ, 2007. 104 с.
3. Свешников В.М. Построение прямых и итерационных методов декомпозиции // Сиб. журн. индустр. матем. 2009. Т. 12, № 3(39). С. 99–109.

АЛГОРИТМЫ УСВОЕНИЯ ДАННЫХ ДЛЯ ЗАДАЧ МОДЕЛИРОВАНИЯ АТМОСФЕРНОЙ ХИМИИ ГОРОДОВ¹

Пененко А.В.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск

Введение

Цифровой двойник городской атмосферы – это система, объединяющая оценку качества воздуха, прогнозирование, управление и оптимизацию [1]. Технология цифровых двойников включает в себя взаимосвязанные математические модели прототипа, алгоритмы усвоения данных для уточнения параметров модели по данным измерений и алгоритмы оптимального управления для генерации управлений прототипом на основе уточненных моделей. Цель работы – представить подсистему усвоения данных цифрового двойника городской атмосферы и предварительные результаты ее апробации для Новосибирской городской агломерации. В наших исследованиях, связанных с цифровыми двойниками, мы обращаем внимание на химический аспект качества воздуха. Представлено развитие алгоритма из [2], примененного к городскому сценарию.

I Постановка задач

Рассматриваются две модели химии атмосферы: «базовая» используется для решения задач усвоения данных, а «эталонная» – для получения метеорологических данных, необходимых для задания параметров базовой модели и для генерации синтетических данных мониторинга качества воздуха, необходимых для оценки эффективности системы усвоения.

Базовая модель представляет собой нестационарную модель, описывающую распространение N_c ($l = 1, \dots, N_c$) реагирующих химических веществ в атмосфере. Модель рассматривается в области $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, где $\Omega = [0, X] \times [0, Y] \times [0, Z] \subset \mathbb{R}^3$, $T > 0$.

$$\frac{d\varphi}{dt} + A[\mathbf{v}](\varphi) = \mathbf{f} + \mathbf{r}, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega_T, \quad (1)$$

$$\varphi = \varphi^0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times \{0\}, \quad (2)$$

¹Исследование выполняется за счет гранта Российского научного фонда и Правительства Новосибирской области № 25-11-20061, <https://rscf.ru/project/25-11-20061/>.

где функция состояния $\varphi = \{\varphi_l(\mathbf{x}, t)\}_{l=1}^{N_c}$ и $\varphi_l(\mathbf{x}, t)$ – концентрация l -го вещества в точке $(\mathbf{x}, t) \in \Omega_T$, $A[\mathbf{v}]$ – оператор адвекции-диффузии-реакции с параметрами $\mathbf{v}$, $\varphi^0(\mathbf{x})$ – начальное условие, $f(\mathbf{x}, t)$ – априорная функция источников.

Параметры модели делятся на «заданные» $\mathbf{v}$ и «функции неопределенности» $\mathbf{q}$, принадлежащие некоторому набору допустимых значений параметров Q . В данной работе функциями неопределенности являются неизвестные источники загрязнения $\mathbf{q} = \mathbf{r}$. Решение задачи (1)-(2) для заданных $\mathbf{v}$ и $\mathbf{q} \in Q$ обозначим $\varphi[\mathbf{q}]$.

Усваиваются точечные измерения, полученные на стационарных постах мониторинга. В обратной задаче неизвестная функция неопределенности $\mathbf{q}^{(*)} \in Q$ должна быть определена по «данным измерений» $\varphi^{(*)} = \varphi[\mathbf{q}^{(*)}]$:

$$I^{(m)} = \varphi_{l^{(m)}}^{(*)}(\mathbf{x}^{(m)}, t^{(m)}), \left(\mathbf{x}^{(m)}, t^{(m)}, l^{(m)} \right) \in \Omega_T \times L_{meas}, \quad m = 1, \dots, M, \quad (3)$$

в определенные моменты времени $t^{(m)}$, в определенных точках $\mathbf{x}^{(m)}$ и в определенном веществе $l^{(m)} \in L_{meas} \subset L = \{1, \dots, N_c\}$.

Разделим временной интервал $[0, T]$ на N_W равных непересекающихся окон усвоения $[\theta^j, \theta^{j+1}]$, $j = 0, \dots, N_W$, где $\theta^0 = 0$ и $\theta^{N_W} = T$. В каждом окне усвоения ставится обратная задача для данных наблюдений $\{I^{(m)} : t^{(m)} \in [\theta^j, \theta^{j+1}]\}$, попадающих в это окно. Из этих данных необходимо определить функцию неопределенности $\mathbf{q}^{(*)}$. Решения, полученные в предыдущих окнах, могут быть использованы в следующих окнах. Задача усвоения данных – это последовательность связанных обратных задач.

II Методы

Алгоритм усвоения данных состоит из двух основных компонентов: алгоритм решения обратной задачи в окне усвоения и алгоритм преобразования решения, полученного в предыдущем окне усвоения, в априорную информацию для следующих окон. В нашем случае результат восстановления функции неопределенности в предыдущем окне используется в качестве первого приближения для следующего окна.

Алгоритм решения обратной задачи использует квазилинейное представление обратной задачи [2]. Если $\mathbf{q}^{(*)}$ является «истинным» решением задачи идентификации источника, то I – это соответствующие данные измерений, агрегированные в виде функции состояния, а δI – это его возмущение (т.е. шум измерения), тогда для любых U и $\mathbf{q}$ выполняется:

$$M_U [\mathbf{q}^{(*)}, \mathbf{q}] \left(\mathbf{q}^{(*)} - \mathbf{q} \right) = H_U I + H_U \delta I - H_U \varphi[\mathbf{q}], \quad (4)$$

где

$$M_U [\mathbf{q}^{(2)}, \mathbf{q}^{(1)}] z = \sum_{\xi=1}^{\Xi} \left\langle S[\mathbf{q}^{(2)}, \mathbf{q}^{(1)}; h^{(\xi)}], z \right\rangle_{L_2^{N_c}(\Omega)} \mathbf{e}^{(\xi)}, \quad (5)$$

$$H_U \varphi = \sum_{\xi=1}^{\Xi} \left\langle h^{(\xi)}, \varphi \right\rangle_{L_2^{N_c}(\Omega_T)} \mathbf{e}^{(\xi)}. \quad (6)$$

Здесь $\mathbf{e}^{(\xi)}$ – ξ -й элемент канонического базиса в $\mathbb{R}^{\Xi}$, $U = \{h^{(\xi)}\}_{\xi=1}^{\Xi}$ – набор проекционных функций и функции чувствительности $S[\mathbf{q}^{(2)}, \mathbf{q}^{(1)}; h]$ таковы, что для любого $\mathbf{q}^{(k)} \in Q$, $k = 1, 2$,

$$\left\langle S[\mathbf{q}^{(2)}, \mathbf{q}^{(1)}; h], \mathbf{q}^{(2)} - \mathbf{q}^{(1)} \right\rangle_{L_2^{N_c}(\Omega)} = \left\langle h, \varphi[\mathbf{q}^{(2)}] - \varphi[\mathbf{q}^{(1)}] \right\rangle_{L_2^{N_c}(\Omega_T)}. \quad (7)$$

Функция $S[\mathbf{q}^{(2)}, \mathbf{q}^{(1)}; h]$ определяется решением сопряженной задачи для проекционной функции h . Проекционная система $U = \{h^{(\xi)}\}_{\xi=1}^{\Xi}$ с функциями

$$h^{(m)} = \delta(x - x^{(m)})\delta(y - y^{(m)})\delta(z - z^{(m)})\delta(t - t^{(m)})\delta(l - l^{(m)}),$$

может использоваться для представления данных измерений в виде скалярного произведения функции состояния модели в формате (6). Уравнение (4) решается для нахождения $\mathbf{q}^{(*)}$. Поскольку современные станции мониторинга могут производить частые измерения различной ценности мы объединяем измерения в агрегаты, чтобы уменьшить шум измерений и контролировать размерность результирующего оператора чувствительности. Численную реализацию алгоритмов мы называем системой IMDAF (Inverse Modeling Data Assimilation Framework).

Параметры (1)-(2) задаются с помощью модели WRF-Chem версии 4.2.1 [3] с двумя вложенными доменами, включающими город Новосибирск и прилегающую территорию. IMDAF работает во вложенном домене. Горизонтальные шаги составляют 1000 метров, горизонтальная сетка – 76×91 узлов. По вертикали заданы 33 уровня, а нижний вертикальный уровень находился на высоте 50 м над поверхностью. В качестве модели трансформации выбран химический механизм RADM2 с динамикой аэрозолей MADE/SORGAM.

Современные города, включая Новосибирск, внедряют решения для умного города, позволяющие различными способами отслеживать источники выбросов. В связи с этим важно внедрять реалистичные генераторы априорных источников, способные воспроизводить доступные данные ГИС. В нашем генераторе мы загружаем граф улиц из сервиса OpenStreetMaps. По

ребрам графа статистически оценивается количество автомобилей различных типов, их скорость и ускорение и, следовательно, выбросы, используя профили выбросов транспортных средств. Сгенерированные агрегированные источники (рисунок 1 (а)) затем сохраняются во входном файле источника антропогенных выбросов модели WRF-Chem.

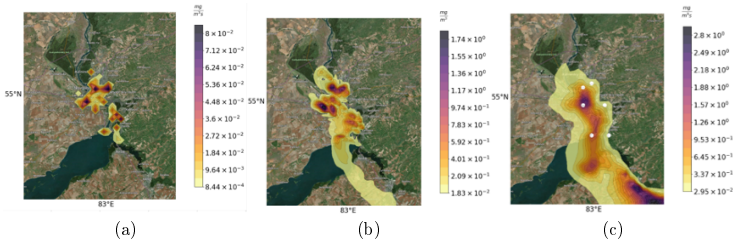


Рис. 1: Сгенерированный «истинный» источник выбросов NO (а). Сравнение решения WRF-Chem (b) с решением IMDAF (c) для "наблюдаемого" NO_2 при $t = 0.75T$.

Решение прямой задачи для модели WRF-Chem занимает приблизительно 3,5 часа. Так как алгоритмы решения обратной задачи и алгоритмы усвоения данных эквивалентны снятию решений прямой задачи, то модель должна быть упрощена, чтобы работать в реальном времени. Поэтому IMDAF использует более простые численные схемы, более простой механизм трансформаций и более грубую сетку. С учетом этих упрощений решение прямой задачи занимает примерно 26 секунд. Решение задачи усвоения данных занимает примерно 3,7 часа.

На рисунке 1 (b),(c) представлено сравнение соответствующих решений прямых решений задач для моделей WRF-Chem и IMDAF. В сценариях обратного моделирования источники выбросов, полученные с помощью генератора и соответствующие поля распределения концентраций WRF-Chem, рассматривались как «истинные».

III Результаты

Для оценки эффективности системы усвоения данных рассматривается сценарий продолжительностью 24 часа, начинающийся в 00:00 01.05.2024 ($T = 24 \times 3600$). Длина окна усвоения равна 2×3600 . Распределенные источники выбросов реконструируются как стационарные в пределах окна усвоения и выбрасывают только NO_2 («истинный» источник в модели WRF-Chem выбрасывает NO). Шесть станций мониторинга, отмеченных белыми

кругами на рисунке 1(d), «измеряют» концентрацию NO_2 каждые 20 минут модельного времени. Чтобы оценить предсказательную способность системы усвоения данных, мы рассмотрели эксперимент, в котором данные за $[0, 0,75T]$ усваиваются (т.е. это интервал обучения) а данные за $[0,75T, T]$ используются для проверки результатов (т.е. это интервал тестирования). Концентраций на постах представлена на рисунке 2 (c),(d).

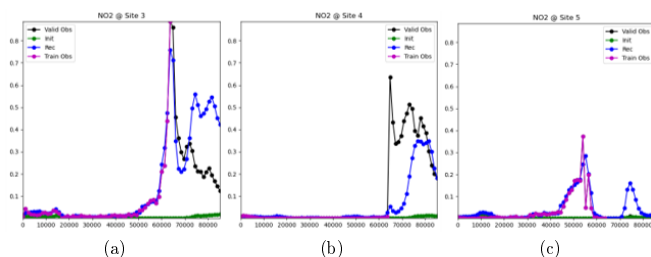


Рис. 2: Сравнение результатов IMDAF с синтетическими данными наблюдений WRF-Chem на двух постах измерений. Данные в интервале $[0, 0.75T]$ усваиваются (Train Obs, пурпурный), а в интервале $[0.75T, T]$ используются для проверки (Valid Obs, черный). Результат IMDAF отмечен синим цветом (Rec). Зеленым обозначено решение без усвоения (Init).

IV Заключение

Подсистема усвоения данных является одним из ключевых элементов технологии цифрового двойника городской атмосферы. Мы рассмотрели три взаимосвязанные модели: модель источника выбросов, модель WRF-Chem для генерации метеопараметров и синтетических данных измерений, и модель IMDAF, которая используется для усвоения данных наблюдений. Усвоение реализовано с использованием операторов чувствительности и ансамблей сопряженных уравнений. Система протестирована в сценарии усвоения данных для города Новосибирска.

Литература

1. *Topping D., Bannan T. J., Coe H., Evans J., Jay C., Murabito E., and Robinson N.* Digital twins of urban air quality: Opportunities and challenges // *Frontiers in Sustainable Cities*. 2021. Vol. 3, P. 786563.

2. *Penenko A. V., Gochakov A. V., and Antokhin P. N.* Data assimilation algorithm based on the sensitivity operator for a three-dimensional model of transport and transformation of atmospheric contaminants // *Atmospheric and Oceanic Optics*. 2024. Vol. 37, № 6. P. 822–832.
3. *Grell G. A., Peckham S. E., Schmitz R., McKeen S. A., Frost G., Skamarock W. C., and Eder B.* Fully coupled “online” chemistry within the WRF model,” *Atmospheric Environment*, vol. 39, № 37, pp. 6957–6975, dec 2005.

ПРИМЕНЕНИЕ НЕКОНФОРМНОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА ПРИ БУРЕНИИ ВЕРТИКАЛЬНЫХ СКВАЖИН¹

Петров М.Н.¹, Марков С.И.^{1,2}

¹ *Институт нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН*

² *Новосибирский государственный технический университет*

В процессе вскрытия нефтенасыщенного коллектора скважиной, происходят изменения гидрофизических параметров пласта в прискважинной зоне. Это связано с процессом инжекции бурового раствора в пласт. Кроме того, в настоящее время часто применяются буровые растворы на глинистой основе, что приводит к формированию глинистой корки на стенке скважины. Подобные изменения свойств и фазового состава в прискважинной области сказываются на ее электрофизических характеристиках. Поэтому, чтобы эффективно интерпретировать данные электромагнитных исследований в скважине важно проводить численное моделирование этих процессов.

В работе представлена численная модель фильтрации бурового раствора на глинистой основе с учетом процессов массопереноса и формирования глинистой корки. Задача решается методом конечных элементов на трехмерной тетраэдральной сетке. При этом, поскольку изменение напора можно отнести к параболическим процессам, здесь применяется классический МКЭ. Однако для того чтобы выполнить законы сохранения, применяются методы, которые обладают локальной консервативностью, один из возможных подходов — это разрывный метод Галеркина, с помощью которого можно точно аппроксимировать закон сохранения. Таким образом задача решается на комбинации двух подходов. Что также позволяет использовать в дальнейшем разноразмерные сетки, поскольку основные процессы протекают в небольшой области прискважинной зоны и имеет смысл использовать более мелкую сетку, а незначительные изменения в глубинной части пласта позволяет применять более крупные элементы.

По результатам численных экспериментов было выполнено моделирование процесса инжекции бурового раствора с учетом образования глинистой корки на стенке скважины. Показано, как изменение свойств прискважинной зоны в качестве ее фазового состава влияет на ее электрические свойства.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российской академии наук в рамках государственного задания FWZZ-2022-0030

Литература

1. *Кашеваров А.А., Ельцов И.Н., Эпов М.И.* Гидродинамическая модель формирования зоны проникновения при бурении скважин // Прикладная механика и техническая физика. – 44 (6). – 2003. – С. 148-157.
2. *Grigoriev B.S., Eliseev A.A., Pogarskaya T.A., Toropov E.E.* Mathematical Modeling of Rock Crushing and Multiphase Flow of Drilling Fluid in Well Drilling // Journal of Mining Institute. – 2019. – Vol. 235. – P. 16- 23.
3. *Pletcher R.H., Tannehill J.C.* Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. Washington: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2013. – 705 p.
4. *Бочаров О.Б., Кушнир Д.Ю.* Аналитическое решение задачи о росте глинистой корки на стенке скважины с учетом смыва // Сиб. журн. индустр. матем. – 2012. – вып. 15(1). – С. 14–21.

НЕКОТОРЫЕ ПОДХОДЫ К ПОВЫШЕНИЮ МОТИВАЦИИ СТУДЕНТОВ В СОВРЕМЕННОМ ОБЩЕСТВЕ

Пичугина О.А.

*Институт математики, механики и компьютерных наук
им. И. И. Воровича ЮФУ, Ростов-на-Дону*

Введение

Современная образовательная система столкнулась с парадоксом: при беспрецедентном доступе к информации и знаниям наблюдается устойчивая тенденция к снижению внутренней учебной мотивации у студентов. Традиционные методы стимулирования, основанные на внешних факторах, оказываются малоэффективными для поколения современных людей, сформировавшихся в условиях цифровизации и клипового мышления. Актуальность данной проблемы обусловлена необходимостью подготовки высококвалифицированных кадров, способных к непрерывному обучению и инновационной деятельности. Цель статьи – проанализировать современные вызовы и предложить некоторые подходы к повышению мотивации студентов.

I Теоретические исследования и анализ проблемы

Ключевым условием достижения учебных результатов выступает мотивационная сфера студента. В современном понимании, мотивация представляет собой сложную структуру, интегрирующую биологические и социальные потребности личности, которые и задают ее общую направленность. С точки зрения психолого-педагогической науки, принято различать два типа мотивации: внешнюю и внутреннюю. Внешняя мотивация определяется факторами, находящимися за пределами индивида (оценки, требования родителей, академические нормативы), что может порождать внутренние конфликты и ощущение вынужденности деятельности. В противоположность этому, внутренняя мотивация, соответствующая высшей потребности в самоактуализации, инициирует личностный рост и остается устойчивой даже при изменении внешних обстоятельств, если деятельность согласуется с этой фундаментальной потребностью.

Согласно другой классификации учебные мотивы бывают познавательные и социальные. Познавательные мотивы связаны непосредственно с содержанием и процессом учебной деятельности. Студенты с доминированием

данной группы мотивов демонстрируют выраженный интерес к освоению новой информации, склонность к самостоятельной познавательной активности и целенаправленному совершенствованию методов приобретения знаний. Социальные мотивы обусловлены потребностью в межличностном взаимодействии. Данная категория включает: желание хорошо подготовиться к выбранной профессии; стремление к приобретению новых знаний, чтобы быть полезным окружающим. Особую подгруппу составляют позиционные мотивы, связанные с потребностью в социальном признании, лидерстве, утверждении статуса и получении авторитета в группе.

В структуре учебной мотивации, наряду с убеждениями и идеалами, существенную роль играет интерес. Одной из ключевых задач высшего образования является целенаправленное формирование у студентов профессионально-ориентированного интереса и внутренних личностных мотивов [1]. Данная необходимость обусловлена тем, что такие внешние стимулы, как получение диплома или формальное прохождение контроля, обладают неустойчивым характером, а мотивация достижения, будучи кратковременной, демонстрирует сравнительно низкую эффективность в противовес устойчивой познавательной мотивации.

II Некоторые подходы к повышению мотивации

Актуальной педагогической проблемой является поиск эффективных способов организации учебного процесса, направленных на формирование у студентов активной субъектной позиции в образовательной деятельности.

Современная педагогика исходит из того, что мотивационными процессами в обучении не только можно, но и необходимо целенаправленно управлять. Это подразумевает создание педагогических условий для развития внутренней мотивации и разработку системы стимулов. При этом формирование учебной мотивации следует понимать не как трансляцию готовых мотивов, а как проектирование образовательных ситуаций, благоприятствующих их естественному возникновению и развитию. Важно учитывать, что студент поступает в профессиональное учебное заведение не только для усвоения знаний, но, в значительной степени, для становления в качестве компетентного специалиста. Следовательно, ключевой задачей преподавателя является демонстрация практической значимости преподаваемой дисциплины и ее непосредственной связи с будущей профессиональной деятельностью обучающихся.

Эффективная мотивационная стратегия требует от педагога принятия студента как личности с индивидуальными особенностями, избегая попыток его кардинальной «переделки». Методическая подготовка к занятию должна

в значительной степени (по некоторым оценкам, до 50% усилий) фокусироваться на проектировании мотивационного компонента.

При планировании использования различных мотивирующих техник и приемов необходимо учитывать, что они не являются универсальными в силу изначального многообразия и индивидуального характера учебных мотивов студентов. Таким образом, наиболее продуктивным представляется реализация индивидуального подхода, основанного на диагностике и учете доминирующих мотивационных структур каждого обучающегося.

Каждый преподаватель ставит перед собой задачу: каким образом организовать учебный процесс, чтобы сформировать у студентов активное отношение к процессу обучения? Приведем некоторые способы.

Фундаментом для продуктивного педагогического взаимодействия выступают доброжелательный тон преподавателя и позитивный микроклимат в студенческой группе. Использование интонации позволяет управлять вниманием аудитории, что повышает вовлеченность.

Обязательным условием является признание за каждым обучающимся статуса самоценной личности и выстраивание взаимодействия на основе принципов сотрудничества.

Энтузиазм педагога, его глубокая заинтересованность в преподаваемой дисциплине также выступают одним из наиболее действенных катализаторов учебной мотивации.

Применение инновационных дидактических подходов (проектного, проблемного, исследовательского, обучения в сотрудничестве) является значимым ресурсом для активизации учебной мотивации. Многообразие и гибкость методов организации учебной деятельности создает условия для повышения вовлеченности студентов и их познавательного интереса.

Для обучающегося важно, чтобы преподаватель был доступен для вопросов и объяснений, готов оказать консультативную поддержку на всех этапах учебной деятельности, это создает атмосферу психологической безопасности.

Напрямую повышает познавательный интерес и осмысленность обучения четкое установление междисциплинарных связей и акцент на применении теоретических знаний в будущей профессиональной деятельности и реальных жизненных контекстах («связь теории с практикой»).

В соответствии с теорией самодетерминации [2] базовой психологической потребностью является автономия. Предоставление студентам свободы в выборе методов оценивания, форм самостоятельной работы или тематики исследований удовлетворяет эту потребность и является мощным фактором роста внутренней мотивации. Ощущение сопричастности и учет индивидуальной позиции студента усиливают его учебную активность.

Публичное признание академических и личностных достижений студентов, с конкретным описанием выполненной работы, способствует формиро-

ванию атрибуции успеха к внутренним факторам, укрепляет уверенность в себе и стимулирует к дальнейшей деятельности.

Проявление интереса к профессиональному и жизненному опыту студентов, а также к их мнению по дискуссионным вопросам, трансформирует образовательный процесс в совместную деятельность. Использование интерактивных методов (дискуссии, разбор кейсов) способствует не только усвоению знаний, но и установлению продуктивных коммуникаций.

В процессе обучения необходима динамичная смена видов учебной деятельности для поддержания высокого уровня внимания студентов. При первых признаках снижения когнитивной активности рационально переключиться на альтернативные формы работы, такие как: решение задач для самостоятельной работы, стимулирование дискуссии и аргументации личной позиции, или использование наглядных материалов. Этот принцип способствует профилактике утомления и поддержанию продуктивного темпа занятия.

III Заключение

Несмотря на большое количество исследований в области учебной мотивации, вопрос разработки универсальной и общепризнанной классификации мотивов студентов остаётся дискуссионным. В связи с этим, актуальной задачей для современного образования является целенаправленное проектирование образовательных программ и внедрение инновационных педагогических технологий, направленных на стабилизацию и развитие мотивационной сферы обучающихся. Подобные меры призваны поддерживать высокий уровень учебной мотивации, а в ситуациях его снижения — обеспечивать его повышение.

Литература

1. *Самойлов Л.П.* Теоретические основы активизации учебного процесса в высшей школе: проблема мотивации студентов // 2004. № 8. С. 57-58.
2. *Deci E.L., Ryan R.M.* Self-determination theory: A macrotheory of human motivation, development and health // Canadian Psychology. 2008. Vol. 49. P. 182—185.

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТЬЮРИНГА В СИСТЕМЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ¹

Ревина С.В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Введение

Многие известные модели физических, биологических, химических и других процессов описываются краевыми задачами для систем уравнений в частных производных вида

$$u_t = \Delta u + f(u, v), \quad v_t = d\Delta v + g(u, v), \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2)$$

Здесь d — коэффициент диффузии, x меняется в ограниченной области $\Omega \subset R^m$ при $m = 1, 2, 3$, n — внешняя нормаль к границе области, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}$ — оператор Лапласа. Уравнения (1) называется уравнениями реакции-диффузии, $f(u, v)$, $g(u, v)$ — гладкие функции — слагаемыми реакции.

Пусть система имеет пространственно-однородное стационарное решение (u_*, v_*) . Будем интересоваться условиями, при которых имеет место диффузионная неустойчивость (неустойчивость по Тьюрингу) этого равновесия. Неустойчивость Тьюринга пространственно-однородного решения (u_*, v_*) системы с диффузией характеризуется свойством устойчивости в отсутствие диффузии и неустойчивости при наличии диффузии [1].

Рассмотрим бездиффузионное приближение системы (1) — (2):

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{J}\mathbf{y}, \quad \mathbf{y} \in R^2. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{J}$ — матрица Якоби линеаризованной в точке (u_*, v_*) нелинейной системы уравнений (1) — (2):

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix} |_{(u_*, v_*)}. \quad (4)$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Владикавказского научного центра РАН

Выпишем линеаризованную систему с диффузией (1) — (2):

$$u_t = \Delta u + f_u \cdot u + f_v \cdot v, \quad v_t = d\Delta v + g_u \cdot u + g_v \cdot v, \quad (5)$$

где компоненты матрицы Якоби определены в (4).

Определение 1. *Положение равновесия (u_*, v_*) системы (1) — (2) называется неустойчивым по Тьюрингу, если выполняются два условия: 1) собственные значения линеаризованной системы в отсутствие диффузии (3) лежат строго в левой полуплоскости; 2) существует собственное значение линеаризованной системы с диффузией (5), которое лежит в правой полуплоскости.*

В настоящей работе рассматривается система уравнений типа «реакция-диффузия», описывающая модель пространственно-распределенных осцилляторов, когда пространственная переменная меняется в произвольной ограниченной области с достаточно гладкой границей при краевых условиях Неймана. В бездиффузионном приближении приходим к динамической системе, соответствующей колебаниям осциллятора в окрестности нижнего положения равновесия. Рассматриваются различные способы перехода к диффузионной модели путем учета диффузионных слагаемых. Получены условия, при которых устойчивое в бездиффузионном приближении нижнее положение равновесия маятника становится неустойчивым при наличии диффузионных слагаемых. Границы области неустойчивости при этом находятся явно и выражаются через собственные значения оператора Лапласа в рассматриваемой области.

I Линейный осциллятор с диффузией. Стабилизация положения равновесия

Пусть $h > 0$, $\omega^2 > 0$. Рассмотрим уравнение линейного осциллятора с трением

$$Y'' + 2hY' + \omega^2 Y = 0. \quad (6)$$

Вводя обозначения

$$U(t) = Y(t), \quad V(t) = Y'(t), \quad (7)$$

перепишем уравнение (6) в виде системы двух уравнений первого порядка

$$U'(t) = V(t), \quad (8)$$

$$V'(t) = -\omega^2 U - 2hV. \quad (9)$$

Если мы введем векторные обозначения для системы (8) — (9)

$$\mathbf{w}(t) = (U(t), V(t)) \quad (10)$$

и матрицу

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2h \end{pmatrix}, \quad (11)$$

тогда система (8) — (9) принимает вид

$$\mathbf{w}'(t) = J\mathbf{w}. \quad (12)$$

В силу положительности $h > 0$, $\omega^2 > 0$ собственные значения матрицы J лежат строго в левой полуплоскости. Дополнив (12) начальным условием $\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0$, приходим к решению задачи Коши

$$\mathbf{w}(t) = e^{tJ}\mathbf{w}_0. \quad (13)$$

Рассмотрим три способа учета диффузии в модели линейного осциллятора. Первый способ состоит в формальном прибавлении оператора Лапласа в первом и втором уравнениях системы (8) — (9)

$$u_t = \Delta u + v, \quad v_t = \Delta v - \omega^2 u - 2hv. \quad (14)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad (15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (16)$$

Пусть H — гильбертово пространство вектор-функций $\mathbf{w} = (u, v)$ с компонентами $u, v \in L_2(H)$. Пусть оператор $\Delta : H \rightarrow H$ определен на множестве вектор-функций $\mathbf{w} = (u, v)$ с компонентами из пространства Соболева $W_2^2(\Omega)$.

Оператор J и векторный оператор Лапласа Δ коммутируют, поэтому решение задачи Коши (14) — (16) в H имеет вид

$$\mathbf{w}(t) = e^{t\Delta}e^{tJ}\mathbf{w}_0 = e^{tJ}e^{t\Delta}\mathbf{w}_0 \quad (17)$$

неустойчивость Тьюринга невозможна.

Во втором способе построения системы с диффузией рассмотрим случай различных коэффициентов диффузии. Пусть $d \neq 1$, тогда вместо (14) — (16) приходим к системе

$$u_t = \Delta u + v, \quad v_t = d\Delta v - \omega^2 u - 2hv. \quad (18)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad (19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (20)$$

Пусть оператор $A_0 : H \rightarrow H$, действующий по правилу $A_0 = D\Delta$, определен на множестве вектор-функций $\mathbf{w} = (u, v)$ с компонентами из пространства Соболева $W_2^2(\Omega)$, удовлетворяющими краевым условиям (20), где D — это матрица

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Тогда система с диффузией (18) — (20) сводится к уравнению в гильбертовом пространстве H

$$\mathbf{w}_t = A\mathbf{w}; \quad A = A_0 + \mathbf{J}. \quad (22)$$

В этом случае операторы $\mathbf{J}$ и $D\Delta$ не коммутируют, но прибавление диффузии по-прежнему приводит к стабилизации положения равновесия.

II Возникновение неустойчивости Тьюринга

Третий способ учета диффузионных слагаемых состоит в следующем. Введем параметр $\alpha > 0$ и в бездиффузионном приближении рассмотрим динамическую систему

$$U'(t) = \alpha U + V(t), \quad (23)$$

$$V'(t) = -\omega^2 U - 2hV. \quad (24)$$

Для компоненты $Y(t) = U(t)$, как и ранее, получаем уравнение осциллятора с трением

$$Y'' + (2h - \alpha)Y' + (\omega^2 - 2h\alpha)Y = 0. \quad (25)$$

Условия принадлежности спектра устойчивости системы (23) — (24) открытой левой полуплоскости имеют вид

$$Tr(\mathbf{J}) = \alpha - 2h < 0; \quad Det(\mathbf{J}) = \omega^2 - 2h\alpha > 0. \quad (26)$$

После учета диффузионных слагаемых, как и во втором способе, система с диффузией сводится к уравнению (21) в гильбертовом пространстве H , но конечномерный оператор, соответствующий слагаемым реакции, теперь имеет вид

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\omega^2 & -2h \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Покажем, что в этом случае возможна неустойчивость Тьюринга.

Рассмотрим линейную спектральную задачу для оператора $A = \mathbf{J} + D\Delta$ в пространстве H :

$$A\varphi = \sigma\varphi, \quad \varphi \neq 0. \quad (28)$$

Определим необходимые условия, при которых собственные значения системы с диффузией лежат в замкнутой правой полуплоскости.

Пусть ψ_k — это собственные функции, отвечающие собственным значениям μ_k оператора $-\Delta$ с краевыми условиями Неймана, $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\Delta\psi_k + \mu_k\psi_k = 0, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial\psi_k}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (29)$$

Будем предполагать, что μ_k являются простыми. В одномерном случае это условие выполняется автоматически; в случае прямоугольного параллелепипеда достаточно предположить несоизмеримость квадратов его сторон.

Решение φ разыскивается в виде ряда по собственным функциям оператора Лапласа:

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{C}_k \psi_k, \quad \mathbf{C}_k = (C_k^1, C_k^2). \quad (30)$$

Для любого фиксированного значения k имеем линейную систему вида

$$\mathbf{J}_k \mathbf{C}_k = \lambda_k \mathbf{C}_k, \quad \mathbf{C}_k \neq 0, \quad (31)$$

где $\mathbf{J}_k$ — матрица, соответствующая k -му элементу диагонали матрицы оператора A ; σ_k и $\mathbf{C}_k$ — отвечающие ей собственное значение и собственный вектор:

$$\mathbf{J}_k = \begin{pmatrix} \alpha - \mu_k & 1 \\ -\omega^2 & -2h - d\mu_k \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Интересуясь неустойчивостью, найдем след и определитель матрицы $\mathbf{J}_k$:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathbf{J}_k) &= \text{Tr}(\mathbf{J}) - (1 + d)\mu_k \leq \text{Tr}(\mathbf{J}) < 0, \\ \text{Det}(\mathbf{J}_k) &= d\mu_k^2 - (d \cdot \alpha - 2h)\mu_k + \text{Det}(\mathbf{J}). \end{aligned}$$

Так как $\text{Det}(\mathbf{J}) > 0$, то потеря устойчивости может произойти лишь при $k > 0$. В этом случае $\mu_k > 0$. Следовательно, выполняется неравенство $\text{Tr}(\mathbf{J}_k) < \text{Tr}(\mathbf{J}) < 0$, и положение равновесия может потерять устойчивость, только если $\text{Det}(\mathbf{J}_k) = 0$.

Введем обозначение

$$P(\mu) \equiv d\mu^2 - (d \cdot \alpha - 2h)\mu + \text{Det}(\mathbf{J}), \quad (33)$$

тогда $P(\mu_k) = \text{Det}(\mathbf{J}_k)$.

Если существует волновое число k_* такое, что $P(\mu_{k_*}) = 0$, то на параметры системы возникают ограничения:

$$\alpha > \frac{2h}{d}; \quad d > 1. \quad (34)$$

Необходимые условия неустойчивости Тьюринга имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathbf{J}) &= \alpha - 2h < 0, \\ \text{Det}(\mathbf{J}) &= \omega^2 - \alpha > 0, \\ d \cdot \alpha + 2h &\geq 2\sqrt{d}\omega. \end{aligned}$$

Полученные условия задают область на плоскости параметров (ω^2, α) (при фиксированном h), ограниченную кривой нулевого следа $\text{Tr} \mathbf{J} = 0$, дискриминантной кривой $\text{Discr}(P) = 0$ и геометрическим местом точек $\text{Det} \mathbf{J} = 0$.

Для описания области неустойчивости Тьюринга рассмотрим кривые на плоскости (ω^2, α) : дискриминантную кривую

$$\alpha_0(\omega^2) = -\frac{2h}{d} + \frac{2}{\sqrt{d}}\sqrt{\omega^2} \quad (35)$$

и кривые достаточных условий

$$\alpha_k(\omega^2) = \mu_k + \frac{\omega^2}{d\mu_k + 2h}. \quad (36)$$

Теорема 1. (О дискриминантной кривой).

Дискриминантная кривая $(\alpha)_0(\omega^2)$

- 1) лежит не выше семейства $\alpha_k(\omega^2)$ на плоскости (ω^2, α) ;
- 2) имеет с каждой кривой $\alpha_k(\omega^2)$ единственную общую точку с координатами

$$\omega^2 = \frac{(d\mu_k + 2h)^2}{d}, \quad \alpha = 2\mu_k + \frac{2h}{d} \quad (37)$$

- 3) является огибающей семейства кривых $\alpha_k(\omega^2)$, $k \in N$.

Теорема 2. (О кривых достаточных условий).

Кривые $(\alpha)_k(\omega^2)$ и $(\alpha)_{k+1}(\omega^2)$ в полуплоскости $\text{Det} \mathbf{J} > 0$

- 1) имеют единственную общую точку с координатами

$$(\omega^2)_{k,k+1} = \frac{(d\mu_k + 2h)(d\mu_{k+1} + 2h)}{d}, \quad \Gamma_k = \mu_k + \mu_{k+1} + \frac{2h}{d} \quad (38)$$

- 2) Если $\omega^2 \in [(\omega^2)_{k-1,k}; (\omega^2)_{k,k+1}]$, $k \in N$,

$$(\alpha)_k(\omega^2) = \min_m (\alpha)_m(\omega^2). \quad (39)$$

Заключение

Отправным пунктом данного исследования является конечномерная модель осциллятора с трением. Проанализированы различные способы перехода к бесконечномерной модели пространственно-распределенных осцилляторов. Предложена модель осцилляторов с диффузией, в которой нижнее устойчивое положение равновесия маятника в конечномерной модели теряет устойчивость.

Дано явное описание области неустойчивости Тьюринга, отдельно рассматриваются случаи необходимых условий неустойчивости и достаточных условий. Дано описание границы области неустойчивости в терминах собственных значений оператора Лапласа в рассматриваемых областях.

Литература

1. *Turing A. M.* The chemical basis of morphogenesis // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences. 1952. Vol. 237. № 641. P. 37–72.
2. Казарников А. В., Ревина С. В. Бифуркации в системе Рэлея с диффузией // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27, № 4. С. 499–514. <https://doi.org/10.20537/vm170402>.
3. Казарников А. В., Ревина С. В. Монотонная неустойчивость в системе ФитцХью-Нагумо с диффузией // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2018. № 4 (200). С. 18–24. <https://doi.org/10.23683/0321-3005-2018-4-18-24>.
4. Revina S.V., Lysenko S.A. Sufficient Turing instability conditions for the Schnakenberg system // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. № 3. С. 424–442. DOI: 10.35634/vm210306
5. *Ревина С. В., Рябов А. С.* Неустойчивость Тьюринга в однопараметрической системе Гирера–Мейнхардта // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 4. С. 501–522. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-003053>. EDN: WZPQWD
6. Ревина С. В. Область диффузионной неустойчивости для систем параболических уравнений // *Владикавказ. мат. журн.* 2022. Т. 24, вып. 4. С. 136–145. <https://doi.org/10.46698/d6373-9335-7338-n>

7. Келеметова К.А., Ревина С.В. Линейный анализ неустойчивости Тьюринга в системах химической кинетики // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2024. № 4-1. С. 49–59. [https://doi.org/ 10.18522/1026-2237-2024-4-1-49-59](https://doi.org/10.18522/1026-2237-2024-4-1-49-59)
8. *Revina S. V.* Diffusion instability domains for systems of parabolic equations // Siberian Mathematical Journal, 2024, Vol. 65, №2, pp. 487–494.

ПОСТОЯННЫЕ ФУНКЦИИ НА КЛАССАХ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ РАВНОУГОЛЬНЫХ ФРЕЙМОВ¹

Севостьянова В.В.

Самарский национальный исследовательский университет
им. акад. С.П. Королева, Самара, berlua@mail.ru

Пусть $\mathbb{H}^d$ — евклидово пространство размерности d .

Определение 1. Конечный набор векторов $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ в пространстве $\mathbb{H}^d$ будем называть *фреймом*, если существуют положительные константы $a \leq b$, такие, что для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^d$ выполняется

$$a\|\mathbf{x}\|^2 \leq \sum_{j=1}^n |\langle \mathbf{x}, \varphi_j \rangle|^2 \leq b\|\mathbf{x}\|^2.$$

Согласно эквивалентному определению, фрейм в $\mathbb{H}^d$ — произвольный набор векторов, такой, что $\text{span}\{\varphi_j\}_{j=1}^n = \mathbb{H}^d$. Если длины всех векторов фрейма равны, то такой фрейм называется *равномерным*. Если для равномерного фрейма верно $|\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle| = c$ для любых $i \neq j$, то такой фрейм будем называть *равноугольным*. Подробнее о конечных фреймах см. в [1].

Традиционно на множестве фреймов в $\mathbb{H}^d$ вводятся различные отношения эквивалентности. Рассмотрим максимально широкое отношение эквивалентности.

Определение 2. Фреймы $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ и $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ называются *проективно-перестановочно унитарно эквивалентными*, если существуют унитарное преобразование $\mathbf{U}$, перестановка $\sigma \in S_n$ и $\alpha_i = \pm 1$, для которых $\psi_i = \alpha_i \mathbf{U} \varphi_{\sigma(i)}$, $i = 1, \dots, n$.

Рассмотрим три серии полиномов, постоянных на проективно-перестановочно унитарных классах эквивалентности. Первая серия:

$$\begin{aligned} s_1 &= \|\varphi_1\|^2 + \|\varphi_2\|^2 + \dots + \|\varphi_n\|^2, \\ s_2 &= \|\varphi_1\|^2 \|\varphi_2\|^2 + \|\varphi_1\|^2 \|\varphi_3\|^2 + \dots + \|\varphi_{n-1}\|^2 \|\varphi_n\|^2, \\ &\dots, \\ s_n &= \|\varphi_1\|^2 \|\varphi_2\|^2 \dots \|\varphi_n\|^2. \end{aligned}$$

Обозначим через N число всех пар (i, j) , где $1 \leq i < j \leq n$. В качестве второй серии постоянных функций возьмем

$$t_k = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\|\varphi_i\|^2 \|\varphi_j\|^2)^{k-1} |\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle|^2, \quad k = 1, \dots, N.$$

¹Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2025-1791)

Пусть M — число троек (i, j, k) , где $1 \leq i < j < k \leq n$. Обозначим $\Delta(i_1, i_2, i_3) = \langle \varphi_{i_1}, \varphi_{i_2} \rangle \langle \varphi_{i_2}, \varphi_{i_3} \rangle \langle \varphi_{i_3}, \varphi_{i_1} \rangle$. Рассмотрим 3-ю серию

$$w_m = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} (\|\varphi_i\|^2 \|\varphi_j\|^2 \|\varphi_k\|^2)^{m-1} \Delta(\varphi_i, \varphi_j, \varphi_k), \quad m = 1, \dots, M.$$

Определим отображение π , которое ставит в соответствие фрейму $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ набор

$$\pi(\Phi) = (s_1(\Phi), \dots, s_n(\Phi), t_1(\Phi), \dots, t_N(\Phi), w_1(\Phi), \dots, w_M(\Phi)).$$

Теорема 1. *Существует непустое подмножество V , всюду плотное в $\mathbb{H}^d$, для которого прообраз любой точки из $\pi(V)$ — проективно-перестановочно унитарный класс эквивалентности.*

Другими словами, полиномы из трех серий разделяют проективно-перестановочно унитарные классы эквивалентности в общем положении. К сожалению, функции s_i, t_k, w_m не разделяют ни равномерные, ни равноугольные фреймы. В частности, $s_i(\Phi) = s_i(\Psi)$ для равномерных Φ и Ψ , а $t_j(\Phi) = t_j(\Psi)$ для равноугольных Φ и Ψ .

Обозначим через S_n группу перестановок длины n .

Теорема 2. *Многочлены вида*

$$J_k = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \Delta(\sigma(1), \sigma(i), \sigma(j))^{k_{i,j}},$$

определяемые всевозможными наборами $k = (k_{2,3}, k_{2,4}, \dots, k_{n-1,n})$, где $k_{i,j} = 0$ или 1, разделяют проективно-перестановочно унитарные классы эквивалентности равноугольных фреймов.

Литература

1. *Waldron S.F.D.* An Introduction to Finite Tight Frames. Boston: Birkhauser, 2018. 587 p.
2. *Севостьянова В.В.* Инварианты на перестановочно унитарных классах эквивалентности фреймов Парсевала // Математические заметки. 2024. Т. 116. № 4. С. 582–596.

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ В ПОРИСТОМ ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ ПРИ НЕОДНОРОДНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

Селищев А.А., Цибулин В.Г.

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону,
selishev@sfedu.ru*

Рассматривается пористая прямоугольная область с неоднородными свойствами проницаемости. При определенных значениях коэффициентов проницаемости и теплопроводности, система относится к классу косимметричных, что приводит к появлению однопараметрического семейства равновесий при потере устойчивости механического равновесия. Для моделирования плоской задачи гравитационной конвекции жидкости, насыщающей пористую среду, развивается компактная конечно-разностная схема [1].

Компактные разностные схемы позволяют увеличить точность аппроксимации, не добавляя новых узлов в разностные шаблоны. Предложена численная схема, основанная на конечно-разностной аппроксимации четвёртого порядка точности по пространству и методе Рунге-Кутты для интегрирования по времени. Построенная на девятиточечном шаблоне схема относится к классу миметических, то есть сохраняющих ключевые свойства исходной системы дифференциальных уравнений. В частности, доказано, что развитая дискретизация сохраняет симметрии и косимметрию исходной задачи.

Исследуются конфигурации задачи, нарушающие свойство косимметрии. Построены селективные функции для различных вариантов переменной проницаемости. Проанализированы равновесия, которые возникают при разрушении однопараметрического семейства. Дана оценка эффективности развитой разностной схеме.

Литература

1. *Селищев А.А., Цибулин В.Г.* Компактная разностная схема для анизотропной задачи конвекции Дарси // Компьютерные исследования и моделирование. 2025. Т. 17, № 2, С. 199–211

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ТЕПЛОФИЗИКИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ В АРКТИКЕ¹

Филимонов М.Ю.^{*,**}, Ваганова Н.А.^{*,**}

** Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург*

*** ИММ УрО РАН им. Н.Н. Красовского, г. Екатеринбург*

Введение

В России запасы подземных льдов в зоне вечной мерзлоты составляют около $19\,000\text{ км}^3$, что даёт право называть их подземными оледенениями [1]. Эти площади охватывают почти 10 млн. км^2 . Эти территории чрезвычайно важны для российской экономики, так как здесь добывается около 93% российского природного газа и 75% нефти. Таяние вечной мерзлоты, вызванное изменением климата и различными техногенными источниками тепла, может привести к развитию термокарста и крупным авариям, особенно опасным для инженерных объектов и инфраструктуры, расположенных в регионах распространения вечной мерзлоты [2, 3, 4]. Моделирование тепловых полей в мерзлых грунтах является важной задачей, поскольку от сохранения отрицательных температур в грунте зависит устойчивость инженерных сооружений. Существуют различные технические системы, влияющие как на скорость таяния вечной мерзлоты [5, 6, 7, 8], так и на термостабилизацию грунта [9, 10].

Комплексное моделирование взаимодействия этих систем, влияние их на температурный режим окружающего грунта является актуальной задачей [11, 13] и будет рассмотрено в настоящей работе для конкретной задачи.

I Постановка задачи. Основные уравнения

Температурный режим грунта в криолитозоне описывается нестационарным уравнением теплопроводности с учетом фазового перехода. Обоснованность использования такого подхода для задач типа Стефана приведена в монографии [14].

Установлено, что не только климатические изменения, но и хозяйственная деятельность человека приводит к деградации многолетнемерзлых пород (ММП). В частности, при обустройстве северных кустовых площадок требуется, чтобы две скважины не были пробурены на расстоянии друг от

¹Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ 24-21-00160

друга меньшем, чем два радиуса растепления (положение нулевой изотермы) от одиночной скважины за 25–30 лет её эксплуатации. То есть необходимо соблюдать такую дистанцию между скважинами при строительстве, чтобы талые зоны ММП вокруг скважин при добыче нефти не сливались в единый талик, ослабляя несущую способность грунта. Требуется определить минимальное допустимое расстояние между скважинами. Выбор этого расстояния существенно влияет на затраты для обустройства нефтедобывающей площадки, тем самым и на себестоимость добываемой нефти.

Тепловые поля в грунте также важны при расчете несущей способности грунта под капитальными сооружениями в криолитозоне. Это могут быть как дороги, трубопроводы, вспомогательные конструкции, так и свайные фундаменты жилых домов и производственных помещений. Нестационарное уравнение теплопроводности с учетом фазового перехода описывает процессы распространения тепла в ММП. Но при расчете тепловых процессов для разных объектов в криолитозне необходимо учитывать специфику задач, в частности, разные начальные и краевые условия.

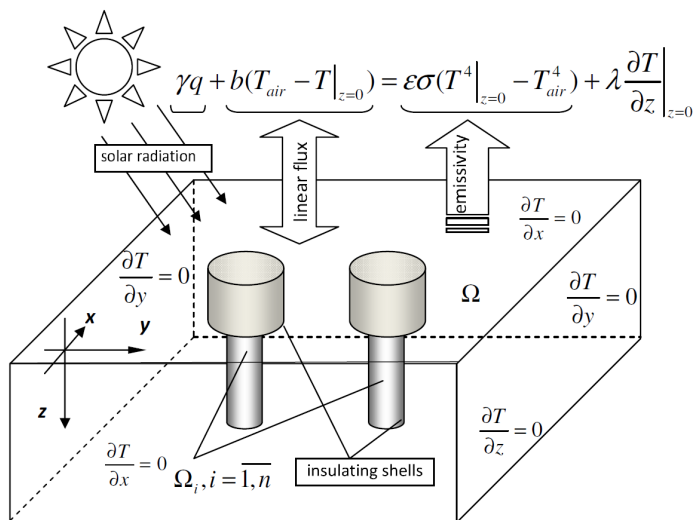


Рис. 1: Расчетная область и основные тепловые потоки для двух скважин

Пусть в начальный момент времени $t_0 = 0$ грунт занимает заданный параллелепипед Ω (рис. 1) и имеет температуру $T_0(x, y, z)$. Оси x и y расположены параллельно поверхности кустовой площадки, а ось z направлена вниз. Будем считать, что размер расчетной области Ω определяется положительными числами L_x, L_y, L_z : $-L_x \leq x \leq L_x, -L_y \leq y \leq L_y,$

$-L_z \leq z \leq 0$. Для моделирования распространения тепла была предложена следующая математическая модель.

Пусть $T = T(t, x, y, z)$ — температура грунта в точке (x, y, z) в момент времени t . Область Ω может включать в себя различные инженерные сооружения (например, искусственные слои отсыпки на поверхности грунта, сваи, скважины и т.д.). Предположим, что в области Ω могут одновременно находиться n разнородных объектов, являющихся источниками тепла (фундаменты, добывающие и нагнетательные теплоизолированные скважины, трубопроводы и т.п.), а также источники холода, например, сезоннодействующие охлаждающие устройства. Обозначим поверхности этих объектов через $\Omega_i = \Omega_i(x, y, z)$, $i = 1, \dots, n$. Основные тепловые потоки для двух скважин ($n = 2$) изображены на рис. 1.

В качестве математической модели для учета излучения от каждого i -го объекта используется уравнение контактной (диффузионной) теплопроводности с неоднородными коэффициентами, включающее локализованную теплоемкость фазового перехода — подход, позволяющий решать задачу типа Стефана, без явного выделения границы фазового перехода [14]. При этом теплота фазового превращения вводится с применением δ -функции Дирака как сосредоточенная теплоемкость фазового перехода в коэффициент теплоемкости. Получаемая таким образом разрывная функция затем “распределяется” по температуре и не зависит от числа измерений и фаз. В итоге для получения тепловых полей в грунте требуется решить в области Ω квазилинейное уравнение теплопроводности

$$\rho(c_\nu(T) + k\delta(T - T^*)) \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda(T) \operatorname{grad} T), \quad (1)$$

где ρ — плотность $[\text{кг}/\text{м}^3]$, T^* — температура фазового перехода $[K]$,

$$c_\nu(T) = \begin{cases} c_1(x, y, z), & T < T^*, \\ c_2(x, y, z), & T > T^*, \end{cases} \text{ удельная теплоемкость } [\text{Дж}/\text{кг K}],$$

$$\lambda(T) = \begin{cases} \lambda_1(x, y, z), & T < T^*, \\ \lambda_2(x, y, z), & T > T^*, \end{cases} \text{ коэффициент теплопроводности } [\text{Вт}/\text{м K}],$$

$k = k(x, y, z)$ — теплота фазового перехода. Для уравнения (1) в расчетной области Ω задаются начальные

$$T(0, x, y, z) = T_0(x, y, z), \quad (2)$$

и граничные условия

$$\alpha q + b(T_{\text{air}} - T_{z=0}) = \varepsilon \sigma (T_{z=0}^4 - T_{\text{air}}^4) + \lambda \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (3)$$

$$T \Big|_{\Omega_i} = T_i(t), i = 1, \dots, n, \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=\pm L_x} = \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=\pm L_y} = \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=\pm L_z} = 0, \quad (5)$$

где T_{air} — температура воздуха, $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} [Wt/(m^2 K^4)]$ — постоянная Стефана-Больцмана, $b = b(t, x, y)$ — коэффициент теплообмена, $\varepsilon = \varepsilon(t, x, y)$ — коэффициент “серости”, $q(t)$ — суммарная солнечная радиация, $\alpha = \alpha(t, x, y)$ — доля энергии, ушедшая на нагрев грунта, которая в общем случае зависит от состояния атмосферы, угла падения солнечных лучей, т.е. широты местности и времени суток.

Нелинейное краевое условие (3) связано с учетом солнечного излучения при использовании моделирования температурного режима грунта в криолитозоне. Под зданием со свайным фундаментом и проветриваемым подпольем переходит в условие

$$b(T_{air} - T_{z=0}) = \lambda \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (6)$$

В этом случае в качестве Ω_i рассматриваются термометрические скважины, используемые для мониторинга температурного режима грунта, а также для формирования начального условия (2) и для задания граничного условия (4) на поверхности сезонно действующих охлаждающих устройств [4, 11], применяемых для термостабилизации грунта.

Для моделирования тепловых полей в грунте на северных нефтегазовых месторождениях рассматривается граничное условие (3), поскольку учет интенсивности солнечного излучения может быть использован при привязке алгоритма к конкретному географическому месту. Внутренние границы Ω_i позволяют учитывать температурное влияние добывающих и нагнетательных скважин [8].

Особую роль при моделировании температурного режима грунта, например, вокруг опор железнодорожного моста в криолитозоне играют термометрические скважины Ω_i , температурные данные которых используются для моделирования краевого условия (2) с учетом предыстории температурного режима грунта на длительном промежутке времени и тренда потепления климата [12, 13]

II Численные расчеты

Приведем результаты численных расчетов для важного класса задач, связанных с распространением температурных полей от добывающих сква-

жин на северных нефтегазовых месторождениях. Заметим, что такие расчеты проводились для 15-ти российских северных нефтегазовых месторождений, в результате которых были даны прогнозы изменения границ ММП при обустройстве кустовых площадок, а также рассматривались различные варианты эксплуатации инженерных объектов. Для двух скважи основные тепловые потоки приведены на рис. 1.

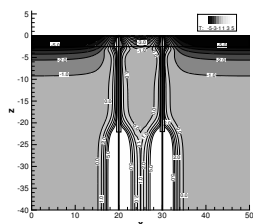
На этапе проектирования кустовых площадок были получены оптимальные параметры теплоизоляционных материалов, даны рекомендации по снижению теплового влияния технических систем на ММП, в том числе и за счет их оптимального размещения на кустовой площадке с целью минимизации площади кустовой площадки, затраты на обустройство которой растут с увеличением ее площади. Точность численных расчетов для моделирования температурных полей на кустовых площадках по разработанному программному комплексу для решения задач (1)–(5) была проверена в 2012 году для российского нефтяного месторождения "Русское", для которого полученные численные результаты отличались от экспериментальных менее 5% через 3 года после начала эксплуатации данного месторождения [4].

Рассмотрим кустовую площадку одного из северных нефтегазовых месторождений с грунтом, являющимся суглинком со следующими параметрами. Теплопроводность мёрзлого грунта — $1,82 \text{ Вт/(м К)}$, талого — $1,58 \text{ Вт/(м К)}$, объемная теплоемкость мёрзлого грунта — $2130 \text{ кДж/(м}^3 \text{ К)}$, талого — $3140 \text{ кДж/(м}^3 \text{ К)}$, объемная теплота фазового перехода — $1,384 \cdot 10^5 \text{ кДж/(м}^3 \text{ К)}$, температура ММП (температура грунта ниже границы влияния годовых климатических изменений) — $T_p = -0,7^\circ\text{C}$.

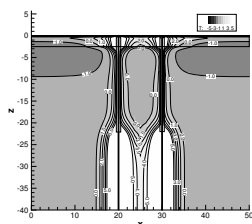
Отсыпка кустовой площадки толщиной 2,5 метра состоит из трех слоев: пеноплекс (толщиной 0,2 м с плотностью $35,0 \text{ кг/м}^3$, теплопроводностью $0,031 \text{ Вт/(м К)}$, удельной теплоемкостью $1,53 \text{ кДж/(кг К)}$), песок (толщиной 2,0 м с плотностью 1600 кг/м^3 , теплопроводностью $0,47 \text{ Вт/(м К)}$ и удельной теплоемкостью $0,84 \text{ кДж/(кг К)}$) и бетонная плита сверху (толщиной 0,3 м с плотностью 2500 кг/м^3 , теплопроводностью $1,69 \text{ Вт/(м К)}$ и удельной теплоемкости $0,84 \text{ кДж/(кг К)}$).

Рассмотрим на данной кустовой площадке две скважины на расстоянии 10 м друг от друга. Радиус скважин составляет 0,089 м. Температура в скважинах составляет 45°C . В скважинах имеется дополнительная теплоизоляция. Это цементная оболочка толщиной 0,176 м и верхняя часть скважины до 22 м имеет две дополнительные изоляционные оболочки: до радиуса 0,410 м вставлен слой пеноплекса, до радиуса 0,5 м — цемент. На рис. 2 представлена динамика изменения тепловых полей в грунте от этих двух скважин, эксплуатируемых в течение 10 лет.

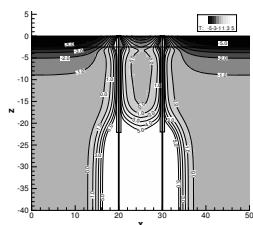
Приведенные расчеты показывают, что распространения тепла в грунте между двумя скважинами происходит с большей скоростью, чем для одиночной скважины. Действительно, на рис. 2 тепловые поля от скважин в направ-



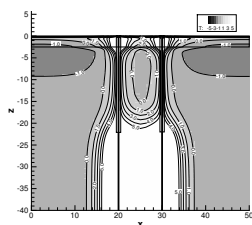
3 года, апрель



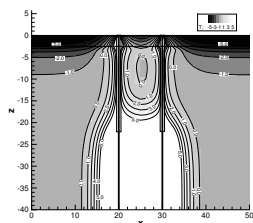
3 года, октябрь



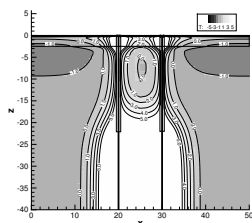
7 лет, апрель



7 лет, октябрь



10 лет, апрель



10 лет, октябрь

Рис. 2: Тепловые поля от двух одинаковых скважин.

лении границ расчетной области движутся с меньшей скоростью. При этом выбор размеров расчетной области играет важное значение. В нашем случае при расположении скважин на расстоянии 10 метров друг от друга, расстояние до границ расчетной области составило 20 метров. Если уменьшить расстояние, например, до 10 метров, то возникнет эффект “термоса” и полученные результаты не будут адекватно передавать динамику изменения температурного режима грунта на большом временном интервале.

Литература

1. *Romanovsky V.E., Drozdov D.S., Oberman N.G. et al.* Thermal state of permafrost in Russia // *Permafrost Periglac. Process.* 2010. Vol. 21. 136–155.
2. *Shiklomanov N.I. et al.* Climate change and stability of urban infrastructure in Russian permafrost regions: prognostic assessment based on GCM climate projections // *Geographical review.* 2017. Vol. 107. № 1. P. 125–142.
3. *Streletskiy D.A., Suter L.J., Shiklomanov N.I., Porfiriev B.N., Eliseev D.O.* Assessment of climate change impacts on buildings, structures and infrastructure in the Russian regions on permafrost // *Environmental Research Letters.* 2019. Vol. 14. № 2. P. 025003.
4. *Filimonov M., Vaganova N.* Permafrost thawing from different technical systems in Arctic regions // *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science.* 2017. Vol. 72. P. 012006. DOI: 10.1088/1755-1315/72/1/012006.
5. *Vaganova N., Filimonov M.Y.* Different Shapes of Constructions and their Effects on Permafrost // *AIP Conference Proceedings.* 2016. Vol. 1789. P. 020019.
6. *Zemenkova M.Y., Shabarov A., Shastunova U., Kislitsyn A., Shuvaev A.* Physical and mathematical modeling of process of frozen ground thawing under hot tank // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering.* 2018. Vol. 357. P. 012007.
7. *Filimonov M.Yu., Vaganova N.A.* Flare Systems Exploitation and Impact on Permafrost. // *Journal of Physics: Conference Series.* 2017. Vol. 899. P. 092004.
8. *Filimonov M. Yu., Vaganova N.A.* Thawing of Permafrost During the Operation of Wells of North-Mukerkamyl Oil and Gas Field // *Journal of Siberian Federal Universit. Mathematics and Physics.* 2021. Vol. 14. № 6. P. 795–804.
9. *Vaganova N.A., Filimonov M. Yu.* Simulation of Cooling Devices and Effect for Thermal Stabilization of Soil in a Cryolithozone with Anthropogenic Impact // *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics).* 2019. Vol. 11386. P. 580–587.
10. *Filimonov M. Yu., Vaganova N.A., Kapkaev, V. M.* Modeling Active Layer Thickness Dynamics in Pile Foundations with Cooling Devices under Climate Warming // *Journal of Siberian Federal Universit. Mathematics and Physics.* 2025. Vol. 18. № 5. P. 605–616.

11. *Filimonov M.Y., Kamnev Y.K., Shein A.N., Vaganova N.A.* Modeling the Temperature Field in Frozen Soil under Buildings in the City of Salekhard Taking into Account Temperature Monitoring // Land. 2022. Vol. 11. № 7. P. 1102.
12. *Filimonov M.Y., Vaganova N.A.* Computer modelling of thermal interaction in the pile foundation system of a railway bridge support structure in permafrost // Applied Mathematics, Modeling and Computer Simulation. 2023. Vol. 42. P. 1057–1062.
13. *Вaгaнoвa Н. А., Филимoнoв М.Ю.* Моделирование температурных полей под опорой железнодорожного моста в криолитозоне // Химическая физика и мезоскопия. 2025. Т. 27. № 2. С. 144–152.
14. *Samarsky A.A., Vabishchevich, P.N.* Computational Heat Transfer, Volume 2, The Finite Difference Methodology. Chichester, Wiley, New York, 1995. 432 с.

МОДЕЛЬ ПОСТРОЕНИЯ ТРАЕКТОРИЙ ОСМОТРА СЛОЖНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ¹

Шапошников Д.Г.* , Шапошникова И.Ю.**

* НИТЦ нейротехнологий Южного федерального университета, Ростов-на-Дону

** ООО ЦППП-Юг, Ростов-на-Дону

Введение

Согласно теории активного зрения [18], выдающимся результатам А.Л. Ярбуса [21] и работам по моделированию зрительных путей [16], структура траекторий осмотра изображений и сцен рассматривается как важный ключ к пониманию механизмов зрительного внимания. Предполагается, что форма траектории осмотра позволяет оценить вклад доминирующего типа зрительного внимания (фокального или пространственного). Несмотря на интенсивные исследования этой проблемы с использованием экспериментальных методов, многие ее фундаментальные аспекты остаются нерешенными. Принимая во внимание неполноту и противоречивость известных фактов и гипотез о механизмах перевода взгляда, математические модели рассматриваются как важный инструмент при их исследовании [13]. Настоящая работа направлена на поиск количественных параметров траекторий осмотра изображений с помощью имитационного моделирования механизмов торможения (inhibition) и облегчения (facilitation) возврата взгляда.

I Актуальность исследования

В настоящее время получено достаточное количество экспериментальных фактов о возможном участии механизмов торможения и облегчения возврата взгляда в реализации различных зрительных функций [1, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 14, 15, 20]. В статьях подробно анализируются окуломоторные, эндогенные и экзогенные свойства, определяющие возникновение этих феноменов, их пространственные и временные свойства. Также показано, что взаимодействие этих двух свойств зрительной системы зависит от многих факторов, включая задачу визуального восприятия, характер экспериментальных стимулов и метод регистрации ответов испытуемых, и регулируется механизмами нижнего (bottom-up) и верхнего (top-down) уровней внимания [10].

¹Работа выполнена в рамках проекта СП-11-23-04 Программы стратегического и академического лидерства Южного федерального университета Приоритет-2030.

Предполагается, что торможение возврата работает при просмотре простых изображений [6, 9], а феномен облегчения возврата включается при восприятии сложных изображений и решении сложных зрительных задач [4, 8]. Несмотря на то, что количественный анализ вклада различных факторов в формирование зрительных маршрутов до сих пор не проведен, результаты отечественных [12, 17] и зарубежных исследований [5] позволяют предположить, что свойства движений глаз, такие как возвратные фиксации и особенности траектории осмотра, могут быть измеряемыми параметрами для такого анализа.

II Модель

Разработана математическая модель для исследования механизмов формирования зрительных маршрутов при просмотре сложных изображений и анализа первичных признаков в различных фрагментах изображений (Рис. 1), в основе которой лежит поведенческая модель зрения [12, 17].



Рис. 1: Блок-схема модели.

Алгоритм формирования карты признаков и процедура выбора точек фиксации взгляда в модели имитируют свойства активного зрительного восприятия, прежде всего – пространственно-неоднородное представление информации от центра к периферии поля зрения.

Карта признаков формируется в соответствии с формулой (1), которая включает распределения множества комбинаций первичных признаков, семантически значимых объектов и областей интереса, определенных из результатов психофизических обследований по пространственному расположению фиксации взгляда.

$$F_{ij} = \sum_{k,l,m,n} (K_{Fp} \cdot fp_{k,ij} + K_{Fc} \cdot fc_{l,ij} + K_{Fobj} \cdot obj_{m,ij} + K_{Fmir} \cdot mir_{n,ij}) \quad (1)$$

где: $fp_{k,ij}$ – распределение первичных признаков, таких как ориентированные перепады и контрастные элементы, выделенных в разных цветовых пространствах (Grayscale, RGB, HSV, CIECAM и др.) на различных уровнях разрешения, получаемых с помощью математических сверток с Гауссианом (5x5 до 19x19); $fc_{l,ij}$ – комбинации первичных признаков для детектирования сложных элементов изображения (углы, длинные линии, области с резкими перепадами яркости и т.д.); $obj_{m,ij}$ – области семантически значимых объектов на изображении (люди, лица людей, надписи, знаки); $mir_{n,ij}$ – области интереса, идентифицированная из накопленных результатов психофизических тестов по свободному осмотру изображений; коэффициенты K – веса каждой компоненты; индексы (k, l, m, n) – порядковые номера признака в пределах каждой компоненты.

Основным блоком является процедура определения n -й точки и времени t (количество тактов модели) фиксации “входного окна” [12, 17], имитирующего свойства зрительной системы (Рис. 2), такие как изменение размера рецептивных полей от центра к периферии, пространственная неоднородность представления информации, перевод взгляда, связка возбуждающего и тормозного нейронов, латеральное торможение. “Входное окно” представляет собой несколько концентрических окружностей радиуса R_k (имитирующие разные поля зрения), разбитых на сектора лучами. Узлы структуры, образованные пересечением лучей и окружностей, также являются центрами окружностей радиуса r_k . Наименьшая окружность (при $k=0$) называется фовеальным уровнем. Радиус рабочей области каждого узла (“рецептивное поле”) r_k зависит от типа поля зрения – на первом (фовеальном) уровне размер минимален, на последнем (периферическом) – максимален.

В каждом k -м узле “входного окна” вычисляется сумма S_k всех значений признаковой карты F_{ij} , попадающих в его “рецептивное поле”, после чего значения $F_{i,j}$ в фовеальной области “входного окна”, уменьшаются на значение коэффициента “торможения возврата K_{ior} ”. Если хотя бы в одном

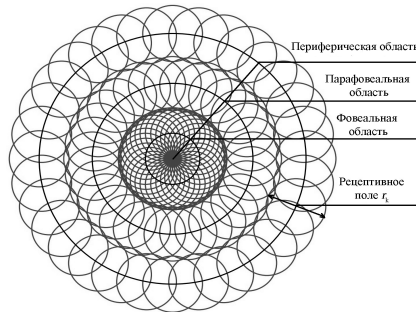


Рис. 2: Схема “входного окна” модели.

из узлов S_k превышает заданный порог, то центр “окна” перемещается в тот узел, в котором значение S_k максимально. Время фиксации t^n в текущей n -й точке характеризуется количеством тактов модели, которые окно располагалось в ней до перемещения в следующую $(n+1)$ -ю точку фиксации. Формирования модельной траектории заканчивается по достижению заданного количества точек фиксации “входного окна” ($n=100$), либо когда на признаковой карте не остаются точек для возможной следующей фиксации.

III Результаты моделирования

В в биологоинспирированных моделях осмотра изображений, как правило, не учитывается механизм подавления возврата взгляда, что может приводить к закликиванию модели. Формализация вклада торможения возврата позволяет построить более реалистичную модель осмотра изображений. При проведении имитационного моделирования нами оценивались структура траектории осмотра и количество возвратных фиксаций “входного окна” при варьировании K_{ior} и степени значимости первичных признаков K_{Fp} из формулы (1). Изображениями для вычислительных экспериментов были выбраны стоп-кадр видеоклипа из аннотированной базы эмоциональных данных Creative Commons (<http://liris-accede.ec-lyon.fr>) [2] и репродукция картины Шишкина “В лесу графини Мордвиновой”. В качестве первичного признака использовался градиент яркости на сером изображении, вычисленный с помощью оператора Собеля с размером 3×3 для трех уровней Гауссового размытия (размер ядра 5). Признаковая карта $F_{i,j}$ формировалась на основе оценки в области 7×7 угловых соотношений между центральным и остальными элементами. Диапазон соотношения ориентированных перепадов в локальной области был от 45 до 285° . Структура “входного окна” состояла из 3-х радиальных колец (диаметр 2, 5, 10 градусов поля зрения)

и 32-х лучей, расходящихся из центра с шагом 11.25° . Размер рецептивных полей выбирался 0,5, 1, 1,5 градусов поля зрения соответственно для каждого из трех радиальных уровней.

Было выявлено, что с уменьшением K_{ior} модель в большинстве случаев формирует траектории фокального типа (Рис. 3а). Напротив, по мере увеличения K_{ior} преобладали траектории пространственного типа (Рис. 3б). При этом вероятность возвратных фиксаций уменьшается при увеличении коэффициента торможения возврата (таблица 1) и достоверно выше ($p < 0,05$ по t -критерию Стьюдента) для фокальных траекторий, чем для пространственных. Кроме того, помимо различий в количестве возвратных фиксаций между фокальной и пространственной траекториями, также были обнаружены (на уровне тенденции) различия по амплитуде смещения “входного окна”.

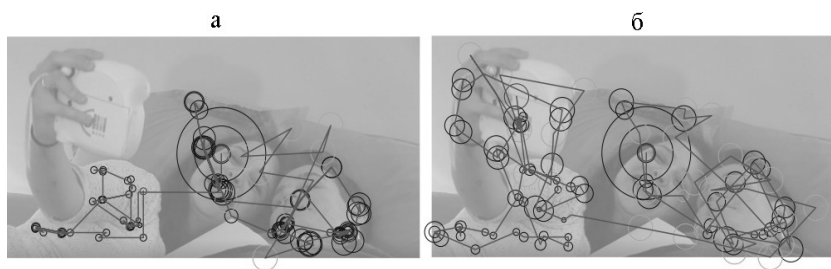


Рис. 3: Примеры траекторий сканирования модели при обработке стоп-кадра видеоклипа N9748 из базы данных LIRIS-ACCORD [2]. В обоих случаях диаметр малых окружностей пропорционален длительности фиксации “входного окна” в текущих точках. а) траектория осмотра фокального типа ($K_{ior}=1$); б) траектория осмотра пространственного типа ($K_{ior}=5$).

Таблица 1: Зависимость вероятности возвратных фиксаций “входного окна” от коэффициента торможения возврата K_{ior}

K_{ior}	Вероятность возвратных фиксаций
1	0,15
2	0,05
3	0,02
4	0,02
5	0,005

Для верификации модели полученные результаты моделирования сравнивались с результатами наших психофизических тестов, проведенных ранее [12, 13, 17]. Мы использовали экспериментальные наборы данных, полученные на одной и той же выборке добровольцев ($n=12$) при выполнении двух заданий, а именно свободного осмотра трех изображений, использованных в работе А.Л. Ярбуса [21], и поиска на них измененных фрагментов с различными инструкциями перед тестированием. Выявлено, что вероятность возвратных фиксации была достоверно выше ($p<0,05$ по t -критерию Стьюдента) при свободном осмотре изображений, чем при решении поисковой задачи.

Так же было выявлено, что количество возвратных фиксаций в модели зависит от степени значимости первичных признаков K_{Fr} (таблица 2), а именно, при увеличении значимости локальных признаков изображения, количество возвратных фиксаций увеличивается, что приводит к изменению типа осмотра с фокального на пространственный и может отражать разные типы внимания у человека.

Таблица 2: Зависимость вероятности возвратных фиксаций “входного окна” от степени значимости первичных признаков K_{Fr}

K_{Fr}	Вероятность возвратных фиксаций на изображении из базы данных LIRIS-ACCELERATE	Вероятность возвратных фиксаций на картине Шишкина “В лесу графини Мордвиновой”
5	0,08	0,04
10	0,21	0,13
15	0,35	0,14
20	0,36	0,27

Заключение

При компьютерном моделировании было выявлено, что тип траектории осмотра (фокальный или пространственный) коррелирует с вероятностью возвратных фиксаций “входного окна”, которая зависит от степени воздействия механизма запрета на возврат и силы признакового притяжения. Предположение о возможности количественной оценки структуры траектории осмотра с использованием возвратных фиксаций подтверждается результатами психофизических обследований при свободном осмотре и поиске измененных фрагментов сложных изображений [12, 13, 17]. Полученные результаты позволяют использовать разработанную модель в качестве инструмента для исследования свойств активного зрительного восприятия,

а также рассматривать вероятность возвратных фиксаций в качестве количественного критерия для определения структуры траектории осмотра, которая может отражать типы внимания.

Литература

1. *Bao Y., Poppel E.* Two Spatially Separated Attention Systems in the Visual Field: Evidence from Inhibition of Return. //Cognitive Processing. 2007. Vol. 8. № 1, P. 37–44.
2. *Baveye Y., Dellandrea E., Chamaret C., Chen, L.* LIRIS-ACCEDE: A Video Database for Affective Content Analysis. //IEEE Transactions on Affective Computing. 2015. Vol. 6. № 1. P. 43–55.
3. *Casagrande M., Barbato M., Mereu S., Martella D., Marotta A., Theeuwes J., Collinson S. L.* Inhibition of Return: A “Depth-Blind” Mechanism? //Acta psychologica. 2012. Vol. 140. № 1. P. 75–80.
4. *Dodd M.D., Van der Stigchel S., Hollingworth A.* Novelty is not Always the Best Policy: Inhibition of Return and Facilitation of Return as a Function of Visual Task. //Psychological Science. 2009. Vol. 20. № 3. P. 333–339.
5. *Grierson L.E., Welsh T.N., Hansen S., Hodges N.J., Hayes S., Lyons J., Elliott D.* The Response Activation Model and Cross-Modal Facilitation and Inhibition of Return: A Trajectory Analysis. //The Open Psychology Journal. 2008. Vol. 1. № 1. P. 35–41.
6. *Hooge I.T.C., Over E.A., van Wezel R.J., Frens, M. A.* Inhibition of Return is not a Foraging Facilitator in Saccadic Search and Free Viewing. // Vision research. 2005. Vol. 45. № 14. P. 1901–1908.
7. *Lim A., Eng V., Osborne C., Janssen S.M., Satel J.* Inhibitory and Facilitatory Cueing Effects: Competition between Exogenous and Endogenous Mechanisms. //Vision. 2019. Vol. 3. № 3. P. 40.
8. *Luke S.G., Schmidt J., Henderson J.M.* Temporal Oculomotor Inhibition of Return and Spatial Facilitation of Return in a Visual Encoding Task. //Frontiers in psychology. 2013. Vol. 4. P. 400.
9. *Lupianez J., Klein R.M., Bartolomeo P.* Inhibition of Return: Twenty Years After. //Cognitive neuropsychology. 2006. Vol. 23. № 7. P. 1003–1014.
10. *Martin-Arevalo E., Chica A.B., Lupianez J.* No Single Electrophysiological Marker for Facilitation and Inhibition of Return: A Review. //Behavioural brain research. 2016. Vol. 300. P. 1–10.

11. *Podladchikova L., Samarin A., Shaposhnikov D., Petrushan M.* Modern Views on Visual Attention Mechanisms. //Advances in intelligent systems and computing. Vol.2018. Vol. 636. P. 139–144.
12. *Подладчикова Л.Н., Шапошников Д.Г., Колтунова Т.И.* Пространственные и временные свойства возвратных фиксации взгляда при осмотре эмоционально значимых изображений. //Физиологический журнал им. И.М. Сеченова. 2018. Т. 104. № 2. С. 245–254.
13. *Podladchikova L.N., Shaposhnikov D.G., Tikidgji–Hamburyan A.V., Koltunova T.I., Tikidgji–Hamburyan R. A., Gusakova V. I., Golovan A.V.* Model-based Approach to Study of Mechanisms of Complex Image Viewing. //Optical Memory and Neural Networks. 2009. Vol. 18. № 2. P. 114–121.
14. *Posner M.I., Rafal R.D., Choate L.S., Vaughan J.* Inhibition of Return: Neural Basis and Function. //Cognitive neuropsychology. 1985. Vol. 2. № 3. P. 211–228.
15. *Pratt J., Castel A. D.* Responding to Feature or Location: A Re-Examination of Inhibition of Return and Facilitation of Return. //Vision Research. 2001. Vol. 41. № 28. P. 3903–3908.
16. *Privitera C.M., Stark L.W.* Scanpath Theory, Attention, and Image Processing Algorithms for Predicting Human Eye Fixations. In Neurobiology of Attention. Academic Press:2005. P. 296–299.
17. *Samarin A., Koltunova T., Osinov V., Shaposhnikov D., Podladchikova L.* Scanpaths of Complex Image Viewing: Insights from Experimental and Modeling Studies. //Perception. 2015. Vol. 44. № 8–9. P. 1064–1076.
18. *Samarin A. I., Podladchikova L. N., Petrushan M. V., Shaposhnikov D. G.* Active Vision: from Theory to Application. //Optical Memory and Neural Networks. 2019. Vol. 28. № 3. P. 185–191.
19. *Schilbach L., Timmermans B., Reddy V., Costall A., Bente G., Schlicht T., Vogeley K.* Toward a Second-Person Neuroscience. //Behavioral and brain sciences. 2013. Vol. 36. № 4. P. 393–414.
20. *Satel J., Wilson N.R., Klein R.M.* What Neuroscientific Studies Tell Us About Inhibition of Return? //Vision. 2019. Vol. 3. № 4. P. 58.
21. *Yarbus A. L.* Eye Movements and Vision. Springer. 2013.

ДЕТАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ОБОНЯТЕЛЬНОЙ ЛУКОВИЦЫ КРЫСЫ¹

Шапошников П.Д.^{*}, Аверин А.В.^{**}

^{*} НИТЦ нейротехнологий Южного федерального
университета, dgshaposhnikov@sfedu.ru

^{**} ООО ЦППР-Юг, Ростов-на-Дону, inku1975@mail.ru

Введение

Моделирование биологических нейронных сетей с учетом физических свойств отдельных элементов или биологоподобное моделирование входит в одно из бурно развивающихся направлений в настоящее время, которое называется "вычислительные нейронауки". Сегодня существует множество моделей от отдельных нейронов до функциональных структур мозга. Особый интерес представляют модели обонятельного анализатора и, в частности, обонятельной луковицы. Такие модели позволяют исследовать влияния различных одорантов на активность отдельных структур обонятельной луковицы.

Модель

В работе исследуется модель обонятельной луковицы крысы, состоящая из митральных и гранулярных клеток с реалистичной архитектурой связи, где каждой гломеруле соответствует одна митральная клетка, а связи между гломерулами осуществляются посредством дендродендритных контактов между общими гранулярными клетками [1]. Модель обонятельной луковицы была реализована в среде моделирования BRIAN 2 [2] и включает 100 митральных (МС) и 100 гранулярных (ГС) клеток, которые формируют связи между собой с вероятностью 0.5 (Рис.1).

МС описываются системой уравнений Ходжкина–Хаксли [3] с 5 ионными каналами – 2 натриевых и 3 калиевых и входная функция, имитирующей дыхательный цикл (сенсорный вход). ГК описывались моделью интегрирующего нейрона, которому были установлены параметры для воспроизведения соотношения частота-ток и аналогичная входная функция, но для токов.

¹Работа выполнена в рамках проекта СП-11-23-04 Программы стратегического и академического лидерства Южного федерального университета Приоритет-2030

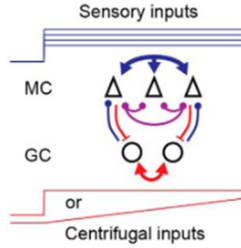


Рис. 1: Схема гломерулы в модели обонятельной луковицы

Уравнение MC

$$\begin{aligned} \frac{dV_m}{dt} = & -g_L(V_m - E_L) - g_{Na}m_{Na,\infty}^3(V_m - E_{Na}) - \\ & -g_{NaP}m_{NaP,\infty}(V_m - E_{Na}) - g_{Kf}m_{Kf}(V_m - E_K) - \\ & -g_{KA}\bar{m}_{KA}\bar{h}_{KA}(V_m - E_K) - g_{Ks}m_{Ks}h_{Ks}(V_m - E_K) + \\ & + I_{syn,I} + I_{input,E}, \\ \frac{dm_{Kf}}{dt} = & -\frac{m_{Kf}}{\tau_{Kf}^m}, \\ \frac{dm_{Ks}}{dt} = & \frac{m_{Ks,\infty} - m_{Ks}}{\tau_{Ks}^m}, \\ \frac{dh_{Ks}}{dt} = & \frac{h_{Ks,\infty} - h_{Ks}}{\tau_{Ks}^h}, \end{aligned}$$

где C – емкость мембраны, V_m – электрический потенциал, g_i – проводимости ионных каналов и $m_i h_i$ – воротные переменные.

Уравнение GC

$$\tau_m \frac{dV_m}{dt} = \frac{(V_m - V_T)^2}{2\Delta_T} - \frac{I_T}{g_L} + \frac{I_{centrifugal,E} + I_{syn,E}}{g_L},$$

где $g_L = 16.66nS$, $\Delta_T = 0.1mV$, $I_T = 0.02nA$, $\tau_m = 60ms$.

Входные функции MC и GC

$$\begin{aligned} g_{input,E,i}(t) = & \frac{g_{input,E,basal} + g_{input,E,max,i}}{2} + \\ & + \frac{g_{input,E,max,i} - g_{input,E,basal}}{2} [1 + \cos(2\pi \cdot f \cdot t + \phi_i)], \end{aligned}$$

где $g_{input,E,basal} = 4S/m^2$, а максимальная проводимость менялась линейно от $6.6S/m^2$ до $8.1S/m^2$, частота дыхательного цикла – 2Гц.

$$I_{centrifugal,E,i}(t) = \frac{I_{E,base} + I_{E,max}}{2} + \frac{I_{E,max} + I_{E,base}}{2} [1 + \cos(2\pi \cdot f \cdot t + \phi_i - \Delta\varphi)]$$

максимальный ток линейно менялся от -2.5 нА до 0 нА и $I_{E,base} = -4$ нА.

Параметры воротных переменных в модели МС $m_i h_i$ задаются системой уравнений:

$$\begin{aligned} h_{\infty,K_s} &= \frac{1}{1 + \exp(\frac{V_m + 65}{6.6})}, \\ m_{\infty,K_s} &= \frac{1}{1 + \exp(-\frac{V_m + 34}{6.5})}, \\ m_{\infty,N_{ap}} &= \frac{1}{\exp(-\frac{V_m + 51}{5}) + 1}, \\ m_{\infty,N_a} &= \frac{a_{N_a}^m}{a_{N_a}^m + b_{N_a}^m}, \\ m_{\infty,N_a} &= \frac{a_{N_a}^m}{a_{N_a}^m + b_{N_a}^m}, \\ a_{N_a}^m &= 0.32 \frac{V_m + 50}{1 - \exp(-\frac{V_m + 50}{4})}, \\ b_{N_a}^m &= 0.28 \frac{V_m + 23}{\exp(\frac{V_m + 23}{5}) - 1}, \\ \tau_{K_s}^h &= 100 + \frac{110}{\exp(-\frac{V_m + 71.6}{6.85}) + 1}, \\ \tau_{K_f}^m &= 2.6ms \quad \tau_{K_s}^m = 10ms. \end{aligned}$$

Каждый раз, когда V_m достигает значения (-30) мВ, генерируется спайк и V_m сбрасывался до -65 мВ, m_{K_s} увеличивался на 0.03, h_{K_s} увеличивался на 0.002, а m_{K_f} увеличивался на 0.4. Максимальные значения удельных проводимостей – $g_{Na} = 500S/m^2$; $g_{NaP} = 1.1S/m^2$; $g_{K_s} = 310S/m^2$; $g_{K_A} = 100S/m^2$; $g_{K_f} = 100S/m^2$. Проводимость утечки $g_L = 0.1S/m^2$. Реверсивные потенциалы $E_K = -75$ мВ и $E_{Na} = 45$ мВ, и мембранный реверсивный потенциал $E_L = -66.5$ мВ. Удельная электроемкость мембраны $C = 0.01$ F/ m^2 .

Моделирование

В результате моделирования была получена зависимость электрического потенциала от времени (Рис 2). Эта активность произвольно выбранного нейрона показывает, что генерация спайков происходит на стадии, когда входная функция имеет максимумы, что соответствует стадии вдоха в дыхательном цикле. Далее был рассчитан частотный спектр, которые качественно схож с результатами моделирования в [1].

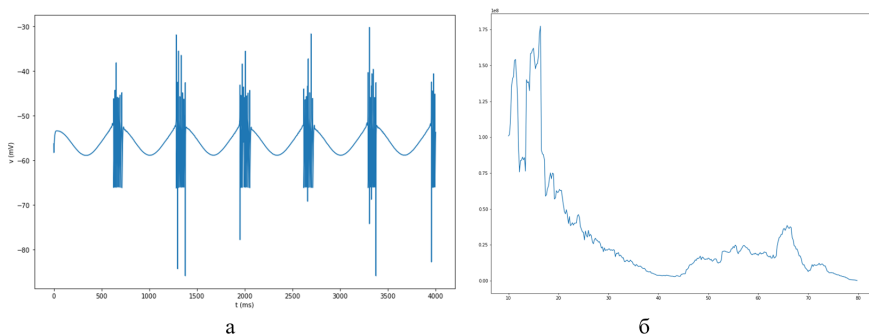


Рис. 2: Активность произвольного нейрона (а) и спектр частот, полученный в результате моделирования (б)

Литература

1. *David F. et al* Competing mechanisms of gamma and beta oscillations in the olfactory bulb based on multimodal inhibition of mitral cells over a respiratory cycle. *eNeuro*. 2015. V.2. № 6.
2. *Goodman D. F. M., Brette R.* The BRIAN simulator. *Frontiers in neuroscience*. 2009. V. 3. p. 26.
3. *Hodgkin A. L., Huxley A. F.* Currents carried by sodium and potassium ions through the membrane of the giant axon of *Loligo*. *The Journal of physiology*. 1952. V.116. № 4. p. 449-472.

РЕШЕНИЕ

XXI ВСЕРОССИЙСКОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
"СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО
МОДЕЛИРОВАНИЯ",
посвященной памяти Л.А. Крукиера

С 15 по 20 сентября 2025 года состоялась XXI Всероссийская научная конференция "Современные проблемы математического моделирования", посвященная памяти Л.А. Крукиера.

В работе конференции приняли участие 37 учёных из 10 городов России, представлявшие 12 научных центров. Из них 9 докторов наук, 12 кандидатов наук, 5 аспирантов и 1 магистрант. Было сделано 8 пленарных докладов ведущими российскими учеными в области математического моделирования, сделаны 15 докладов (из них 4 – стендовых) исследователями различных научных центров, из которых 8 докладов были сделаны молодыми учеными.

Подводя итоги проведённой Конференции, участники отмечают

- высокий научный уровень представленных докладов, разнообразие тематик и новые оригинальные подходы к решению задач математического моделирования;

и постановляют

- выразить благодарность Шапошникову Д.Г. за привлечение к работе Конференции молодых учёных из возглавляемого им научного коллектива;
- выразить благодарность Оргкомитету за проведённую им работу по организации конференции;
- выразить благодарность администрации и сотрудникам пансионата "Звездный" за помощь в проведении конференции;
- опубликовать Труды конференции (электронный вариант) до 10 декабря 2025 года;
- разместить презентации лекций на сайте Конференции;
- наметить проведение XXII Всероссийской научной конференции "СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ" на 2027 год.

Научное издание

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Сборник трудов
XXI ВСЕРОССИЙСКОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

Ответственные редакторы: Муратова Г.В. и Шабас И. Н.

Технический редактор: Майер С.Ф.

Подписано в печать 16.12.2025 г.

Бумага офсетная. Формат 60×84/16. Тираж 100 экз.

Усл. печ. лист 6,5. Уч.-изд. лист. 4,5. Заказ № 10255.

Отпечатано в отделе полиграфической, корпоративной и сувенирной продукции
Издательско-полиграфического комплекса КИБИ МЕДИА ЦЕНТРА ЮФУ.
344090, г. Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 200/1, тел. (863) 243-41-66.