



Южный федеральный университет
(ЮФУ, г. Ростов-на-Дону)
Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша
Российской академии наук
(ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва)

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Сборник трудов

XVII Всероссийской конференции-школы
молодых исследователей
(пос. Абрау-Дюрсо, 11–16 сентября 2017 г.)

Ответственные редакторы:
Г. В. Муратова, И. Н. Шабас

Ростов-на-Дону – Таганрог
2017

УДК 519.6(063)
ББК 22.19я43
С568

С568 Современные проблемы математического моделирования :
сборник трудов XVII Всероссийской конференции-школы
молодых исследователей (пос. Абрау-Дюрсо, 11–16 сентября 2017 г.)
/ Южный федеральный университет ; Институт прикладной
математики им. М. В. Келдыша РАН ; отв. ред.: Г. В. Муратова, И.
Н. Шабас. – Ростов-на-Дону ; Таганрог : Издательство Южного
федерального университета, 2017. – 192 с.
ISBN 978-5-9275-2634-5

В сборнике представлены доклады участников XVII Всероссийской конференции-школы молодых исследователей «Современные проблемы математического моделирования», организованной Институтом прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН и Институтом математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета, проходившей с 11 по 16 сентября 2017 года в поселке Абрау-Дюрсо, Новороссийск, Россия. В работе школы приняли участие представители научных центров Новосибирска, Москвы, Уфы, Сарова, Ростова-на-Дону и других городов.

Публикуется в авторской редакции.

УДК 519.6(063)
ББК 22.19я43

ISBN 978-5-9275-2634-5

© Южный федеральный университет, 2017

Оглавление

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРЕХФАЗНОГО ТЕЧЕНИЯ В ТРЕЩИНЕ ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА Булгакова Г.Т., Киреев Т.Ф.	6
РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ С ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИМИ ПРОСЛОЙКАМИ Бураго Н.Г., Журавлев А.Б., Никитин И.С.	14
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ РАСЧЕТА ПРЕССОВАНИЯ И СПЕКАНИЯ ПОРОШКОВЫХ МАТЕРИАЛОВ Бураго Н.Г., Никитин И.С.	21
ОЦЕНКА ДОЛГОВЕЧНОСТИ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМОВ УСТАЛОСТНОГО РАЗРУШЕНИЯ С ОПРЕДЕЛЕНИЕМ КРИТИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ Бураго Н.Г., Никитин А.Д., Никитин И.С., Якушев В.Л.	28
ОБЗОР И СРАВНЕНИЕ ПОГЛОЩАЮЩИХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ FDTD-СХЕМЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА Вшивков В.А., Генрих Е.А.	34
ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕПЛОВЫХ ПОЛЕЙ С УЧЕТОМ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ Гладких В.С., Петухов А.В.	41
СЕТОЧНЫЕ СТРУКТУРЫ ДАННЫХ ОБЕСПЕЧИВАЮЩИЕ БАЛАНСИРОВКУ НАГРУЗКИ СОВРЕМЕННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ Гладких В.С., Свешников В.М., Козырев А.Н.	48
СХЕМЫ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА, ОСНОВАННЫЕ НА ТОЖДЕСТВЕ МАРЧУКА, ДЛЯ ОЦЕНКИ ОПЦИОНОВ В МОДЕЛИ БЛЭКА-ШОУЛЗА Горбенко Н.И.	56
РАЗНОСТНЫЕ НЕОТРАЖАЮЩИЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ Дородницын Л.В.	62
ВАРИАТИВНОСТЬ ОПОСРЕДОВАННОЙ РЕГУЛЯЦИИ ЕСТЕСТВЕННОЙ УБЫЛИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОМЫСЛОВЫХ ПОПУЛЯЦИЙ Дубровская В.А., Переварюха А.Ю.	70
АНГЛОЯЗЫЧНАЯ МАГИСТЕРСКАЯ ПРОГРАММА МЕХМАТА ЮФУ «COMPUTATIONAL MECHANICS AND INFORMATIONAL TECHNOLOGIES» Карякин М.И., Надолин К.А., Наседкин А.В.	76

РАСЧЕТ ЗАДАЧИ МИКРОМАСШТАБНОЙ МОДЕЛИ АТМОСФЕРЫ ДЛЯ НЕСЖИМАЕМОЙ СРЕДЫ	
Кондаков В.Г.	84
ПРЕДОБУСЛАВЛИТЕЛЬ С ПРОЕКТОРАМИ ДЛЯ СМЕШАННО- ГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ	
Крамаренко В.К.	91
ВЛИЯНИЕ КОРРОЗИОННОГО ИЗНОСА НА СЛОЖНЫЕ КОЛЕ- БАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ БАЛКИ БЕРНУЛЛИ- ЭЙЛЕРА В РАМКАХ СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОДИНАМИКИ	
Крылова Е.Ю., Синичкина А.О., Палкова И.В., Крысько В.А.	99
ПРЕДОБУСЛОВЛИВАНИЕ МЕТОДОВ ПОДПРОСТРАНСТВА КРЫ- ЛОВА КОСОЭРМИТОВЫМИ ИТЕРАЦИЯМИ	
Мартынова Т.С.	105
МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫБОРА ПОЗИЦИЙ ИНДИВИДАМИ ПРИ ИН- ФОРМАЦИОННОМ ПРОТИВОБОРСТВЕ В СЛУЧАЕ ДВУХКОМПОН- ЕНТНОГО СОЦИУМА	
Михайлов А.П., Петров А.П., Прончева О.Г.	113
МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЖИМОВ РАБОТЫ МОЗГА НА ОСНОВЕ МО- ДЕЛИ ИЖИКЕВИЧА	
Муратова Г.В., Пичугина О.А., Бавин В.В.	118
ВАЛИДАЦИЯ РЕДУЦИРОВАННОЙ МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА ПАС- СИВНОЙ ПРИМЕСИ В МЕЛКОМ ПРОТЯЖЕННОМ РУСЛОВИИ ПОТОКЕ	
Надолин К.А., Жиляев И.В.	125
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИ РАЗНО- РОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЕДИНОМ ЧИСЛЕННОМ КОДЕ	
Острик А.В.	133
О ВЕСОВОМ ВЕКТОРНОМ МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА С УГЛОВОЙ СИНГУ- ЛЯРНОСТЬЮ	
Рукавишников В.А., Мосолапов А.О.	139
НОВЫЙ ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СТОКСА В ОБ- ЛАСТИ С ТУПЫМ УГЛОМ	
Рукавишников В.А., Рукавишников А.В.	147
ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ МЕТОДОВ ТИПА РУНГЕ- КУТТЫ ДЛЯ ЗАДАЧ ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ НА ПРИМЕРЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГИБКИХ БАЛОК	
Салтыкова О.А., Палкова И.В., Крысько В.А.	155
ВЫСОКОТОЧНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗМУЩЁННОГО ДВИ- ЖЕНИЯ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ В ЗАДАЧЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО СУЩЕСТВОВАНИЯ	
Сергеев С.И.	163

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ СОПРЯЖЕННО-ОПЕРАТОРНОЙ МОДЕЛИ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Сорокин С.Б...... 171

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КИСЛОРОДНОГО РЕЖИМА В ВОДОЕМАХ АЗОВО-ЧЕРНОМОРСКОГО РЕГИОНА

Шабас И.Н., Селютин В.В...... 180

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ СГОННО-НАГОННЫХ КОЛЕБАНИЙ УРОВНЯ ВОДЫ УСТЬЕВОЙ ОБЛАСТИ ДОНА НА МОРФОМЕТРИЮ РУСЛА

Чикин А.Л., Клещенков А.В., Чикина Л.Г...... 185

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРЕХФАЗНОГО ТЕЧЕНИЯ В ТРЕЩИНЕ ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА¹

Булгакова Г.Т., Киреев Т.Ф.

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

Введение

При моделировании фильтрации флюидов в месторождениях углеводородов важной задачей является корректный учет влияния трещин гидравлического разрыва пласта (ГРП) на работу скважин.

Существует множество эффективных аналитических и полуаналитических моделей для решения этой задачи, например, [1, 2]. Однако учет многофазной природы течения внутри трещины в аналитических моделях затруднителен.

Относительно недавно была предложена концепция Embedded Discrete Fracture Model (EDFM) [3, 4], использующая явное численное моделирование многофазного течения в трещинах совместно с течением в пласте. В [5] показано, что такой явный учет течения внутри трещины решает проблему нефизичного распределения давления в трещине, которая присутствует в упрощенных моделях трещины в коммерческих гидродинамических симуляторах Tempest More (2010) и tNavigator (2013).

При трехфазном полномасштабном моделировании с большим количеством трещин ГРП метод EDFM требует дополнительных вычислительных затрат, связанных с увеличением количества неизвестных переменных и ростом нелинейности задачи. Данная работа посвящена снижению этих вычислительных затрат с помощью сведения трехфазного течения внутри трещины в однофазное. В работе предлагается новая модель течения в трещине ГРП, интегрированная в стандартную модель скважины, учитывающая наличие трех фаз и эффекты разгазирования нефти. Движение смеси воды, нефти и газа в трещине описывается установившейся однофазной фильтрацией по закону Дарси.

I Модель течения в пласте

Считается, что фильтрация флюидов происходит в тонком пласте, свойства которого слабо меняются вдоль вертикальной оси. Пренебрегая гравитационными эффектами и изменением всех величин вдоль вертикали, можно

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 17-41-020226 p_a).

использовать плоское двумерное представление пласта $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Внешняя граница пласта описывается замкнутым контуром $\Gamma = \partial\Omega$, а внутренняя граница пласта Γ_f представляет собой стенки трещины.

Процесс фильтрации флюидов в пласте описывается классическими уравнениями модели нелетучей нефти с переменным давлением насыщения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right) + \operatorname{div} \left(\frac{\vec{u}_w}{B_w} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right) + \operatorname{div} \left(\frac{\vec{u}_o}{B_o} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_g}{B_g} + \frac{\phi R_s S_o}{B_o} \right) + \operatorname{div} \left(\frac{\vec{u}_g}{B_g} + \frac{R_s \vec{u}_o}{B_o} \right) &= 0, \\ S_w + S_o + S_g &= 1. \end{aligned}$$

В задаче притока к трещине ГРП используются следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} p(t = 0, \vec{r}) &= p_0(\vec{r}), \\ S_w(t = 0, \vec{r}) &= S_{w,0}(\vec{r}), \\ S_g(t = 0, \vec{r}) &= S_{g,0}(\vec{r}), \\ p_b(t = 0, \vec{r}) &= p_{b,0}(\vec{r}), \\ \int_{\Gamma_f} \frac{(\vec{u}_w, \vec{n})}{B_w} d\gamma &= Q_w, \\ \int_{\Gamma_f} \frac{(\vec{u}_o, \vec{n})}{B_o} d\gamma &= Q_o, \\ \int_{\Gamma_f} \left(\frac{(\vec{u}_g, \vec{n})}{B_g} + \frac{R_s (\vec{u}_o, \vec{n})}{B_o} \right) d\gamma &= Q_{fg} + R_s Q_o, \\ \int_{\Gamma} (\vec{u}_s, \vec{n}) d\gamma &= 0, \quad s = w, o, fg. \end{aligned}$$

Здесь ϕ – пористость породы; S_w – водонасыщенность; S_o – нефтена-
сыщенность; S_g – газонасыщенность; B_w, B_o, B_g – объемные коэффициенты
воды, нефти и свободного газа соответственно; R_s – коэффициент раство-
римости газа в нефти; $\vec{u}_w, \vec{u}_o, \vec{u}_g$ – скорости фильтрации воды, нефти и
свободного газа соответственно, определяемые обобщенным линейным зако-
ном Дарси; Q_w, Q_o, Q_{fg} – объем флюида, поступающий в трещину в единицу
времени для воды, нефти и свободного газа соответственно; \vec{n} – единичный
вектор внешней нормали к границам Γ или Γ_f .

II Модель течения в трещине

Рассматривается случай вертикальной скважины, вскрытой в трещине ГРП по всей толщине пласта. Приток из пласта в скважину осуществляется только через трещину. Уравнение установившейся фильтрации смеси флюидов в трещине $\Omega_f \subset \Omega \subset \mathbb{R}$, граничное условие в центре трещины и на стенках трещины $\Gamma_f = \partial\Omega_f$ задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\rho_{mix} \vec{u}_{mix}) &= 0, \\ p(\vec{r}_{frac}) &= p_w = \text{const}, \\ \int_{\Gamma_f} \rho_{mix}(\vec{u}_{mix}, \vec{n}) d\gamma &= -(\rho_w Q_w + \rho_o Q_o + \rho_{fg} Q_{fg}), \end{aligned}$$

где ρ_{mix} – плотность трехфазной смеси в трещине; $\rho_w, \rho_o, \rho_{fg}$ – плотности воды, нефти и свободного газа соответственно; \vec{u}_{mix} – скорость движения смеси в трещине; $p(\vec{r}_{frac})$ – давление в центре трещины; p_w – фиксированное забойное давление скважины. Плотность смеси задается с помощью объемных долей воды, нефти и свободного газа:

$$\rho_{mix} = \rho_w \alpha_w + \rho_o \alpha_o + \rho_{fg} \alpha_{fg} = \frac{\rho_{wsc}}{B_w} \alpha_w + \frac{(\rho_{osc} + R_s \rho_{fgsc})}{B_o} \alpha_o + \frac{\rho_{fgsc}}{B_g} \alpha_{fg}.$$

Скорость движения смеси в трещине определяется как скорость движения центра масс системы из трех компонент, движущихся независимо друг от друга:

$$\begin{aligned} \vec{u}_{mix} &= \frac{\vec{v}_w \alpha_w \rho_w + \vec{v}_o \alpha_o \rho_o + \vec{v}_{fg} \alpha_{fg} \rho_{fg}}{\rho_{mix}}, \\ \vec{v}_i &= \frac{k_{frac}}{\mu_i} \operatorname{grad}(p), i = w, o, fg, \\ \alpha_i &= \frac{Q_i}{Q_w + Q_o + Q_{fg}}, i = w, o, fg. \end{aligned}$$

Здесь $\alpha_w, \alpha_o, \alpha_{fg}$ – объемные доли воды, нефти и свободного газа в трещине соответственно; k_{frac} – проницаемость проппанта; μ_w, μ_o, μ_{fg} – вязкости воды, нефти и газа соответственно.

Объемные доли флюидов $\alpha_w, \alpha_o, \alpha_{fg}$ определяются через интегральные характеристики притока Q_w, Q_o, Q_{fg} и являются постоянными вдоль всей трещины. Это предположение можно считать справедливым в связи с высокими скоростями потока в трещине.

Данная модель применима только для эмульсионных смесей (Рис. 1), поскольку в этом случае пузырьки газа равномерно распределены по всему объему смеси. Смесь можно считать эмульсионной, если ее объемное газосодержание не превышает 20% [6].



Рис. 1. Структура газожидкостной смеси

III Дискретизация и решение уравнений

Сначала строится разбиение Вороного $\{\omega\} = \Omega$ для пласта алгоритмом заматающей прямой, а затем алгоритмом, предложенным в [7], отсекаются части ячеек, выходящие за пределы контура. Ячейки пласта вокруг трещины строятся по эллиптической форме (Рис. 2). При использовании такой формы точность описания фронтов насыщенности флюидов около трещины повышается. Трещина разбивается на несколько одномерных сегментов $\{\omega_f\} = \Omega_f$ так, чтобы в одной ячейке пласта содержался только один сегмент трещины.

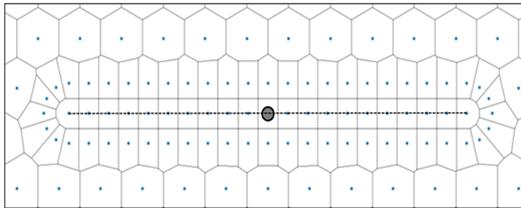


Рис. 2. Пластовая расчетная сетка в области трещины: скважина обозначена серой окружностью, трещина обозначена черной пунктирной линией

Сопряжение уравнений течения в пласте и уравнений течения в трещине осуществляется с помощью условия равенства объема флюида, поступающего из пластовой ячейки ω в соответствующую ячейку трещины ω_f :

$$q_{\omega_f, s} = q_{\omega, s}, \quad s = w, o, fg.$$

Предполагается, что в пластовой ячейке с трещиной давление в направлении нормали к трещине распределено линейно. Дискретизованные объемы флюида $q_{\omega, s}$ вычисляются по классической линейной формуле через среднее нормальное расстояние $\langle d \rangle$:

$$q_{\omega, s} = A_{\omega_f} \frac{2}{\left(\frac{1}{k_{\omega}} + \frac{1}{k_{\omega_f}}\right)} \frac{k_{rs}}{\mu_s B_s} \frac{p_{\omega} - p_{\omega_f}}{\langle d \rangle}, \quad s = w, o, fg,$$

$$\langle d \rangle = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} x_n d\omega,$$

где A_{ω_f} – площадь поперечного сечения части трещины, находящаяся в ячейке ω ; k_{ω} – проницаемость ячейки пласта ω ; k_{ω_f} – проницаемость ячейки трещины ω_f ; k_{rs} – относительная фазовая проницаемость флюида; μ_s – вязкость флюида; B_s – объемный коэффициент флюида; p_{ω} – давление в ячейке пласта ω ; p_{ω_f} – давление в ячейке трещины ω_f ; $d\omega, x_n, |\omega|$ – элементарный объем пластовой ячейки, расстояние от элементарного объема до трещины по нормали к трещине и объем ячейки соответственно.

Относительная фазовая проницаемость k_{rs} , вязкость μ_s и объемный коэффициент флюида B_s зависят от давления и локальных насыщенных, поэтому их значения вычисляются вверх по потоку: для добывающей скважины принимается

$$k_{rs} = k_{rs}(p_{\omega}), \mu_s = \mu_s(p_{\omega}), B_s = B_s(p_{\omega}),$$

а для нагнетательной

$$k_{rs} = k_{rs}(p_{\omega_f}), \mu_s = \mu_s(p_{\omega_f}), B_s = B_s(p_{\omega_f}).$$

В [3, 4] на этапе инициализации расчета каждая ячейка пласта ω , содержащая трещину, разбивается на более мелкие элементарные объемы для вычисления значения вышеуказанного интеграла. Однако с помощью неструктурированной сетки можно добиться того, чтобы все ячейки, через которые проходит трещина, имели форму квадрата со стороной dx (Рис. 2), а трещина пересекала эту ячейку строго посередине и параллельно грани квадрата. В таком случае для среднего нормального расстояния имеется простое аналитическое выражение:

$$\langle d \rangle = \frac{dx}{4}.$$

После дискретизации методом конечных объемов уравнения течения в пласте и уравнения течения в трещине записываются в одну систему нелинейных уравнений. Для каждой пластовой ячейки используется три неизвестных переменных: давление, водонасыщенность и газонасыщенность. Каждая ячейка трещины в качестве неизвестной переменной имеет только давление. Если скважина работает в режиме с постоянным забойным давлением, то давление в центральной ячейке трещины фиксируется и система становится замкнутой. Если скважина работает в режиме с постоянным дебитом, то для замыкания системы используются уравнения:

$$\sum_{\omega_f \in \Omega_f} q_{\omega_f, s} = Q_s, \quad s = w, o, fg.$$

Полученная система нелинейных уравнений решается полностью неявно с помощью метода Ньютона.

IV Численный эксперимент

Для верификации предложенной модели решена двумерная задача о притоке жидкости к одиночной вертикальной скважине, вскрытой в трещине ГРП. На скважине установлен контроль по забойному давлению в 150 атм. Пласт имеет размеры 1000x1000 м и непроницаемые границы. Средний диаметр пластовых ячеек от 25 до 50 м; проницаемость пласта – 50 мД; начальное пластовое давление – 200 атм; начальная водонасыщенность – 0.35; начальная газонасыщенность – 0; полудлина трещины – 250 м; ширина раскрытия – 1 см; проницаемость пропантa варьировалась от 250 до 25000 Д.

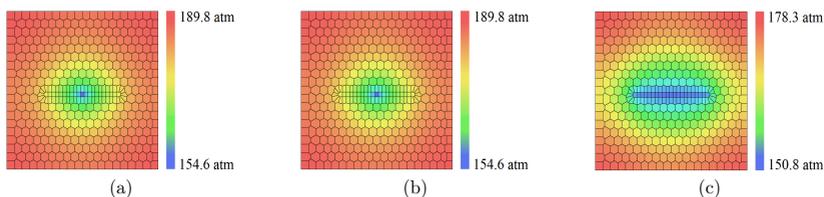


Рис. 3. Распределение давления после 1 месяца работы скважины при различной проницаемости пропантa: (a) – 250 Д, (b) – 2500 Д, (c) – 25000 Д

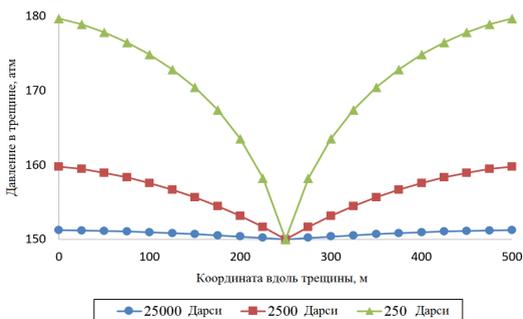


Рис. 4. Распределение давления в трещине по ее длине при различной проницаемости пропантa

На Рисунке 3 заметен эллиптический характер распределения давления при всех значениях проницаемости пропантa. На Рисунке 4 показано распределение давления в трещине по ее длине после 1 месяца работы скважины. Видно, что с увеличением проницаемости пропантa до 25000 Дарси, давление на крыльях трещины приближается к давлению, соответствующему трещине бесконечной проводимости.

Проведено сравнение скорости расчета для трех различных моделей трещины ГРП. Решалась задача трехфазной фильтрации для 16 скважин с трещинами ГРП с фиксированным значением забойного давления на период 360 суток. Сравнение скоростей расчета для разных моделей течения в трещине показано в Таблице 1. Расчет на модели с полным трехфазным течением в трещине занял 7.4 секунд, в то время как расчет на новой модели занял 5.7 секунд (на 25% меньше).

Таблица 1. Сравнение скоростей расчета для разных моделей течения в трещине

Модель течения в трещине	Ньютоновских итераций	Время расчета
Модель EDFM [3]	302	7.4 сек
Предложенная модель	231	5.7 сек
Аналитическая модель	103	2.5 сек

Заключение

Разработана новая модель течения в трещине ГРП для полномасштабного гидродинамического моделирования, которая позволяет достичь некоторого баланса между вычислительной сложностью и детализацией физических процессов в трещине. Показано, что при численном моделировании притока к трещине ГРП предложенная модель позволяет на 25% сократить вычислительные затраты по сравнению с полной трехфазной моделью [3, 4].

Литература

1. *Ding D.Y., Wu Y.S., Jeannin L.* Efficient simulation of hydraulic fractured wells in unconventional reservoirs // *Journal of Petroleum Science and Engineering*. 2014. V.122. P. 631–642.
2. *Wan J., Aziz K.* Semi-Analytical Well Model of Horizontal Wells With Multiple Hydraulic Fractures // *SPE Journal*. 2002. V.7. P. 437–445.
3. *Liyong L., Seong H. L.* Efficient Field-Scale Simulation for Black Oil in a Naturally Fractured Reservoir via Discrete Fracture Networks and Homogenized Media // *International Oil & Gas Conference and Exhibition in China*. 2006.
4. *Moinfar A., Varavei A., Sepehrnoori K., Johns R.* Development of an Efficient Embedded Discrete Fracture Model for 3D Compositional Reservoir Simulation in Fractured Reservoirs // *SPE Journal*. 2014. V.19. P. 289–303. P. 750–758.

5. *Гильмиев Д. Р.* Гидродинамическая модель фильтрации жидкости в пласте при наличии трещин гидроразрыва // Нефтяное хозяйство. 2013. N. 7. С. 108–110.
6. *Мищенко И.Т.* Скважинная добыча нефти: учебное пособие для вузов. Москва: Нефть и газ. 2003.
7. *Palagi C.L., Aziz K.* Use of Voronoi Grid in Reservoir Simulation // SPE Advanced Technology Series. 1994. V.2. P. 69–77.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ С ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИМИ ПРОСЛОЙКАМИ¹

Бураго Н.Г.* , Журавлев А.Б.* , Никитин И.С.**,**

* *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлунского РАН, Москва*

** *Институт автоматизации проектирования РАН, Москва*

*** *МАИ – Национальный Исследовательский Университет, Москва*

Введение

Методом асимптотического осреднения построена уточненная модель слоистой среды с нелинейными вязкопластическими условиями проскальзывания на межслойных границах. Подобные модели могут быть полезными при решении динамических задач сейсморазведки и интерпретации волновых картин, полученных в процессе ее проведения.

I Описание модели слоистой среды

В данной работе методом асимптотического осреднения [1] строится уточненная модель слоистой среды с нелинейными вязкопластическими условиями проскальзывания на межслойных границах. Физическим объектом, обладающим подобными свойствами, является, например, флюидосодержащий слоистый пакет в упругом геологическом массиве. Предполагается, что в тонких прослойках между упругими слоями находится очень вязкая жидкость (нефть), или вязкопластическая масса (песок, пропитанный нефтью). Подобные модели могут быть полезными при решении динамических задач сейсморазведки и интерпретации волновых картин, полученных в процессе ее проведения.

В декартовой прямоугольной системе координат x_1, x_2, x_3 рассмотрим безграничную слоистую среду. Ось x_3 перпендикулярна плоскопараллельным границам раздела слоев. Границы раздела имеют координаты $x_3 = x^{(s)} = s\varepsilon$, $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, где постоянная толщина слоя $\varepsilon \ll 1$ является малым параметром. Предполагается, что физически между упругими слоями имеются тонкие вязкие или вязкопластические прослойки толщины $\delta \ll \varepsilon$, однако мы пренебрегаем толщиной этих прослоек и заменяем их условием скольжения на поджатых границах слоев:

$$\sigma_{33} < 0, \quad [u_3] = [\sigma_{y3}] = [\sigma_{33}] = 0$$

¹Работа выполнена по Программе Президиума РАН

либо линейным условием вязкого скольжения:

$$[u_{\gamma,t}]/\varepsilon = \kappa\sigma_{\gamma 3}$$

либо нелинейным условием вязкопластического скольжения

$$[u_{\gamma,t}]/\varepsilon = \kappa\sigma_{\gamma 3} < F(\sigma_{\beta 3}\sigma_{\beta 3}/\tau_s^2 - 1) >$$

где $\kappa = \delta/(\varepsilon\eta)$, η обозначает коэффициент вязкости. Здесь квадратные скобки обозначают скачок величины f на межслойной границе, $\langle F(y) \rangle = F(y)H(y)$ – нелинейная функция, отличная от нуля за пределом текучести τ_s , $H(y)$ – функция Хэвисайда, $H(y) = 0$ при $y < 0$, $H(y) = 1$ при $y \geq 0$. Нелинейное условие вязкопластического скольжения переходит в линейное условие вязкого скольжения, если заменить $\langle F(\dots) \rangle$ на единицу. Греческие индексы β, γ принимают значения 1 и 2, латинские индексы – значения 1,2,3, u_k – компоненты вектора смещений, $u_{k,t}$ – компоненты вектора скорости, $\sigma_{i,j}$ – компоненты тензора напряжений.

Для компактности формул дифференцирование обозначено следующим образом:

$$\partial(\dots)/\partial x_j = (\dots)_{,j}, \quad \partial(\dots)/\partial t = (\dots)_{,t}, \quad \partial(\dots)/\partial \xi = (\dots)_{,\xi}$$

Сами слои считаются изотропными линейно-упругими (при $x_3 \neq x^{(s)}$):

$$\sigma_{ij,j} - \rho u_{i,tt} = 0, \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}u_{k,l}$$

где ρ – плотность, тензор модулей упругости имеет вид:

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

Будем считать, что искомые функции $u_k = u_k(x_l, \xi, t)$ являются гладкими по медленным переменным x_l и гладкими по быстрой переменной $\xi = x_3/\varepsilon$, за исключением точек $\xi^{(s)} = x^{(s)}/\varepsilon$, где они могут терпеть разрывы первого рода. Смещения среды представим в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра ε :

$$u_i = w_i(x_k, t) + \varepsilon u_i^{(1)}(x_k, \xi, t) + \varepsilon^2 u_i^{(2)}(x_k, \xi, t) + \varepsilon^3 u_i^{(3)}(x_k, \xi, t) + \dots$$

Разложению компонент смещений соответствует разложение компонент тензора напряжений:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \varepsilon\sigma_{ij}^{(1)} + \varepsilon^2\sigma_{ij}^{(2)} + \dots$$

где

$$\sigma_{ij}^{(n)} = C_{ijkl}u_{k,l}^{(n)} + C_{ijk3}u_{k,\xi}^{(n+1)}$$

Процедура получения асимптотической системы уравнений в случае линейных условий для скачков касательных смещений (скольжений) на межслойных границах описана в [2].

Аналогично, уточненная теория второго порядка получается, если в асимптотической системе уравнений удержат член порядка ε^2 и применить операцию осреднения по ячейке периодичности.

С использованием этого метода осреднения была получена уточненная система уравнений с контактными условиями выбранного типа:

$$\begin{aligned}\rho v_{\gamma,t} &= s_{\gamma j,j} + \varepsilon^2 \mu \Omega_{\gamma,3} \\ \rho v_{3,t} &= s_{3j,j} + \varepsilon^2 \mu \Omega_{\beta,\beta} \\ \tau_{ij,t} &= \lambda \delta_{ij} v_{k,k} + \mu (v_{i,j} + v_{j,i}) \\ \varphi_{\gamma,t} &= -\kappa s_{\gamma 3} < F(\Delta) > \\ \Omega_{\gamma,t} &= -\kappa \mu \left((g_{\gamma} + \Omega_{\gamma}) < F(\Delta) > + 2s_{\gamma 3} s_{\beta 3} (g_{\beta} + \Omega_{\beta}) < F'(\Delta) > / \tau_s^2 \right) \\ s_{ij} &= \tau_{ij} + \mu (\varphi_i \delta_{j3} + \varphi_j \delta_{i3}) \\ \Delta &= s_{\beta 3} s_{\beta 3} / \tau_s^2 - 1 \\ g_{\gamma} &= (\rho \varphi_{\gamma,tt} / \mu - \varphi_{\gamma,\beta\beta} - (3\lambda + 2\mu) \varphi_{\beta,\beta\gamma} / (\lambda + 2\mu)) / 12\end{aligned}$$

В этой нестационарной системе введены обозначения $s_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)}$, $v_k = w_{k,t}$. Для дополнительных функций φ_{γ} и Ω_{γ} , имеющих смысл распределенных скольжений первого и третьего порядков по ε , получены нелинейные дифференциальные уравнения.

II Одномерная нестационарная система уравнений

Сформулируем одномерную нестационарную систему уравнений для описания поперечных нестационарных возмущений, параллельных направлению слоев.

Введем обозначения для независимых переменных и искомым функций для данного типа возмущений: $z = x_3$, $\tau = s_{13}$, $u = v_1$, $\varphi = \varphi_1$, $\Omega = \Omega_1$, $g = g_1$.

Система уравнений в этом случае примет вид:

$$\begin{aligned}\rho u_{,t} &= \tau_{,z} + \varepsilon^2 \mu \Omega_{,z}, \quad \tau_{,t} = \mu u_{,z} + \mu \varphi_{,t} \\ \varphi_{,t} &= -(\tau/t_0) < F(\Delta) > / \mu \\ \Omega_{,t} &= -(g + \Omega) < F(\Delta) > + 2(\tau^2 / \tau_s^2) < F'_{\Delta}(\Delta) > / t_0 \\ g &= c_g \varphi_{,tt}, \quad c_g = \rho / \mu / 12, \quad \Delta = \tau^2 / \tau_s^2 - 1, \quad t_0 = 1 / (\kappa \mu)\end{aligned}$$

Здесь также введен параметр t_0 , который представляет собой характерное время релаксации касательных напряжений на предел текучести τ_s .

Для функции $F(\Delta)$ часто принимают степенную аппроксимацию:

$$F(\Delta) = \Delta^{1+q}, \quad q > 0$$

С учетом этой аппроксимации нелинейные уравнения для τ , φ и Ω примут вид:

$$\begin{aligned} \tau_{,t} &= \mu u_{,z} - (\tau/t_0) < \Delta^{1+q} > \\ \varphi_{,t} &= -(\tau/t_0) < \Delta^{1+q} > / \mu \\ \Omega_{,t} &= -(g + \Omega) ((3 + 2q)\tau^2/\tau_s^2 - 1) < \Delta^q > / t_0 \end{aligned}$$

III Численная схема решения

Для численного решения динамических задач о распространении возмущений в слоистой среде построим разностную схему для нелинейной (полулинейной) одномерной нестационарной системы с учетом малой величины реального времени релаксации .

Стандартные явные разностные схемы в этом случае будут неустойчивыми, поскольку шаг по времени Δt будет превышать значение t_0 , $\Delta t > t_0$.

Схема построения численного метода такова. Вначале аппроксимируем по какой-либо известной явной схеме уравнение движения для скорости u , опустив в нем член $\varepsilon^2 \mu \Omega_{,z}$ (метод расщепления). Используя найденные значения u^{n+1} на верхнем временном слое, аппроксимируем по неявной разностной схеме уравнения для τ , φ и Ω , содержащие малый параметр в знаменателе нелинейных свободных членов [3]. Здесь и далее используем обозначение с верхними индексами $n + 1$ и n для величин на верхнем и нижнем слое по времени для разностной временной аппроксимации с шагом Δt .

Полученные нелинейные разностные уравнения можно решить аналитически методом возмущений с учетом наличия малого параметра в системе уравнений и найти значения функций τ^{n+1} , φ^{n+1} и Ω^{n+1} на верхнем временном слое. Используя найденные значения Ω^{n+1} проведем расчет полного уравнения для скорости с учетом члена $\varepsilon^2 \mu \Omega_{,z}$.

Опишем реализацию этой численной методики на примере простых и наглядных аппроксимаций 1-го порядка.

Нелинейное разностное уравнение для касательного напряжения на верхнем слое по времени имеет вид:

$$\tau^{n+1} = \tau_e^{n+1} - \tau^{n+1} < (\tau^{n+1}/\tau_s)^2 - 1 >^{1+q} / \gamma$$

где малый параметр γ равен $\gamma = t_0/\Delta t \ll 1$, а $\tau_e^{n+1} = \tau^n + \mu u_{,z}^{n+1} \Delta t$ – значение касательного напряжения на верхнем слое после упругого шага по

времени. Отметим, что для расчета упругого шага можно выбрать иную, более точную схему, т.к. выбор хорошо зарекомендовавших себя схем велик [4, 5]. При расчете пространственных задач со сложной геометрией и неравномерными, неструктурированными сетками для расчета упругого шага могут быть применены конечно-объемные или конечно-элементные методы [3, 4, 5].

Будем искать решение уравнения для τ^{n+1} в виде разложения по степеням малого параметра γ [6], ограничиваясь одним членом (степенной показатель ν и коэффициент T подлежат определению):

$$\tau^{n+1} = \tau_s (1 + \gamma^\nu T + o(\gamma^\nu)) \operatorname{sign} \tau_e^{n+1}$$

Решение для τ^{n+1} (корректировочная формула) с выбранной точностью будет иметь вид:

$$\tau^{n+1} = \tau_s \left(1 + \gamma^{1/(1+q)} (|\tau_e^{n+1}/\tau_s| - 1)^{1/(1+q)} / 2 \right) \operatorname{sign} \tau_e^{n+1}$$

при $|\tau_e^{n+1}/\tau_s| - 1 \geq 0$ и

$$\tau^{n+1} = \tau_e^{n+1}$$

при $|\tau_e^{n+1}/\tau_s| - 1 < 0$.

Нелинейное разностное уравнение для распределенных скольжений 1-го порядка на верхнем слое по времени имеет вид:

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n - (\tau^{n+1}/\mu) < (\tau^{n+1}/\tau_s)^2 - 1 >^{1+q}/\gamma$$

Его решение с выбранной точностью имеет вид:

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n - (\tau_s/\mu) F_e \left(1 + \gamma^{1/(1+q)} (|\tau_e^{n+1}/\tau_s| - 1)^{1/(1+q)} / 2 \right) \operatorname{sign} \tau_e^{n+1}$$

где $F_e = < |\tau_e^{n+1}/\tau_s| - 1 >$. В пределе при $\gamma \rightarrow 0$ получим компактную расчетную формулу:

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n - (\tau_s/\mu) < |\tau_e^{n+1}/\tau_s| - 1 > \operatorname{sign} \tau_e^{n+1}$$

Нелинейное разностное уравнение для распределенных скольжений 3-го порядка на верхнем слое по времени имеет вид:

$$\Omega^{n+1} = \Omega^n - (g^{n+1} + \Omega^{n+1}) \left((3 + 2q)(\tau^{n+1}/\tau_s)^2 - 1 \right) < (\tau^{n+1}/\tau_s)^2 - 1 >^q / \gamma$$

Отсюда следует

$$\Omega^{n+1} = (\gamma^{1/(1+q)} \Omega^n - g^{n+1} Q^{n+1}) / (\gamma^{1/(1+q)} + Q^{n+1})$$

где

$$Q^{n+1} = \left((3 + 2q)(1 + \gamma^{1/(1+q)} (|\tau_e^{n+1}/\tau_s| - 1)^{1/(1+q)} - 1) < |\tau_e^{n+1}/\tau_s| - 1 >^q / (1+q) \right)$$

$$g^{n+1} = -c_g(\tau_s/\mu) (G^{m+1} - G^m) / \Delta t^2$$

$$G^m = \langle |\tau_e^n / \tau_s| - 1 \rangle \left(1 + \gamma^{1/(1+q)} (|\tau_e^n / \tau_s| - 1)^{1/(1+q)} / 2 \right) \text{sign} \tau_e^n$$

В пределе $\gamma \rightarrow 0$ получим менее громоздкую расчетную формулу:

$$\Omega^{n+1} = c_g(\tau_s/\mu) \left(\langle |\tau_e^{n+1} / \tau_s| - 1 \rangle \text{sign} \tau_e^{n+1} - \langle |\tau_e^n / \tau_s| - 1 \rangle \text{sign} \tau_e^n \right) / \Delta t^2$$

Найденные значения Ω^{n+1} используются для вычислений новых значений скорости с учетом члена $\varepsilon^2 \mu \Omega_{,z}$.

IV Примеры расчета нестационарной системы уравнений

Полученная модель была использована для исследования волновых процессов в геологических массивах с флюидосодержащей слоистой структурой и динамического деформирования некоторых классов композитов.

Численное решение полученной системы уравнений строилось по вышеописанной явно-неявной схеме, с учетом малых параметров вязкости при временных производных функций φ и Ω . Пример численного решения задачи прохождения поперечной волны (пунктир) через слоистый пакет $0.5 < x_3 < 0.7$ с вязкопластическими прослойками, расположенный в упругой среде, показан на Рис. 1.

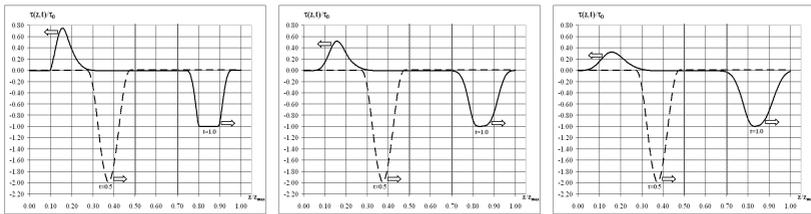


Рис. 1. Формы падающей, прошедшей через слоистый пакет и отраженной от него волн в зависимости от параметра $\varepsilon = 0.0, 0.05, 0.1$

Показана начальная форма импульса касательного напряжения (пунктиром) в упругом массиве перед его прохождением слоистого пакета, выделенного двумя вертикальными линиями, и направление движения импульса (стрелкой). Справа от слоистого пакета показан прошедший через него импульс, а самый левый импульс на Рис. 1 – (а), (б), (в) представляет собой отраженную волну. Из приведенных графиков видно, что учет членов порядка ε^2 в определяющих уравнениях модели приводит к достаточно существенно изменению амплитуд и профилей волн в процессе их прохождения через слоистый флюидосодержащий пакет.

Заключение

Методом асимптотического осреднения построена уточненная модель слоистой среды с нелинейными вязкопластическими условиями проскальзывания на межслойных границах. В уравнениях модели учтены члены вплоть до 2-го порядка по параметру толщины слоя. Предложена численная разностная схема для решения полученной нелинейной системы уравнений, основанная на явной аппроксимации уравнений движения и неявной аппроксимации остальных уравнений, содержащих малый параметр в знаменателях свободных нелинейных членов. Нелинейные неявные разностные уравнения решены аналитически с использованием метода разложения по малому параметру. Схема работает для широкого класса нелинейных функций, описывающих вязкопластическое скольжение на межслойных границах. Приведен пример численного расчета прохождения поперечной упругой волны через слоистый пакет, обладающий эффективными вязкопластическими свойствами. Подобные модели могут быть полезными при решении динамических задач сейсморазведки и интерпретации волновых картин, полученных в процессе ее проведения.

Литература

1. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. Москва: Наука, 1984. 352 с.
2. *Бураго Н.Г., Никитин И.С.* Уточненная модель слоистой среды с проскальзыванием на контактных границах // ПММ. 2016. Т. 80. № 2. С. 230–241.
3. *Никитин И.С.* Динамические модели слоистых и блочных сред с проскальзыванием, трением и отслоением // Известия РАН. МТТ. 2008. № 4. С. 154–165.
4. *Бураго Н.Г., Никитин И.С., Якушев В.Л.* Гибридный численный метод решения нестационарных задач механики сплошной среды с применением адаптивных наложенных сеток // ЖВММФ. 2016. Т. 56. № 6. С. 1082–1092.
5. *Кукуджанов В.Н.* Вычислительная механика сплошных сред. Москва: Физматлит. 2008. 320 с.
6. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. Москва: Мир. 1984. 535 с.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ РАСЧЕТА ПРЕССОВАНИЯ И СПЕКАНИЯ ПОРОШКОВЫХ МАТЕРИАЛОВ¹

Бураго Н.Г. *, Никитин И.С. **,***

* *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*

** *Институт автоматизации проектирования РАН, Москва*

*** *МАИ – Национальный Исследовательский Университет, Москва*

Введение

В настоящей работе предложена модель прессования и спекания порошковых композитов как вариант теории упругопластического течения пористой среды. Представлен пример конечно-элементного расчета неоднородных процессов прессования и спекания.

Интенсивные теоретические исследования процессов спекания развернулись, начиная с 20-го века, в связи с широким внедрением новых порошковых композитов в технике. Подробный обзор истории исследований можно найти, например, в книге [1].

Для предсказания результатов спекания реальных изделий в условиях сложной геометрии и неоднородных состояний требуется численное моделирование на основе описания процессов в рамках механики сплошной среды. Для формулировки начально-краевых задач континуальной механики прежде всего необходимы определяющие соотношения, описывающие термомеханическое состояние материала прессовки при прессовании и спекании.

Процесс спекания наблюдается в двухкомпонентных порошковых композитных материалах пористых заготовок будущего изделия (прессовок), полученных уплотнением порошка давлением в пресс-формах. Исходно материал прессовок представляет собой смесь легкоплавких частиц, образующих матрицу композита, и тугоплавких, более прочных частиц твердой фазы. Объем пор между частицами заполнен воздухом. Если температура достаточна для плавления материала матрицы и имеет место смачивание частиц твердой фазы материалом матрицы, то поровые капиллярные силы поверхностного натяжения суммарно действуют как всестороннее сжимающее напряжение большой интенсивности, сравнимое по порядку величины с модулями упругости материалов композита. Эта, не обусловленная деформацией, нагрузка называется напряжением спекания и обеспечивает закрытие пор в процессе спекания.

¹Работа выполнена по Программе Президиума РАН

Прессование, то есть приложение давления, обусловленного контактом со стенками пресс-формы, также приводит к уплотнению материала, но такое уплотнение выражено гораздо слабее, поскольку внешнее контактное давление значительно уступает по интенсивности напряжению спекания.

Таким образом, композит подвергается последовательно прессованию и спеканию. Спекание реализуется при условии интенсивного нагрева, достаточного для плавления легкоплавкого материала матрицы, заполняющего пространство между частицами тугоплавкой фазы. Процесс жидкостного спекания прекращается или при исчезновении пор, или из-за отвердения материала матрицы.

В настоящей работе к расчету прессования и спекания применена модификация теории упругопластического течения [2]. В систему уравнений обычной теории добавлено кинетическое уравнение для расчета эволюции пористости при нетермомеханическом воздействии всесторонним сжимающим напряжением спекания, а свойства упругости зависят от величины пористости. Отличие от моделей вязкого течения состоит в том, что напряжения в прессовке обусловлены именно упругой частью деформации, ограничены условием пластичности и никак не связаны со скоростью деформации.

Модификация обычной теории упругопластического течения без больших усилий может быть внедрена в программах расчета упругопластических сред для адаптации к процессам спекания [3].

На модельных примерах численно продемонстрирована способность модифицированной теории упругопластического течения воспроизводить основные эффекты процессов прессования и спекания, включая определение остаточных пористости, напряжений и деформаций в прессовке, а также ее остаточной формы.

I Вывод определяющих соотношений для расчета процессов спекания

Набор термодинамических параметров состояния упругопластической пористой разрушающейся среды обычно содержит температуру T , деформацию ε , скорость деформации \mathbf{e} , пластическую деформацию ε_p , поврежденность θ и пористость ω . В этом случае свободную энергию φ и скорость диссипации энергии D в единице массы можно записать следующим образом

$$\varphi = \frac{K}{2\rho_p} \left(\ln \frac{\rho}{\rho_p} + \beta(T - T_0) \right)^2 + h_1 \frac{\mu}{\rho} (\varepsilon' - \varepsilon'_p)^2 : \mathbf{I} + H(T - T_\omega) \varphi_\omega(T - T_\omega, \omega)$$

$$D = H(\Phi_p) k_y f_p + \frac{k_T}{T} \nabla T \cdot \nabla T + H(\Phi_\theta) k_\theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + H(\Phi_\omega) k_\omega \left(\frac{d\omega}{dt} \right)^2$$

здесь K и μ модули упругости всестороннего растяжения-сжатия и сдвига, соответственно; ρ и ρ_p – плотности текущего и разгруженного состояний, соответственно; β – коэффициент температурного растяжения-сжатия, \mathbf{I} – тензорная единица, двоеточие обозначает двойное скалярное произведение, $h_1 = (1 - 2/3(\varepsilon : \mathbf{I}))^{-1}$; T_ω – температура плавления легкоплавкой составляющей, $H()$ обозначает функцию Хевисайда, равную единице для неотрицательных значений аргумента и нулю в противном случае. Функции параметров состояния выражают: $\Phi_p = 0$ – условие пластичности, Φ_θ – условие разрушения, Φ_ω – условие жидкостного спекания. Функциями параметров состояния также являются: функция k_y – радиус поверхности текучести, f_p – функция девиатора скорости пластической деформации, определяющая кинетику пластических деформаций изменения формы (упруго-пластичность, упруго-вязко-пластичность), k_T – коэффициент теплопроводности, функции k_θ и k_ω – определяют кинетику поврежденности и пористости, соответственно. В формулах (1)-(2) использованы пространственные тензоры напряженно-деформированного состояния, ∇ – оператор пространственного дифференцирования.

Выражения для свободной энергии и скорости диссипации максимально упрощены. Первое и второе слагаемые в выражении свободной энергии выражают упругую энергию объемных и сдвиговых упругих деформаций, причем только объемные деформации считаются большими, а девиатор упругих деформаций считается малым. Выражение энергии объемных деформаций является обычным, оно учитывает температурные деформации всестороннего расширения-сжатия (с коэффициентом β). Множитель h_1 во втором слагаемом приводит к упрощенной связи девиаторов напряжений и упругих деформаций, характерной для малых деформаций. Третье слагаемое выражает свободную энергию активных пор, которая зависит от пористости и температуры, причем включается только при достижении температуры плавления материала матрицы. Этот член отвечает за выражение для напряжения спекания.

Из выражений (1)-(2) и законов термодинамики выводятся следующие определяющие соотношения [2]:

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \sigma', \quad \sigma' = 2\mu(\varepsilon' - \varepsilon_p'), \quad p = K \frac{\rho}{\rho_p} \left(\ln \frac{\rho}{\rho_p} + \beta(T - T_0) \right)$$

$$d\varepsilon_p'/dt = H(\sigma' : \sigma' - k_p^2) \lambda_p \sigma', \quad d\rho_p/dt = -\frac{\rho_p}{1 - \omega} \frac{d\omega}{dt}$$

$$d\theta/dt = -H(\Phi_\theta) k_\theta^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \quad d\omega/dt = -H(\omega) k_\omega^{-1} (p + \sigma_\omega)$$

$$\sigma_\omega = \rho \frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega} (1 - \omega), \quad \mathbf{q} = k_T \nabla T$$

Дополняя эти соотношения законами сохранения массы, импульса и энергии

$$d\rho/dt = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}$$

$$\rho d\mathbf{v}/dt = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

$$\rho c_V dT/dt = \boldsymbol{\sigma} : \nabla \otimes \mathbf{v} + \nabla \cdot \mathbf{q} + r$$

а также кинематическими соотношениями

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{v}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^0$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \nabla - (\nabla \otimes \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{u} \otimes \nabla))/2$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \boldsymbol{\varepsilon} - (\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{I})\mathbf{I}/3$$

получаем полную систему 15 уравнений относительно 15 искомым функций:

$$\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}', \omega, \rho, \rho_p, T, \mathbf{q}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}', p, \theta$$

среди которых можно выделить основные, для которых уравнения являются эволюционными

$$Y = (\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\varepsilon}', \omega, \rho, \rho_p, \theta, T)$$

Начальные условия имеют вид:

$$t = 0, \mathbf{x} \in V : Y = Y^0(\mathbf{x})$$

где V пространственная область решения с границей области S .

Граничные условия имеют вид:

$$t \geq 0, \mathbf{x} \in S_v \subseteq S : \mathbf{v} = \mathbf{v}_*(\mathbf{x}, t)$$

$$t \geq 0, \mathbf{x} \in S \setminus S_v : \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}_*(\mathbf{x}, t)$$

$$t \geq 0, \mathbf{x} \in S_T \subseteq S : T = T_*(\mathbf{x}, t)$$

$$t \geq 0, \mathbf{x} \in S \setminus S_T : \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = Q_*(\mathbf{x}, t)$$

где \mathbf{n} - единичная внешняя нормаль к границе, а правые части граничных условий являются заданными функциями.

II Пример расчета прессования и спекания в неоднородном состоянии

Рассмотрим пример расчета двумерных процессов прессования и спекания для случая неоднородного термомеханического состояния безматричным вариантом метода конечных элементов [3]. Расчетная схема и начальная сетка показаны на Рис. 1. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ в печь помещен цилиндрическая заготовка квадратного сечения, полученная прессованием композитного порошка и имеющая равномерно распределенную

начальную пористость $\omega = 0.5$. Пусть левая граница является осью симметрии, правая и нижняя границы неподвижны, а на части верхней границы в течение времени $[0, t_1]$ действует внешнее давление $p(t)$, которая реализует процесс холодного прессования. Затем в течение времени $[t_1, t_2]$ нагрузка не действует и образец разгружается. В классической теории пластичности, при снятии нагрузки материал мгновенно разгружается и сохраняет свое напряженно-деформированное состояние неизменным.

В применяемой модифицированной теории закон сжимаемости описывает вязкое поведение композита, поэтому релаксация напряжений происходит постепенно. Материал пористый и обладает свойством необратимой объемной сжимаемости, кинетическое уравнение для пористости связано непосредственно с уравнением для объемной пластической деформации и описывает объемную ползучесть. Причем необратимые изменения пористости и одновременно необратимый рост объемной пластической деформации обусловлен двумя основными причинами: давлением (холодное прессование) и действием капиллярных сил на поверхности пор при расплавлении материала матрицы.

В период времени $[t_2, t_3]$ образец находится в печи и спекается. Приняты следующие значения времени для расчета $t_1 = 50$, $t_2 = 60$, $t_3 = 180$. За единицу безразмерного времени принято время пробега упругой продольной волны единицы расстояния. Длина стороны квадратного образца была равна 10. Теплопередача в данном расчете не рассматривалась и спекание обеспечивалось предопределенным однородным нагревом. Следующее соотношение использовано для напряжения спекания:

$$s_0 = s^* \omega (\omega_{max} - \omega)$$

где $\omega_{max} = 0.5$. История внешнего давления и коэффициента s^* показана на Рис. 1. свойства материала принимались такими

$$K = 975 / (1 - \omega), \quad \mu = 369 / (1 - \omega), \quad k_y = 1, \quad c = 1$$

$$k_\omega = 0.1, \quad k_\theta = 0$$

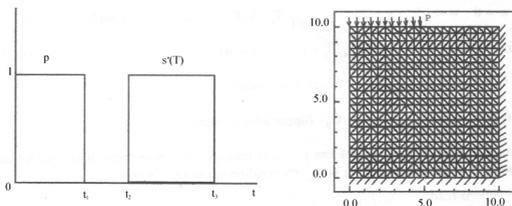


Рис. 1. Неоднородный процесс прессования и спекания. История внешних воздействий и расчетная сетка

На Рис. 2 показана рассчитанная история пористости, граничной скорости и давления для лагранжева приграничного узла $x = 0, y = 10$. Ясно виден различный характер уплотнения материала при холодном прессовании и спекании. Спекание справляется с уплотнением значительно эффективнее. Интересно проследить за направлением движения прессуемого и спекаемого материала (Рис. 3). Показаны поля скорости для четырех последовательных моментов времени : $t = 2, 50, 60, 61$.

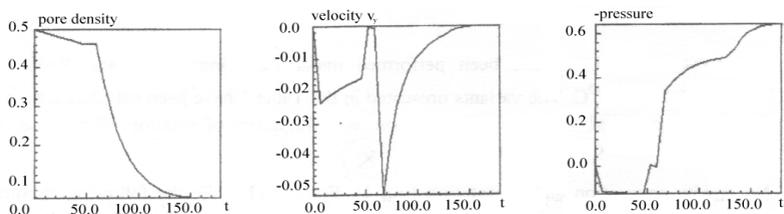


Рис. 2. История пористости, граничной скорости и давления

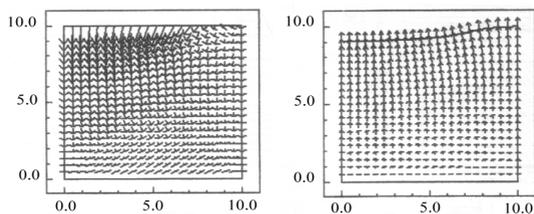


Рис. 3. поле скоростей для $t = 2$ и $t = 50$

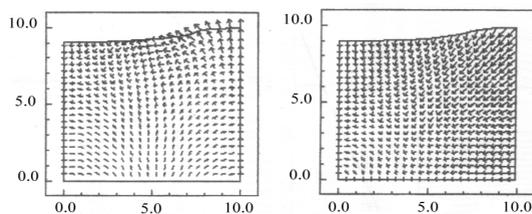


Рис. 4. поле скоростей для $t = 60$ и $t = 61$

Эволюция пористости в процессе спекания и изменение формы спекаемого композита можно видеть на Рис. 5 и 6, где показаны изолинии давления, пористости и пластической работы для двух состояний материала после прессования и после спекания.

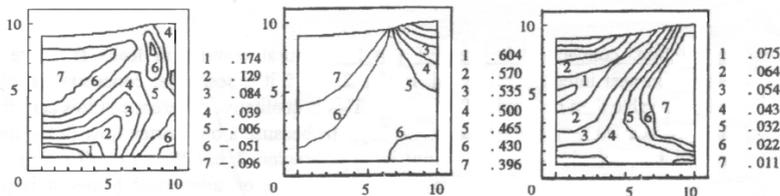


Рис. 5. Изолинии давления, пористости и пластической работы после прессования

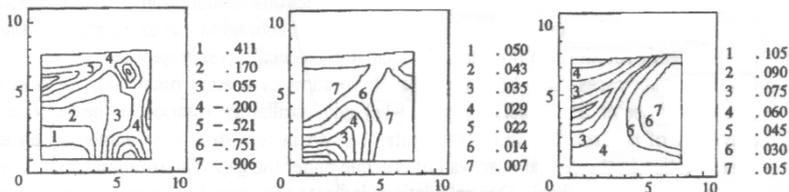


Рис. 6. Изолинии давления, пористости и пластической работы после спекания

Выводы. Предложена модель прессования и спекания порошковых композитов как вариант теории упругопластического течения пористой среды. Представлен пример конечно-элементного расчета неоднородных процессов прессования и спекания.

Литература

1. German R.M. Sintering Theory and Practice. Wiley. 1996. 568 p.
2. Бураго Н.Г., Глушко А.И., Ковшов А.Н. Термодинамический метод получения определяющих уравнений для моделей сплошных сред // Изв. РАН, МТТ, 2000, N 6, С. 4–15.
3. Бураго Н.Г., Никитин И.С., Якушев В.Л. Гибридный численный метод решения нестационарных задач механики сплошной среды с применением адаптивных наложенных сеток // ЖВММФ. 2016. Т. 56. N 6. С. 1082–1092.

ОЦЕНКА ДОЛГОВЕЧНОСТИ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМОВ УСТАЛОСТНОГО РАЗРУШЕНИЯ С ОПРЕДЕЛЕНИЕМ КРИТИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ ¹

Бураго Н.Г.* , Никитин А.Д.**,** , Никитин И.С.**,** , Якушев В.Л.**

* *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлунского РАН, Москва*

** *Институт автоматизации проектирования РАН, Москва*

*** *МАИ – Национальный Исследовательский Университет, Москва*

Введение

В настоящее время установлено, что относительно небольшие циклические напряжения (меньшие классического предела усталости материала), действующие с высокой частотой (порядка 1 кГц и выше) могут приводить к разрушению конструкций [1]. Высокочастотное нагружение приводит к значительным наработкам ($N \approx 10^9 - 10^{10}$) циклов) за время расчетного срока службы изделия. Указанный диапазон долговечностей $N > 10^8$ известен в литературе как сверхмногоцикловая усталость (СВМУ).

В последние годы разработаны и реализованы методики СВМУ испытаний для весьма ограниченного набора циклических нагружений, в первую очередь для реверсивного и пульсирующего растяжения-сжатия, а также кручения образцов. Однако для оценок долговечности различных элементов конструкций, подверженных высокочастотным длительным воздействиям в условиях сложного нагружения, необходимы критерии многоосного СВМУ разрушения. В данной работе предлагается простая и естественная форма такого рода критериев, основанная на обобщении известных многоосных моделей для классических усталостных режимов. Ранее в [2] была предложена процедура определения параметров классических многоосных критериев Сайнса и Кроссланда в диапазоне малоцикловой и многоцикловой усталости (МЦУ и МНЦУ) по результатам одноосных испытаний с двумя разными коэффициентами асимметрии цикла (левая ветвь бимодальной одноосной усталостной кривой, Рис.1).

¹Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ проект № 15-08-02392-а

I Обобщение многоосного критерия усталостного разрушения в режиме СВМУ

Современные подходы к построению многоосных критериев усталостного разрушения часто используют понятие критической плоскости. Первый критерий с определением критической плоскости был предложен Финдли [3]. Согласно этому критерию разрушение в циклическом процессе нагружения происходит по плоскости с нормалью \mathbf{n} с компонентами n_k (критической плоскости) при выполнении условия:

$$(\Delta\tau_n/2 + \alpha_F\sigma_n)_{MAX_n} = S_F + A_F N^{\beta_F}, \quad \sigma_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}, \quad \tau_n = |\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}|$$

где $\beta_F < 0$, α_F , S_F , A_F – параметры, определяемые по данным эксперимента, N – число циклов до разрушения, $\Delta\tau_n$ – размах касательного напряжения в цикле, σ_n – нормальное напряжение на критической плоскости.

В главных осях тензора напряжений можно получить формулы:

$$\Delta\tau_n = \sqrt{(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_2)^2 n_1^2 n_2^2 + (\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)^2 n_1^2 n_3^2 + (\Delta\sigma_2 - \Delta\sigma_3)^2 n_2^2 n_3^2}$$

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$$

Для одноосного нагружения с коэффициентом асимметрии цикла критерий будет выглядеть так:

$$\sigma_{\max}(\alpha_F + \sqrt{(1-R)^2 + 4\alpha_F^2}/2)/2 = S_F + A_F N^{\beta_F}$$

при

$$n_1 = 1/2 + \alpha_F/\sqrt{(1-R)^2 + 4\alpha_F^2}$$

Сравнивая с представлением Баскина одноосной усталостной кривой

$$\sigma_{\max}(1-R)/2 = \sigma_R + \sigma_{CR} N^{\beta_F}$$

и имея данные испытаний при $R = -1$ и R_0 , получаем:

$$S_F = \sigma_{-1}(\alpha_F + \sqrt{1 + \alpha_F^2})/2, \quad A_F = (\sigma_B - \sigma_{-1})(\alpha_F + \sqrt{1 + \alpha_F^2})10^{-3\beta_F}/2$$

$$\alpha_F = \left(\sqrt{(2\kappa/(1-R_0) - 1)^2 + \kappa^2 - 1 - 2\kappa/(1-R_0) + \kappa^2} \right) / (4\kappa/(1-R_0) - \kappa^2)$$

где σ_{-1} и σ_{R_0} обозначают классические пределы усталости по усталостным кривым при коэффициентах асимметрии цикла -1 и R_0 соответственно, σ_B обозначает статический предел прочности, $\kappa = \sigma_{-1}/\sigma_{R_0}$.

Анализ критерия Финдли для реверсного режима чистого кручения дает формулы:

$$\tau_{-1} = \sigma_{-1}(1 + \alpha_F/\sqrt{1 + \alpha_F^2})/2, \quad \tau_c = (\sigma_B - \sigma_{-1})(1 + \alpha_F/\sqrt{1 + \alpha_F^2})10^{-3\beta_F}/2$$

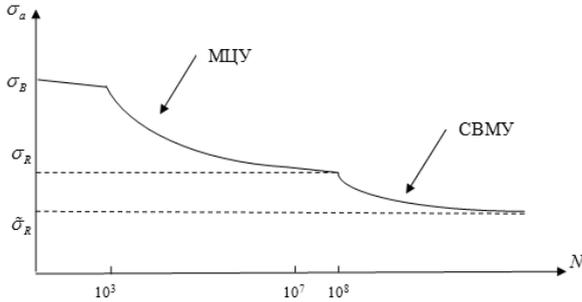


Рис. 1. Бимодальная усталостная кривая для режимов МЦУ и СВМУ

Рассмотрим схему обобщения многоосного критерия разрушения на режим СВМУ (см. Рис. 1, правая ветвь одноосной бимодальной усталостной кривой при $N > 10^8$).

В основе обобщенного многоосного критерия типа Финдли лежит подобие поведения левой и правой ветвей бимодальной усталостной кривой. Это обобщение заключается в замене параметров левой ветви бимодальной усталостной кривой на параметры правой ветви: $\sigma_B \rightarrow \sigma_{-1}$, $\sigma_{-1} \rightarrow \tilde{\sigma}_{-1}$, $\sigma_R \rightarrow \tilde{\sigma}_R$, $3\beta_F \rightarrow 8\tilde{\beta}_F$, где $\tilde{\sigma}_{-1}$ и $\tilde{\sigma}_R$ это "новые" пределы усталости на правой ветви усталостной кривой для коэффициентов асимметрии -1 и R_0 .

Для режима СВМУ имеем (все параметры отмечены знаком $\tilde{}$):

$$\tilde{S}_F = \frac{\tilde{\sigma}_{-1}}{2}(\tilde{\alpha}_F + \sqrt{1 + \tilde{\alpha}_F^2}), \quad \tilde{A}_F = \frac{\sigma_{-1} - \tilde{\sigma}_{-1}}{2}(\tilde{\alpha}_F + \sqrt{1 + \tilde{\alpha}_F^2})10^{-8\tilde{\beta}_F}$$

$$\tilde{\alpha}_F = \left(\sqrt{\left(\frac{2\tilde{\kappa}}{1 - R_0} - 1 \right)^2 + \tilde{\kappa}^2} - 1 - \frac{2\tilde{\kappa}}{1 - R_0} + \tilde{\kappa}^2 \right) / \left(\frac{4\tilde{\kappa}}{1 - R_0} - \tilde{\kappa}^2 \right)$$

Здесь $\tilde{\kappa} = \frac{\tilde{\sigma}_{-1}}{\tilde{\sigma}_{R_0}}$.

Для реверсного режима чистого кручения $\tilde{\tau}_a = \tilde{\tau}_{-1} + \tilde{\tau}_C N^{\tilde{\beta}_F}$ получаем:

$$\tilde{\tau}_{-1} = \frac{\tilde{\sigma}_{-1}}{2}(1 + \tilde{\alpha}_F/\sqrt{1 + \tilde{\alpha}_F^2}), \quad \tilde{\tau}_c = \frac{\sigma_{-1} - \tilde{\sigma}_{-1}}{2}(1 + \tilde{\alpha}_F/\sqrt{1 + \tilde{\alpha}_F^2})10^{-8\tilde{\beta}_F}$$

Были определены параметры обобщенного критерия СВМУ разрушения по результатам испытаний титановых образцов: $\sigma_B = 1100 \text{ MPa}$, $\sigma_{-1} = 400 \text{ MPa}$, $\tilde{\sigma}_{-1} = 365 \text{ MPa}$, $\tilde{\sigma}_{0.1} = 215 \text{ MPa}$, $\tilde{\beta} = -0.24$ (Рис. 2-а). Полученные значения параметров были использованы для расчетной оценки долговечности образцов при СВМУ испытаниях на реверсное кручение. Сравнение показало близость расчетных и экспериментальных результатов (Рис. 2-б). Тем самым подтверждена возможность использования обобщенного критерия многоосного усталостного разрушения в режиме СВМУ и

предложенной схемы определения его параметров для приближенной оценки долговечности элементов конструкций.

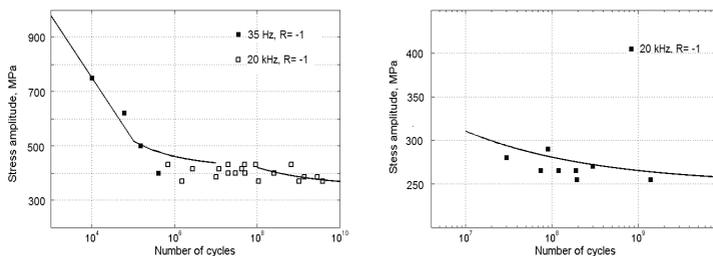


Рис. 2. СВМУ экспериментальные данные для сплава ВТЗ-1 для растяжения-сжатия (слева) и для кручения (справа)

II Определение критической плоскости для многоосного напряженного состояния

Расчет усталостной долговечности по критерию Финдли требует определения ориентации плоскости, проходящей через заданную материальную точку, на которой достигается максимальное выражение функции Финдли. Для многоосного напряженного состояния это не простая задача, которая, как правило, решается численно. Построим ее аналитическое решение.

Рассмотрим трехосное синфазное циклическое нагружение в системе координат, связанной с главными осями тензора напряжений. Предполагаем, что эти оси не меняются в течение цикла и выбраны так, что максимумы главных напряжений удовлетворяют неравенствам $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Введем следующие обозначения:

$$\Sigma_{12} = \sigma_1 - \sigma_2, \quad \Sigma_{13} = \sigma_1 - \sigma_3, \quad \Sigma_{23} = \sigma_2 - \sigma_3$$

$$\Delta\sigma_{12} = \Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_2, \quad \Delta\sigma_{13} = \Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3, \quad \Delta\sigma_{23} = \Delta\sigma_2 - \Delta\sigma_3$$

где $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, $\Delta\sigma_3$ обозначают размах главных напряжений в цикле.

Определим ориентацию критической плоскости с компонентами нормали:

$$x_1 = n_1^2 \geq 0, \quad x_2 = n_2^2 \geq 0, \quad x_3 = n_3^2 \geq 0, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

Можно показать, что задача определения критической плоскости для трехосного напряженного состояния сводится к определению максимума функции

$$F(x_2, x_3) = \sqrt{\Delta\sigma_{12}^2 x_2 + \Delta\sigma_{13}^2 x_3 - (\Delta\sigma_{12} x_2 + \Delta\sigma_{13} x_3)^2} +$$

$$+2\alpha_F\sigma_1 - 2\alpha_F(\Sigma_{12}x_2 + \Sigma_{13}x_3)$$

при ограничениях $0 \leq x_2 + x_3 \leq 1$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.

Приведем результаты решения этой задачи для всевозможных значений максимумов и размахов главных напряжений.

Случай I: $\Sigma_{12}/\Delta\sigma_{12} \neq \Sigma_{13}/\Delta\sigma_{13}$, $\Delta\sigma_{12} \neq 0$, $\Delta\sigma_{13} \neq 0$

Примем обозначения:

$$\beta_{12} = 4\alpha_F\Sigma_{12}/\Delta\sigma_{12}, \quad \beta_{13} = 4\alpha_F\Sigma_{13}/\Delta\sigma_{13}, \quad \Delta = 2(\beta_{13} - \beta_{12})$$

$$\Delta_S = \Delta\sigma_{12}\beta_{13} - \Delta\sigma_{13}\beta_{12}, \quad \Delta_T = 2(\Delta\sigma_{13} - \Delta\sigma_{12})$$

$$\Delta_2 = \Delta\sigma_{13}\Delta_S/\Delta - (\Delta_S^2 + \Delta_T^2)/\Delta^2, \quad \Delta_3 = (\Delta_S^2 + \Delta_T^2)/\Delta^2 - \Delta\sigma_{12}\Delta_S/\Delta$$

I-а. Для случая $\Delta\sigma_{12} \neq \Delta\sigma_{13}$ условия экстремума $F(x_2, x_3)$:

$$x_2 = \Delta_2/(\Delta\sigma_{12}\Delta\sigma_{23}), \quad x_3 = \Delta_3/(\Delta\sigma_{13}\Delta\sigma_{23})$$

I-б. Для случая $\Delta\sigma_{12} = \Delta\sigma_{13} \neq 0$ условия экстремума $F(x_2, x_3)$:

$$x_2 + x_3 = \Delta_S/(\Delta\sigma_{12}\Delta)$$

Случай II: $\Sigma_{12}/\Delta\sigma_{12} = \Sigma_{13}/\Delta\sigma_{13}$, при этом необходимо $\Delta\sigma_{12} = \Delta\sigma_{13} \neq 0$, $\Sigma_{12} = \Sigma_{13}$. Условия экстремума $F(x_2, x_3)$:

$$x_2 + x_3 = \left(1 - \beta_{12}/\sqrt{4 + \beta_{12}^2}\right)/2$$

Найденные значения x_2 , x_3 должны удовлетворять условиям $x_2 > 0$, $x_3 > 0$, $x_2 + x_3 < 1$ и условиям максимума $F(x_2, x_3)$:

$$\Delta\sigma_{12}^2 + 4\Delta\sigma_{13}\Delta\sigma_{23}x_3 > 0$$

$$\Delta\sigma_{13}^2 - 4\Delta\sigma_{12}\Delta\sigma_{23}x_2 > 0$$

Если таких значений не существует, то необходимо искать максимум $F(x_2, x_3)$ на границах: либо $x_2 = 0$, либо $x_3 = 0$, либо $x_2 + x_3 = 1$.

Случай III: В этом случае максимум $F(x_2, x_3)$ достигается при следующих значениях x_2 , x_3 :

$$x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{1}{2} \left(1 - \beta_{13}/\sqrt{4 + \beta_{13}^2}\right)$$

$$x_3 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \beta_{12}/\sqrt{4 + \beta_{12}^2}\right)$$

$$x_2 + x_3 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \beta_{23}/\sqrt{4 + \beta_{23}^2}\right), \quad x_3 = \frac{1}{2} \left(1 - \beta_{23}/\sqrt{4 + \beta_{23}^2}\right)$$

Из этих трех пар x_2 , x_3 выбираем ту, где функция $F(x_2, x_3)$ принимает наибольшее значение.

Таким образом, для случая многоосного напряженного состояния получено аналитическое решение задачи определения ориентации критической плоскости. Определив компоненты нормали к этой плоскости, можно вычислить значение функции Финдли и соответствующее ему число N , т.е. усталостную долговечность элемента конструкции, находящегося в многоосном напряженном состоянии [4].

Выводы. Построено обобщение многоосного критерия усталостного разрушения на случай сверхмногоциклового усталости, предложена процедура определения параметров этого обобщенного критерия по результатам одноосных экспериментов для двух коэффициентов асимметрии цикла, определена критическая плоскость развития усталостных повреждений для многоосного напряженного состояния.

Литература

1. *Bathias C., Paris P.C.* Gigacycle Fatigue in Mechanical Practice. New York. Dekker, 2005.
2. *N. G. Bourago, A. B. Zhuravlev, I. S. Nikitin.* Models of multiaxial fatigue fracture and service life estimation of structural elements // Mechanics of Solids. 2011. Vol. 46. N 6. P. 828–838. DOI: 10.3103/S0025654411060033
3. *Findley W.* A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending // J. of Eng. for Indust. 1959. P. 301–306.
4. *Burago N., Nikitin I.* Multiaxial Fatigue Criteria and Durability of Titanium Compressor Disks in low- and giga- Cycle Fatigue Modes. Chapter 8 in Special Volume Mathematical Modeling and Optimization of Complex Structures, Springer, Series: Computational Methods in Applied Sciences, Vol. 40. P. Neittaanmaki, S. Repin, T. Tuovinen (eds.) 2016. P. 117-130. DOI: 10.1007/978-3-319-23564-6_8.

ОБЗОР И СРАВНЕНИЕ ПОГЛОЩАЮЩИХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ FDTD-СХЕМЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА¹

Вшивков В.А., Генрих Е.А.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск

Введение

При численном моделировании физических процессов всегда возникает вопрос о задании граничных условий. В случае, когда в изначальной постановке задачи область решения неограничена, требуется вводить искусственные границы и задавать на них численными методами поглощающие (неотражающие) граничные условия (ПГУ). От качества этих условий, от корректности их задания и от схем, которыми эти условия реализованы, зависит решение исходной задачи. Кроме того, чем лучше ПГУ, тем ближе к области интересующего нас решения можно сдвинуть границу, что хорошо при моделировании сложных процессов, требующих большого объема вычислений.

В случае системы уравнений Максвелла методы задания поглощающих граничных условий делят на два типа:

- 1) дифференциальные или аналитические поглощающие граничные условия,
- 2) поглощающие граничные условия, основанные на свойствах среды (PML – perfectly matched layer) – средствами численной схемы искусственно задается приграничная область, в которой происходит постепенное затухание полей. Чаще всего этот метод используют в комбинации с первым для поглощения остаточных волн.

В работе рассматриваются дифференциальные или аналитических поглощающие граничные условия для FDTD-схемы решения уравнений Максвелла на сетке Yee. Реализовано несколько разных граничных условий, проведено их сравнение на задаче прохождения монохроматической волны и лазерного импульса.

I Система уравнений Максвелла и схема FDTD на сетке Yee

В общем виде в двумерной постановке система уравнения Максвелла без источников тока имеет следующий вид

¹Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 16-11-10028.

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial y}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}, \quad (6)$$

Здесь E – напряженность электрического поля, H – напряженность магнитного поля, ϵ и μ – электрическая и магнитная постоянные. Эта система распадается на две независимые системы уравнений: для переменных E_x , E_y , H_z (TEz-мода, уравнения (1)-(3)) и H_x , H_y , E_z (TMz-мода, уравнения (4)-(6)). Переменные в каждой подсистеме не зависят от переменных другой системы, кроме того с точностью до переобозначений они идентичны. Поэтому в данной работе будет рассматриваться только TMz-мода.

Схема FDTD на сетке Yee [1] для TMz-моды выглядит следующим образом

$$\frac{Hx_{i+1/2,k}^{n+1/2} - Hx_{i+1/2,k}^{n-1/2}}{\tau} = -\frac{1}{\mu} \frac{Ez_{i+1/2,k+1/2}^n - Ez_{i+1/2,k-1/2}^n}{h_y}, \quad (7)$$

$$\frac{Hy_{i,k+1/2}^{n+1/2} - Hy_{i,k+1/2}^{n-1/2}}{\tau} = \frac{1}{\mu} \frac{Ez_{i+1/2,k+1/2}^n - Ez_{i-1/2,k+1/2}^n}{h_x}, \quad (8)$$

$$\frac{Ez_{i+1/2,k+1/2}^{n+1} - Ez_{i+1/2,k+1/2}^n}{\tau} = \frac{1}{\epsilon} \frac{Hy_{i+1,k+1/2}^{n+1/2} - Hy_{i,k+1/2}^{n+1/2}}{h_x} - \frac{Hx_{i+1/2,k+1}^{n+1/2} - Hx_{i+1/2,k}^{n+1/2}}{h_y}. \quad (9)$$

Основная идея ее состоит в том, чтобы разнести вычисление, электрического и магнитного полей на полшага по времени, а также вычислять поля на сдвинутых друг относительно друга на полшага сетках, и таким образом обеспечить второй порядок аппроксимации как по пространству, так и по времени. Условие устойчивости схемы FDTD $\tau \leq \frac{h}{c\sqrt{\alpha}}$, $\alpha_{2D} = 2$, $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$.

Как видно из (7)-(9), для TMz-моды в схеме FDTD нужно задавать на границе только Ez . Узлы, в которых вычисляются величины Hx и Hy , не попадают на границу, их значения вычисляются по Ez .

II Волновое уравнение

ПГУ дифференциального типа строятся на основе одностороннего волнового уравнения или уравнения однонаправленной волны (one-way wave equation). Данное уравнение в частных производных допускает распространение волны только в одном направлении. Система (4)-(6) сводится к уравнению вида

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (10)$$

где $u = Ez$ [2].

Обозначим $G := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = D_x^2 + D_y^2 - \frac{1}{c^2} D_t^2$. Таким образом (10) можно записать в виде $Gu = 0$. В работе [3] показано, что волновой оператор G может быть разложен таким образом: $Gu = G^+ G^- u = 0$, где

$$G^- = D_x - \frac{\sqrt{1-s^2}}{c} D_t, \quad (11)$$

$$G^+ = D_x + \frac{\sqrt{1-s^2}}{c} D_t, \quad (12)$$

$$s = \frac{D_y}{D_t/c}. \quad (13)$$

Применение к волновой функции на левой и правой границе соответственно G^- и G^+ поглощает плоские волны, двигающиеся под любым углом к границе. Т.о. следующие условия являются точными аналитическими поглощающими границами:

$$G^- u|_{x=0} = 0; \quad G^+ u|_{x=L} = 0. \quad (14)$$

Аналитические ПГУ строятся на основе численного решения уравнений (14). G^- и G^+ в силу наличия корня квадратного из дифференциала – псевдодифференциальные операторы. Для получения приближенного уравнения в частных производных используется разложение корня квадратного в ряд Тейлора.

Если брать только первый член $\sqrt{1-s^2} \approx 1$, для границы $x = L$ имеем $G^+ \approx D_x + D_t/c$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (15)$$

Если брать два первых члена $\sqrt{1-s^2} \approx 1 - \frac{s^2}{2}$, то для границы $x = L$ имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{c^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (16)$$

Использование на границе уравнения (15) дает полное поглощение волн, падающих по нормали, а использование (16) дает полное поглощение волн, падающих по нормали и частичное поглощение волн, падающих под углом.

III Поглощающие граничные условия Мура (Mur)

Поглощающие граничные условия Мура возникли одними из первых [4]. В них используются центральные разности по пространству и времени для аппроксимации производных в уравнениях [15]-[16]. Обозначим a , b – предпоследний и последний узел сетки по x .

Для [15] имеем

$$u_b^{n+1} = u_a^n + \frac{(c\tau - h_x)}{(c\tau + h_x)} (u_a^{n+1} - u_b^n) = 0. \quad (17)$$

Как показано в работе Мура, предложенные им граничные условия хорошо работают, когда граница достаточно далеко от источника, по крайней мере не ближе, чем на расстоянии половины длины волны.

IV Поглощающие граничные условия Ляо (Liao)

Ляо и др. предложили полиномиальную экстраполяцию значений поля во внутренних точках сетки и прошедших шагов по времени до желаемой граничной точки внешней границы на $n+1$ шаге по времени. ПГУ Ляо построены на экстраполяции волнового уравнения во временной и пространственной области на основе полиномов Ньютона.

Обозначим $u_j = u(L - jh_x, t + (1 - j)\tau)$.

ПГУ Ляо 1го порядка: $u_0 = 2u_1 - u_2$.

ПГУ Ляо 2го порядка: $u_0 = 3u_1 - 3u_2 + u_3$.

ПГУ Ляо 3го порядка: $u_0 = 4u_1 - 6u_2 + 4u_3 - u_4$.

Анализ свойств ПГУ Ляо содержится в работах [6] и [7]. Было показано, что область устойчивости поглощающих граничных условий Ляо очень небольшая: $0.5 \leq h/c\tau \leq 2$. Т.о. границы устойчивости схемы FDTD с ПГУ Ляо еще уже: $1.4 \leq h/c\tau \leq 2$. Ряд авторов анализируют эту проблему и предлагают методы борьбы с ней. Например авторы [8] предлагают использовать схему с весами для расширения области устойчивости ПГУ Ляо.

V Тестовые расчеты

Проведем сравнение ПГУ Мура и Ляо. В расчетах использовались следующие начальные и граничные условия. В начальный момент времени все поля нулевые. На левой границе задается поле $E_z = E_0 \sin(2\pi f_0 t)$ – плоская монохроматическая волна, либо $E_z = E_0 e^{(t-\tau)^2/2T^2}$ – Гауссов импульс. На правой границе тестируемые поглощающие граничные условия. Внешних источников тока нет. Реализована схема FDTD на сетке Yee в двумерной постановке для внедрения и тестирования граничных условий. Проведены тестовые расчеты с граничными условиями Мура и Ляо.

VI Тест 1: sin

На рис.1 показан график прироста полной энергии для первого тестового расчета, когда через левую границу в область входит синусоидальная волна. Энергия в области растет до того момента, когда волна достигает правой стенки. Далее энергия остается практически постоянной. Левый график энергии для всех ПГУ совпадает. Из правого же видно, что после того, как волна достигла границы, лучше всего ведет себя схема Мура 1-го порядка и Схема Ляо 3-го порядка. У схемы Ляо 1-го порядка после достижения волной границы наблюдается небольшой, но постоянный прирост полной энергии, что показывает наличие отраженной волны.

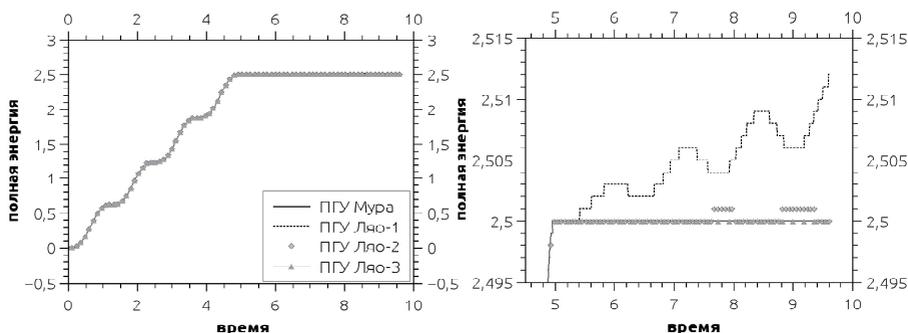


Рис. 1. Полная энергия в зависимости от заданных ПГУ. Слева – весь расчет. Справа крупно показан отрезок времени с момента, когда волна дошла до границы.

VII Тест 2: импульс летит по нормали к границе

На рис.2 показан срез поля в центре области – это профиль входящего (слева) и отраженного (справа) импульса. Видно, что форма отраженного импульса идентична первоначальной, отличается только амплитуда. Амплитуды отраженного импульса для ПГУ Мура и Ляо 3го порядка практически одинаковы. ПГУ Ляо 1го и 2го порядков хуже отражают импульс, когда он летит перпендикулярно к границе

VIII Тест 3: импульс летит под углом к границе

Суммарная отраженная энергия, оставшаяся в области после прохождения импульса, в зависимости от угла наклона импульса к границе представлена в таблице:

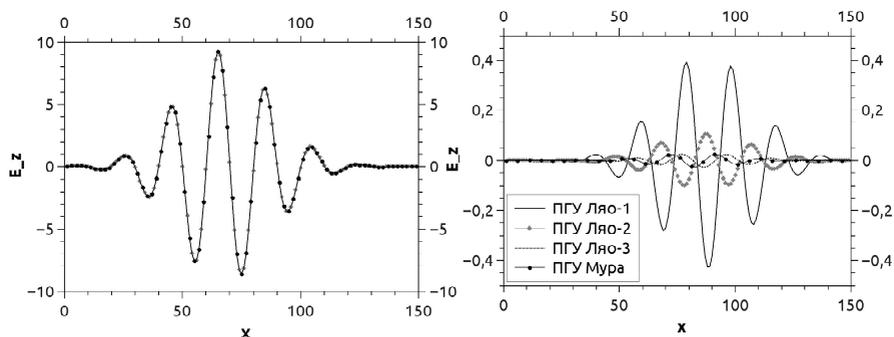


Рис. 2. Электрическое поле E_z , срез в центре области по y . Слева – профиль входящего импульса, справа -отраженного.

Таблица 1. Отраженная энергия, оставшаяся в области после прохождения импульса (в процентах от полной энергии импульса)

ПГУ	0°	20°	45°
Мур	0.003%	0.15%	3.4%
Ляо-1	0.45%	0.25%	0.136%
Ляо-2	0.025%	0.018%	0.121%
Ляо-3	0.0016%	0.006%	0.12%

Как видно из таблицы 1 при выходе импульса по нормали(0°) лучше всего ведет себя схема Мура и Схема Ляо 3-го порядка. Когда же импульс выходит под небольшим углом, схема Ляо 2-го порядка справляется лучше, чем схема Мура. При угле падения импульса в 45° в области остается 3.4% энергии при использовании ПГУ Мура.

Таким образом можно заключить, что схема Мура хорошо справляется с волнами, падающими на границу по нормали, и хуже справляется с волнами, идущими под углом к границе. И схема Мура, и схема Ляо просты в реализации. Схема Ляо повышенного порядка хорошо справляется с волнами, падающими на границу под любым углом. Единственный недостаток этого ПГУ – условная устойчивость.

Литература

1. Kane Yee Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media.// IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1966. Vol. 14 . N 3. P. 302–307.

2. *Taflove A., Hagness S. C.* Computational electrodynamics. The Finite-Difference-Time-Domain method. Third edition. Artech house, INC, 2005.
3. *Engquist B., Majda A.* Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves *Mathematics of Computation*. Vol. 31 (1977), P. 629–651
4. *Mur G.* Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic field equations. // *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*. 1981. Vol. 23. N 4. P. 377–382.
5. *Liao Z.P., Wong H.L., Yang B.P., Yuan Y.F.* A transmitting boundary for transient wave analysis. // *Scientia Sinica (series A)*, XXVII. Vol. 10. 1984. P. 1063–1076.
6. *Wagner R.L., Chew W.C.* An Analysis of Liao's Absorbing Boundary Condition // *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*. Vol. 9. 1995. Iss. 7-8. P. 1993–1009.
7. *Costen F.* Analysis and improvement of Liao ABC for FDTD. // *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*. 2003.
8. *Lei Zhang, Tongbin Yu* A method of improving the stability of Liao's higher-order absorbing boundary condition // *Progress in electromagnetic research*. 2012. Vol. 27. P. 167–178.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕПЛОВЫХ ПОЛЕЙ С УЧЕТОМ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ¹

Гладких В.С., Петухов А.В

*Институт вычислительной математики и математической
геофизики СО РАН, Новосибирск*

Введение

Нефтедобыча в северных условиях требует оценки влияния скважин на многолетнемерзлые породы, чтобы предотвратить техногенные катастрофы, связанные с размещением вечной мерзлоты в окрестностях шахты и потерей устойчивости инженерных конструкций. Для решения данной проблемы проводится моделирование тепловых полей с учетом фазовых переходов вода-лед и сезонных изменений температуры на поверхности почвы. Данная проблема исследована широким кругом авторов и отражена, в работах [1, 2, 3, 4]. Многие авторы отходят от задачи Стефана и используют энтакльпийную постановку, чтобы избежать необходимости вычисления точной границы фазового перехода, что является необязательным для решаемой задачи. Ключевыми особенностями моделирования теплового поля рядом с шахтами является разномасштабность области так как диаметр шахты составляет обычно около 0.2 метра, тогда как размеры области измеряются десятками метров и зависимость коэффициентов модели от температуры, что делает задачу нелинейной. Также большое количество вычислений при решении нестационарной задачи требует эффективной параллелизации разработанного комплекса программ.

I Постановка

Рассмотрим расчетную область $\Omega * t, \Omega \in R^3, t \in R^1$ с кусочно-гладкой границей Γ . Мы предполагаем, что изменение фазового состояния происходит при постоянной заранее заданной температуре T^* . Через $S(t)$ мы обозначим границу раздела двух сред, лед с породой (обозначим через $\Omega^+(t) = (x, y, z) | (x, y, z) \in \Omega, T(x, y, z, t) > T^*$) и вода с породой (обозначим через $\Omega^-(t) = (x, y, z) | (x, y, z) \in \Omega, T(x, y, z, t) < T^*$). Рассмотрим энтакльпийную постановку приведенную в работе [1].

$$\frac{\partial H}{\partial t} + u * grad(H) - div(\lambda * grad(T)) = 0 \quad (1)$$

¹Работы по изучению и уточнению модели, а также по оптимизации параллельных вычислений выполнены при финансовой поддержке гранта РФФ № 15-11-10024. Работы по верификации программы и расчету модельных задач выполнены при финансовой поддержке гранта РФФИ № 16-29-15122 офи_м

где $H(x, t)$ – энтальпия, $T(x, t)$ – температура, u – вектор скорости течения в пористой среде, равный в нашем случае нулю. Рассмотрим фазовый переход, определенный в некоторой окрестности T^* , как сделано в работе [2], тогда мы получим следующую постановку:

$$(\alpha(\phi_\Delta) + \rho^+ L \phi'_\Delta) \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u * grad(T) \right) - div(\lambda(\phi_\Delta) * grad(T)) = 0 \quad (2)$$

$$\phi_\Delta = \begin{cases} 0 & T \leq T^* - \Delta \\ \frac{T - T^* + \Delta}{2\Delta} & T^* - \Delta < T < T^* + \Delta \\ 0 & T \geq T^* + \Delta \end{cases}, \quad (3)$$

$$\phi'_\Delta = \begin{cases} 0 & T \leq T^* - \Delta \\ \frac{1}{2\Delta} & T^* - \Delta < T < T^* + \Delta \\ 0 & T \geq T^* + \Delta \end{cases}. \quad (4)$$

Для построения разностной схемы, являющуюся линейной по времени, необходимо использовать функцию энтальпии непрерывную вместе со своей первой производной, что приводит к следующей модификации постановки:

$$(\alpha(\phi_\Delta) + \rho^+ L \psi_\Delta) \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u * grad(T) \right) - div(\lambda(\phi_\Delta) * grad(T)) = 0 \quad (5)$$

$$\psi_\Delta = \begin{cases} 0 & T \leq T^* - \Delta \\ \frac{T - (T^* - \Delta)}{\Delta^2} & T^* \leq T \leq T^* + \Delta \\ \frac{1}{2\Delta} - \frac{T - (T^* - \Delta)}{\Delta^2} & T^* - \Delta < T < T^* + \Delta \\ 0 & T \geq T^* + \Delta \end{cases}. \quad (6)$$

для (2)-(6) коэффициенты $\alpha(\phi_\Delta) = \rho^- c^- + \phi_\Delta(\rho^+ c^+ - \rho^- c^-)$, $\lambda(\phi_\Delta) = \lambda^- + \phi_\Delta(\lambda^+ - \lambda^-)$, определяются, как представлено в работе [3]:

$$\begin{aligned} \rho^- c^- &= (1 - m) \rho_{sc} c_{sc} + m \rho_i c_i, \\ \rho^+ c^+ &= (1 - m) \rho_{sc} c_{sc} + m \rho_w c_w, \\ \rho^+ &= (1 - m) \rho_{sc} + m \rho_w, \\ \lambda^- &= (1 - m) \lambda_{sc} + m \lambda_i, \\ \lambda^+ &= (1 - m) \lambda_{sc} + m \lambda_w, \end{aligned} \quad (7)$$

где индексы sc, i и w обозначают каркас пористой среды, воду и лед, $m = 0.2$ – определяет пористость среды. Для наглядности построим функции энтальпии (см. Рисунок 1) для случая с неким фиксированным набором коэффициентов: Как видно из Рисунка 1 для уравнения (1) у нас имеется скачок функции энтальпии в точке T^* , для (1,2,3,4) мы имеем скачок первой производной энтальпии в точках $\pm\Delta$, для постановки (1,5,3,6)) мы имеем непрерывную как саму функцию энтальпии, так и ее первую производную. Дополним данные постановки начальными и краевыми условиями. Начальное условие на распределение температуры в области Ω записывается как:

$$T|_{(t=0)} = T_0(x, y, z), \quad (8)$$

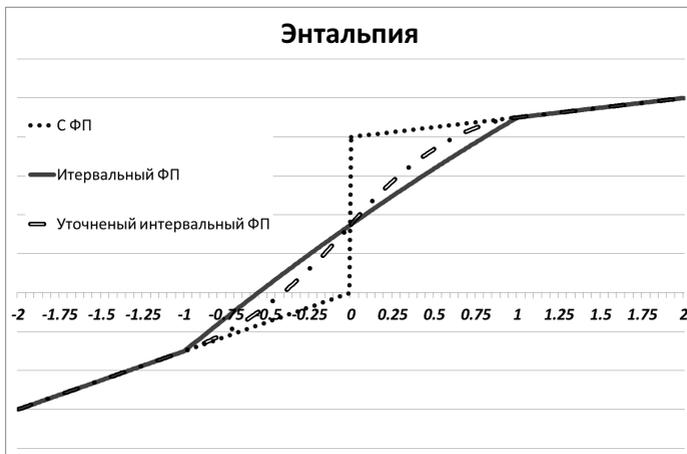


Рис. 1. Функция энthalпии для постановки с фазовым переходом(ФП) (1), Интервальным ФП(1,2,3,4) и уточненным интервальным ФП(1,5,3,6) с фиксированными коэффициентами, при $T^* = 0$.

На внешней границе расчетной области, которую мы берем достаточно далеко, ставятся следующие граничные условия первого рода (Дирихле, заданная температура),

$$T|_S = T_{S_0}, \quad (9)$$

или граничные условия 2-го рода (Неймана, заданный тепловой поток)

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} |_S = J_S. \quad (10)$$

Аппроксимация начально-краевой задачи (1,5,3,6) в расчетной области $\Omega * T$ по времени осуществляется с помощью неявной схемы Кранка-Николса[7], а по пространству – методом конечных объемов [5], получаемым из интегральных законов сохранения с учетом начальных и краевых условий (8)-(10), на адаптивной неструктурированной сетке. Под адаптивностью в данном случае понимается, что все угловые точки внешней и внутренних границ являются узлами. При аппроксимации начально-краевой задачи (1,5,3,6,8-10) будем предполагать существование ее единственного классического решения во всех внутренних точках $r \in \Omega$, достаточно гладкого вплоть до внешней границы. Коэффициенты уравнения рассчитывались в центрах конечных элементов по значениям поля температуры с предыдущего шага по времени. Данная аппроксимация обладает первым порядком по времени и пространству, что было подтверждено на ряде модельных задач с известным аналитическим решением, на последовательности сгущающихся сеток. Полученная система линейных алгебраических уравнений решается с помощью итерационного метода сопряженных невязок (CR, Conjugate Residual)

или сопряженных градиентов (CG, Conjugate Gradients) в подпространствах Крылова при использовании алгоритма неполной факторизации в модификации Айзенштата [6] в качестве предобуславливателя.

II Особенности реализации и параллелизации

Для преодоления разномасштабности сетки используется сгущение сетки к области с шахтами. Для случая с одной шахтой мы используем одноуровневое сгущение, для случая с четырьмя шахтами расположенными квадратом используется двухуровневое сгущение представленное на Рисунке 2. Другим аспектом разработки вычислительных комплексов является созда-

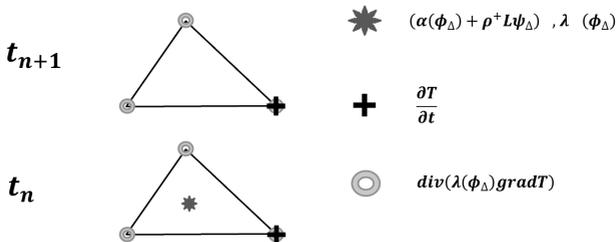


Рис. 2. Двухуровневое регулярное сгущение сетки в трехмерной области для случая с 4-мя шахтами (вид сверху).

ние алгоритмов ориентированных на использование современных графических ускорителей, которые предоставляют сотни вычислительных потоков и обеспечивают так называемый "массированный" параллелизм. При создании и разработке комплекса программ предпринимались дополнительные усилия по уменьшению непараллелизуемой части программы и избавлению от излишней синхронизации. Обычная схема параллелизации шага построения матрицы системы линейных алгебраических уравнений при использовании методом конечных объемов или конечных элементов предусматривает параллелизацию по сеточным элементам, что приводит к необходимости объединения глобальных матриц и правых частей, полученных на разных вычислительных потоках. Данное объединение производится параллельно, но количество операции необходимых для выполнения объединения пропорционально количеству используемых потоков, и даже при идеальном параллелизме не сокращается при увеличении количества потоков и кроме того требует дополнительную синхронизацию по данным. Таким образом существует часть не ускоряющаяся с увеличением количества потоков, которая самым отрицательным образом влияет на производительность. Альтернативным подходом является параллелизация по узлам, что приводит конечно к увеличению количества обрабатываемых элементов, так как некоторые элементы и соответствующие им локальные матрицы будут вычислены

дважды, но дополнительный объем пропорционален количеству граничных элементов, что при разумном подходе к разбиению области на подобласти (соответствующие вычислительным потокам) существенно меньше чем общее количество элементов. Простые оценки объемов вычислений параллельной и серийной части для обоих методов показывают, что для современных вычислительных систем построенных на графических ускорителях (около 280 потоков или более) добиться эффективного ускорения при применении обычной схемы можно только для конечных элементов для вычисления локальных матриц в которых требуется более 100 операций на элемент. Для решаемой реальной задачи оценка ускорения от использования предложенного альтернативного подхода составляет более 2-х раз, и эффективный параллелизм сохраняется до 72 потоков.

III Вычислительные эксперименты

Рассмотрим расчетную область $\Omega = 120 * 120 * 60$ с шахтой/шахтами параллельными оси z и диаметром 0.2 и длиной 60 в течении 5-и лет. Рассматриваем области с одной шахтой расположенной в центре и 4 шахтами, расположенными квадратом, с расстоянием между шахтами в 1м и центром квадрата лежащим в центре области. При задании следующих физических параметров сред и погодных граничных условий Дирихле соответствующих использованным в [4], мы получили качественную картину распространения зоны размерзания совпадающую с полученной в данной работе. Прямое сравнение количественных величин невозможно, поскольку мы рассчитывали шахту не имеющую дополнительного теплозащитного слоя, как приведено в работе [4]. Тем не менее мы получили хорошие совпадение качественной картины и сопоставимые размеры и форму области размерзания (с учетом дополнительной теплозащиты). Также были получены результаты для пучка скважин из 4-х, расположенных квадратом со стороны между центрами в 1 метр, см. Рисунок 3.

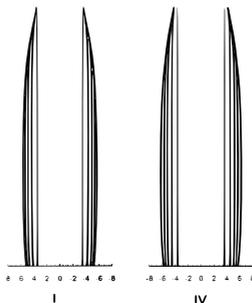


Рис. 3. Изолинии при $T = 0$ с годовым интервалом в течении 5-и лет, в случае 1-ой (I) и 4-мя (IV) шахтами.

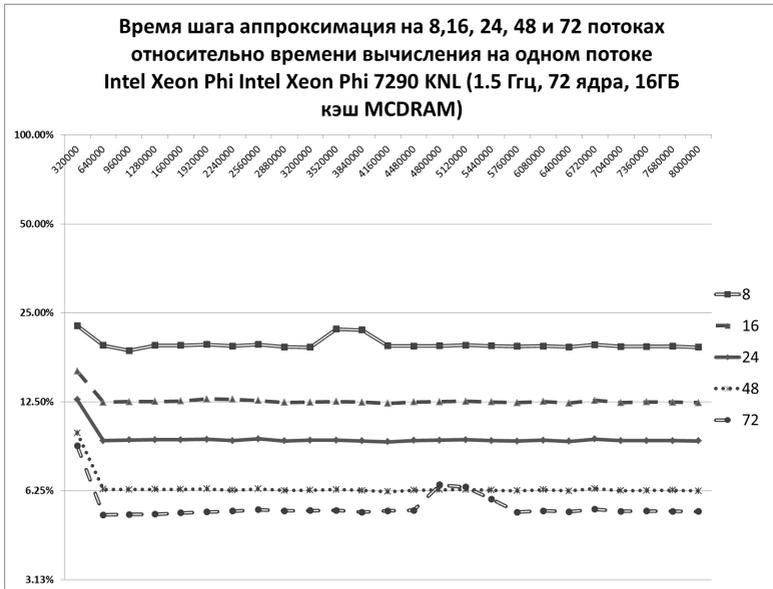


Рис. 4. Параллельность при решении тестовой задачи (шаг аппроксимации) для различного количества потоков. При увеличении потоков в 2 раза мы наблюдаем стабильное ускорение в 1.6 раз.

Полученные результаты отвечают физическому смыслу, по сравнению с односкважинным вариантом и позволяют сделать выводы, что предложенная техника позволяет эффективно и с достаточной точностью моделировать тепловые поля.

Для тестовых задач мы получили эффективную параллелизацию на 72 потока включительно (при увеличении количество потоков в 2 раза получаем ускорение 1.6 раз), что позволяет говорить о достижении приемлемого уровня параллелизации и выхода на эффективную параллелизации на большом количестве потоков, см. Рисунок 4.

Выводы

Представленные результаты вычислительных экспериментов демонстрируют возможность по использованию разработанного параллельного программного комплекса для решения поставленной задачи по вычислению теплового поля с учетом фазового перехода. Используемые подходы обеспечивают эффективное использование на вычислительных графических устройствах, таких как Intel Xeon Phi. В дальнейшем планируется продолжить ускорение разработанного комплекса за счет использования алгоритмов с

меньшим количеством операций и обращений к памяти и увеличения эффективности параллелизации.

Работа была выполнена с использованием ресурсов Сибирского суперкомпьютерного центра (ЦКП ССКЦ ИВМиМГ СО РАН).

Литература

1. *Вабищевич П.Н., Самарский А.А.* Вычислительная теплопередача. // М. Едиториал УРСС, 2003.
2. *Вабищевич П.Н., Васильева М.В., Павлова Н.В.* Численное моделирование термостабилизации фильтрующих грунтов. // Математическое моделирование. 2014. Т. 26, № 9, 111-125.
3. *Бычин И.В., Гавриленко Т.В., Галкин В.А., Гореликов А.В., Ряховский А.В.* Численное моделирование 3D задач теплопроводности с фазовыми переходами на вычислительных системах с распределенной памятью. // Вестник ЮУрГУ. Серия «Вычислительная математика и информатика». 2013. Т. 2, 84–93.
4. *Ваганова Н.А., Филлимонов М.Ю.* Численное моделирование растепления многолетнемерзлых пород в результате эксплуатации нефтяных скважин. // Доклады международной конференции «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика». посвященная 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Яненко. 2011. Док. № 75.
5. *Петухов А.В.* Решение трехмерного комплексного уравнения Геймгольца методом барицентрических конечных объемов. // Автометрия, изд-во СО РАН. 2007. Т. 43. № 2. 112–124.
6. *Ильин В.П.* Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. // Новосибирск, изд-во ИВМиМГ СО РАН. 2001.
7. *Самарский А.А.* Введение в теорию разностных схем. // М.: Наука. 1971

СЕТОЧНЫЕ СТРУКТУРЫ ДАННЫХ ОБЕСПЕЧИВАЮЩИЕ БАЛАНСИРОВКУ НАГРУЗКИ СОВРЕМЕННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ¹

Гладких В.С., Свешников В.М., Козырев А.Н.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск

Введение

Решение задач математической физики в областях со сложной геометрией приводит нас к использованию неструктурированных сеток созданных популярными пакетами прикладных программ, такими например как Netgen [1]. Это заставляет хранить данные о всех элементах и узлах в сеточных структурах данных, объём которых для современных задач достигает десятки гигабайт и представляет из себя достаточно сложные структуры данных [3]. Подобного недостатка лишены регулярные равномерные структурированные сетки, где сеточная информация хранится в сверхкомпактном представлении и объём сеточных структур данных редко превышает один килобайт. Однако для сложных геометрий построение равномерной структурированной сетки во всей области зачастую невозможно. Решение сочетающее достоинства обоих подходов это квазиструктурированные согласованные сетки, где представлены подобласти, как с неструктурированными сетками, так и с равномерными регулярными структурированными сетками.

На современных вычислительных комплексах быстродействие при разреженном матрично-векторном умножении определяется объёмом данных. И использование структурированных сеток позволяет отказаться от хранения значительного числа коэффициентов в матрице системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и перейти к использованию так называемых «Matrix free computations» (MFC) [2]. С учетом того что на современных вычислительных устройствах быстродействие крыловских итерационных методов для разреженных матриц зависит от объема данных необходимого для вычисления матрично-векторного произведения, то использование MFC, существенно сократит время решения СЛАУ. Возможность построения квазиструктурированной сетки для областей со сложной геометрией с использованием компактных структур для хранения регулярной части является целью исследования.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №14-11-00485П в части алгоритмов балансировки и РФФИ 16-01-00168 в части организации структур данных

Одним из характерных примеров являются задачи сильноточной электроники [5]. Во-первых, в параллелепипедных подобластях могут быть применены быстрые решатели, которые допускают значительное ускорение на графических вычислительных устройствах. Во-вторых, предлагаемая декомпозиция расчетной области может служить основой для распараллеливания расчетов на многопроцессорных суперЭВМ.

I Принципы и методики построения квазиструктурированных сеток

Рассмотрим трехмерную область Ω со сложной геометрией, которую мы можем окружить неким конечным прямоугольным параллелепипедом P , таким что $\Omega \subset P$. Создадим геометрическую структуру данных $Struct^{Netgen}$ соответствующей области Ω с использованием средств задания геометрии библиотеки Netgen [1]. Для построения квазиструктурированной сетки M_{qsm} мы в данном параллелепипеде сформируем несколько дополнительных сеток, которые будут использоваться для построения требуемых нам подобластей.

Введем макро-сетку M_{macro} , которая является равномерной, прямоугольной параллелепипедной сеткой, разбивающей P на $N_{macro} = N_x^{macro} * N_y^{macro} * N_z^{macro}$ частей, $(N_x^{macro}, N_y^{macro}, N_z^{macro})$ количество частей по оси x , y , z соответственно. Введем нумерацию элементов сетки – параллелепипедов p_i в естественном порядке, то есть сначала нумеруем по x , потом по y и в конце по z . После чего используя подпрограммы библиотеки Netgen разобьем полученные параллелепипеды на 3 класса: внешние ($p_i \cap \Omega = \emptyset$); внутренние ($p_i \cap \Omega = p_i$); граничные – то есть не принадлежащие предыдущим классам.

На основании полученного разбиения сформируем информационную структуру для построения сетки M_{qsm} . Мы строим неструктурированную сетку только в элементах принадлежащих классу граничных параллелепипедов, а регулярную равномерную сетку мы будем строить в классе внутренних параллелепипедов.

При программной реализации был сформирован массив, содержащий данные о параллелепипедах, где элементом массива являются структуры содержащая тип элемента C^{el} и разбиение \vec{N} по оси x , y и z в случае внутренних параллелепипедов и \emptyset в случае граничных и внешних параллелепипедов:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (C^{el} = 1; \emptyset) & \text{для внешних элементов,} \\ (C^{el} = 2; \vec{N} = (N_x, N_y, N_z)) & \text{для внутренних элементов,} \\ (C^{el} = 3; \emptyset) & \text{для граничных элементов,} \end{array} \right. \quad (1)$$

Для заполнения данного массива мы разработали следующий механизм: Определяются базовые шаги $\vec{N} = (N_x, N_y, N_z)$ для стандартного элемента и

определяется набор прямоугольных параллелепипедов сгущения (задающих сгущения в два раза по одному или нескольким направлениям), таким образом чтобы в соседних макро-элементах не происходило уменьшение шага сетки по любому направлению более чем в 2 раза. Предложенный подход был опробован на 2-х мерной сетке [4].

Для определения сетки задается, во первых базовые сеточные параметры: шаг по x , y и z ; во вторых набор параллелепипедов сгущения S_j и оси сгущения (по x или/и y или/и z), такие что если выполнено условие для параллелепипеда $p_i \cap S_j \neq \emptyset$, то мы проводим сгущение сетки в p_i , по указанным осям сгущения. Если же после сгущения возникнет ситуация что в соседних параллелепипедах сгущение будут больше чем в 2 раза, то выполнение программы будет остановлено и потребуются корректировка параллелепипедов сгущения или параметров макросетки. Таким образом, мы определим размер шага и количество элементов в каждом элементе макросетки и сформируем массив (1), в котором содержится информация достаточная для построения сетки. Суммируя сказанное в данном разделе, мы определим входную структуру данных необходимую для построения и определения параметров итоговой сетки в каждом элементе. Данная структура содержит в себе:

1. Данные объемлющего параллелепипеда P , то есть координаты точки N_1 и N_8 (см. Рисунок 1) в виде 2 троек вещественных чисел плюс стандартное разбиение одного макро элемента состоящее из тройки целых чисел $N^{\text{micro}} = (N_x^{\text{micro}}, N_y^{\text{micro}}, N_z^{\text{micro}})$, детали нумерации узлов проиллюстрированы на Рисунке 1. Список параллелепипедов сгущения в количестве K

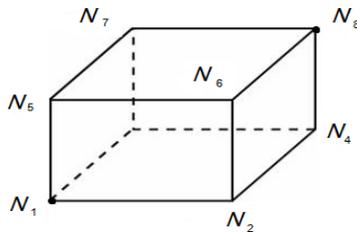


Рис. 1. Нумерация узлов в параллелепипеде для представления параллелепипеда в виде координат 2-х точек, каждая из которых задается тройкой координат, по x , y и z .

штук, также представленных в виде 2-х троек чисел задающих параллелепипед и вектор типа сгущения в котором кодируется есть ли сгущение по

осям x, y, z . Назовем полученную структуру через $Stuct^{macro}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Объемлющий: } N_1; N_8; \overrightarrow{N^{micro}} = (N_x^{micro}, N_y^{micro}, N_z^{micro}). \\ \text{Сгущения: } < S_1^1; S_8^1; \overrightarrow{S_1^{micro}} = (S_x^{micro}, S_y^{micro}, S_z^{micro}) >, \\ \quad \quad \quad \dots, \\ < S_1^K; S_8^K; \overrightarrow{S_K^{micro}} = (S_x^{micro}, S_y^{micro}, S_z^{micro}). \end{array} \right. \quad (2)$$

На основании полученных данных и исходной геометрии области мы построим структуру данных по макро элементам, такую что, в ней хранятся минимально необходимые данные для построения сетки в макро элементах. Минимально необходимыми данными для построения сетки во внутренних макроэлементах является массив, каждый элемент которого содержит следующие данные:

1. Код класса $id(0$ – внешние; целые, меньше 0 – граничные; целые, больше 0 – внутренние)
2. Разбиение по осям x, y, z : $\overrightarrow{N_i^{micro}} = (N_x^{micro}, N_y^{micro}, N_z^{micro})$ в случае внутреннего макроэлемента

Таким образом, формируется следующая структура данных $Stuct^{micro}$, достаточная для формирования микро-сетки во всей области.

$$\left\{ \begin{array}{l} id_1 \quad : \overrightarrow{N_1^{micro}} = (N_x^{micro}, N_y^{micro}, N_z^{micro}) \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ id_{N_{macro}} \quad : \overrightarrow{N_{N_{macro}}^{micro}} = (N_x^{micro}, N_y^{micro}, N_z^{micro}) \end{array} \right. \quad (3)$$

Следующим шагом станет вычисление сетки на гранях и ребрах, необходимых для передачи сеточному генератору Netgen, с последующим построением нерегулярной согласованной сетки для каждого граничного макроэлемента. Для начала обойдем все ребра в граничном макро-элементе. Если данное ребро принадлежит также хотя бы одному внутреннему элементу, то нам необходимо на нем задать разбиение согласованное с внутренним макро-элементом. Если ребро принадлежит более чем одному внутреннему макроэлементу, то мы на нем задаем самое частое разбиение. Следующим шагом мы определяем сетку на гранях, без ребер, где у нас сетка задается однозначно с внутреннего элемента. Полученное множество точек сохраняется в виде структуры, которая будет передана генератору сетки Netgen и хранится в одном из его форматов. С помощью генератора Netgen мы получим неструктурированную сетку записанную в одном из стандартных форматов. Для структурированной сетки достаточно уже имеющихся данных. На основании имеющейся сетки строится «средняя» сетка для балансировки вычислительной нагрузки между потоками. Элементами «средней» сетки являются объединения или граничных или внутренних макроэлементов, при этом

не допускается объединение элементов разного класса в одном «среднем» элементе. Также объединения внутренних элементов в «средний» должны оставаться прямоугольными параллелепипедами с одинаковыми параметрами сетки. Соответственно «средние» элементы мы продолжаем называть внутренними и внешними, по типу элементов из которых они состоят.

II Алгоритмы балансировки нагрузки

Обратим внимание что у нас представлено объединение 2 принципиально разных типа сеточных структур данных и для каждого типа элементов мы будем использовать разные оценки времени выполнения. Сформируем итоговую структуру данных:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Объемлющий :} \quad (N_1; N_8; \overrightarrow{N^{micro}}). \\ \text{Внутренние элементы :} \quad (t_i^{execution}; N_1^i; N_8^i; \overrightarrow{N^{micro}}, i = 1, \dots, N_{in}) \\ \text{Граничные элементы :} \quad (t_j^{execution}; N_1^j; N_8^j; D_j = Struct_{Netgen}, j = 1, \dots, N_{bnd}) \end{array} \right. \quad (4)$$

где N_{in} и N_{bnd} – это количество внутренних и внешних элементов соответственно, а D_j – структура данных являющаяся входной для Netgen генератора сетки. Статистическая балансировка осуществляется на основе оценки времени выполнения, что позволяет распределить задачи по доступному числу узлов кластера и достигнуть необходимой минимизации общего времени выполнения работ, в том числе и на несимметричных кластерах.

В качестве примера приведем матрично-векторное умножение, скорость которого во многом определяет скорость и время обращения систем линейных алгебраических задач крыловскими итерационными методами решения. Для внутренних элементов мы ожидаем существенное количество операций на 1 байт при матрично-векторном умножении и будем находиться в ситуации когда время зависит от вычислительного пика узла кластера. В качестве оценки производительности используется следующая: $P_{cb} = \alpha_{cb} * P_{peak}$, и соответственно время можно оценить как $T_{cb} = (N * K) / (P_{cb})$, где P_{peak} – пиковое количество операции в секунду узла кластера, α_{cb} – коэффициент эффективности использования вычислительных устройств процессора, и N – количество неизвестных в элементе, а K – среднее количество связей, которые необходимо учесть для каждого элемента. Все это полностью определяется элементом и характеристиками процессора и не требует построения сетки для получения оценки. Для граничных элементов ситуации принципиально другая, объем хранимых данных существенно превышает количество операции, что заставляет нас использовать оценки времени необходимого для передачи объема данных требуемых для вычислений. Так как объем данных зависит не только от размера самой матрицы но и от эффективности использования подсистемы памяти, на что непосредственно

влияет портрет матрицы, то мы построим оценку для матрицы с наилучшим портретом, в предположении что портрет не влияет на эффективность загрузки вектора y при умножении матрицы A на вектор x , и с наилучшим портретом, когда портрет и подсистема памяти не позволяют использовать ранее загруженные элементы вектора x и приходится каждый раз загружать их заново. В первом случае для разреженной матрицы A хранимой в специальном формате CSR [6] получена оценка: $P_{good} = Bandwidth * \frac{N_{operations}}{Sizeofdata} = 2 * Bandwidth * \frac{NNZ}{(12NNZ+20N)} = \frac{1}{(6+\frac{6}{Nr})} * Bandwidth$, а во втором $P_{bad} = Bandwidth * \frac{N_{operations}}{Sizeofdata} = 2 * Bandwidth * \frac{NNZ}{76NNZ+4N} = \frac{1}{38+\frac{2}{Nr}} Bandwidth$, где NNZ - количество ненулевых элементов в матрице A , $2 * NNZ$ – количество операций, N – количество строк матрицы, $12 * NNZ + 12 * N$ – количество байт необходимых для хранения разреженной CSR матрицы A , и с учетом того что при неоптимальной загрузке вектора x исходные N загрузок превращается в NNZ и штрафа за неэффективное использование cache-line выражающегося в мультипликаторе 8 (так как в одной cache-line содержится 8 вещественных чисел двойной точности), мы получаем объем данных которые необходимо передать $(8*NNZ)*8 = 64*NNZ$ вместо $8*N$. И учет зависимость от портрета матрицы организуется через коэффициент β_{mb} , который принимается зависящим только от портрета матрицы, и тогда производительность оценивается как: $P_{mb} = \beta_{mb} * P_{bad} + (1 - \beta_{mb}) * P_{good}$, и оценка по времени: $T_{mb} = N/(P_{mb})$. Обратим внимание что и в данном случае можно не строить сетку, если есть хорошие оценки N и NNZ в граничных областях.

В большей части случаев мы способны оценить время без построения сетки – только за счет параметров средней сетки, что позволяет равномерно распределить вычислительную нагрузку том числе и на несимметричных кластерах имеющих разные характеристику узлов.

III Пример

На 2-х мерной модельной задаче покажем необходимость выполнения балансировки по времени и эффективность по сравнению с балансировкой нагрузки по количеству узлов.

Рассмотрим 9 областей приведенных на Рисунке 2 и предположим что мы будем производить запуск на кластере состоящем из 2-х следующих узлов: Peak=400GF, bandwidth = 48 Gb/s, причем коэффициенты $\alpha_{cb} = 0.8$ и $\beta_{mb} = 0.3$, определены заранее, тогда количество неизвестных для каждой подобласти с учетом сгущений представлено в Таблице 1.

И балансировка выполненная по количеству узлов заставит нас вычислять область 6 на одном узле а все остальные на другом, что приведет к балансу представленному на Рисунке 3 темным цветом. В то время как балансировка по времени приведет к столбикам представленным светло-серым.

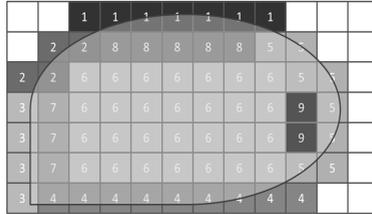


Рис. 2. На данном рисунке представлена средняя сетка и образованные из нее области отмеченные цифрами и цветом.

Таблица 1. Количество неизвестных и оценка времени выполнения в подобластях

Номер подобласти	N	$t_{execution}$
1	$10 * 10^5$	1.8мс
2	$5 * 10^5$	0.9мс
3	$5 * 10^5$	0.9мс
4	$12 * 10^5$	2.1мс
5	$10 * 10^5$	1.8мс
6	$120 * 10^5$	0.3мс
7	$12 * 10^5$	< 0.1мс
8	$20 * 10^5$	< 0.1мс
9	$8 * 10^5$	< 0.1мс

Как мы видим балансировка только по количеству неизвестных способна нивелировать эффект от параллелизации при разбиении области на неэквивалентные подобласти (по времени решения), в то же время балансировка по оценкам времени позволяет эффективно использовать ресурсы вычислительных систем.

Заключение

Использование временных оценок исполнения различных задач в разных подобластях позволяют сбалансировать нагрузку на кластер и уменьшает время решения задачи. Мы планируем внедрение предложенного подхода для 3-х мерного случая с переходом на эффективное использование несимметричного кластера за счет использования оценок времени выполнения для балансировки нагрузки.

Работа была выполнена с использованием ресурсов Сибирского суперкомпьютерного центра (ЦКП ССКЦ ИВМиМГ СО РАН).

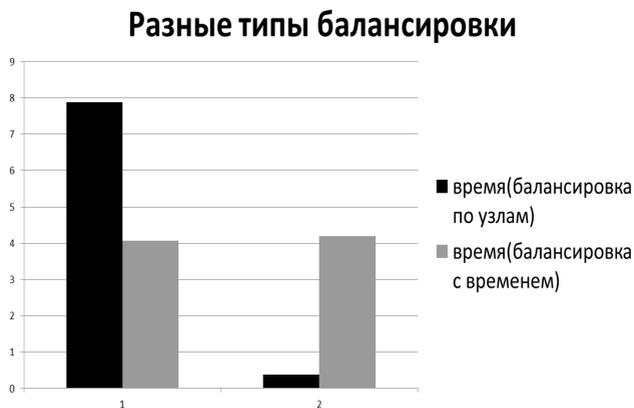


Рис. 3. Сравнение 2-х разных способов балансировки

Литература

1. *Netlib*. URL: <https://ngsolve.org>
2. *Ljungkvist, K.* Matrix-free finite-element computations on graphics processors with adaptively refined unstructured meshes // *Simulation Series*. Volume 49. Issue 3. 2017. Pages 1–12.
3. *AN Yzelman, Rob H Bisseling* Cache-oblivious sparse matrix-vector multiplication by using sparse matrix partitioning methods // *SIAM Journal on Scientific Computing*. V. 31. Issue 4. P. 3128–3154.
4. *Ильин В.П.* Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений.// Новосибирск, изд-во ИВМиМГ СО РАН. 2001.
5. *Ильин В.П., Свешников В.М., Сынах В.С.* О сеточных технологиях для двумерных краевых задач.// *Сиб. журн. индустр. матем.* 2000. Т. 3, N. 1, 124–136.
6. *MKL Sparse Storage Formats* URL: <https://software.intel.com/en-us/mkl-developer-reference-c-sparse-matrix-storage-formats>

СХЕМЫ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА, ОСНОВАННЫЕ НА ТОЖДЕСТВЕ МАРЧУКА, ДЛЯ ОЦЕНКИ ОПЦИОНОВ В МОДЕЛИ БЛЭКА-ШОУЛЗА

Горбенко Н.И.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск

Производные инструменты в настоящее время широко используются на финансовых рынках. Производный инструмент – это финансовый инструмент, стоимость которого зависит от цены базовой переменной и может использоваться для хеджирования риска, спекуляции и арбитража. Стоимость финансового актива является неопределенной, и прямые инвестиции в них подразумевают большой риск. Производные инструменты возникают как способ инвестирования в активы с меньшим риском. Однако, продолжая зависеть от стоимости базового актива, существует большая трудность в определении их стоимости.

Начиная с 70-х годов опционы стали одним из наиболее важных производных инструментов, помимо фьючерсов. Опционы представляют собой контракты, позволяющие владельцу купить или продать базовые акции по специфичной цене до момента истечения срока годности или времени погашения. Такая специфическая цена называется ценой исполнения. Таким образом торговля базовых активов по цене исполнения является осуществлением опциона. Такая простота сделала их одним из самых спекулятивных инструментов когда-либо созданных, поднимая торговлю опционами до нынешнего уровня важности.

В 1973 году была опубликована статья «Pricing of Options and Corporate Liabilities» [1], где было приведено дифференциальное уравнение, известное как уравнение Блэка-Шоулза, используемое на финансовых рынках для определения цены различных видов опционов. Численным методам решения уравнений в частных производных в финансах и экономике посвящена обширная литература, см., например, [2].

Пусть V обозначает стоимость опциона в момент времени t , тогда в одномерном случае это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV \quad (1)$$

где $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Omega = (0, S_{max}) \subset R$, σ обозначает волатильность актива, $r \geq 0$ – процентная ставка и D – дивиденды, S – цена базового актива.

Перепишем это уравнение в следующем виде(или в дивергентной форме)

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial V}{\partial S} + (r - D)SV + \sigma^2 SV \right) - 2rV + \sigma^2 V \\ &= \frac{\partial}{\partial S} (aS^2 \frac{\partial V}{\partial S} + bSV) - cV \\ &= \frac{\partial}{\partial S} \left(aS^2 e^{-\frac{b}{a} \ln S} \left(\frac{\partial}{\partial S} \left(e^{\frac{b}{a} \ln S} V \right) \right) \right) - cV \end{aligned} \quad (2)$$

С краевыми и начальными условиями

$$V(0, t) = V_L(t), \quad V(S_{max}, t) = V_R(t), \quad V(x, 0) = V_0(x).$$

Здесь $a = \frac{\sigma^2}{2}$, $b = r - D - \sigma^2$, $c = r + b$.

Следуя [3], разобьем отрезок $[0, S_{max}]$ на конечное число интервалов $I_j = [S_k, S_{k+1}]$ с шагом $h_k = S_{k+1} - S_k$, Проинтегрируем уравнение (2) по S в пределах $(S_{i-\frac{1}{2}}, S_{i+\frac{1}{2}})$ и получим уравнение баланса

$$J_{i+\frac{1}{2}} - J_{i-\frac{1}{2}} - \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} (cV + \frac{\partial V}{\partial t}) dS = 0, \quad (3)$$

где

$$J(S) = -aS^2 e^{-\frac{b}{a} \ln S} \left(\frac{\partial}{\partial S} (e^{\frac{b}{a} \ln S} V) \right) \quad (4)$$

функция потока в точках $S_{i+\frac{1}{2}}$, $S_{i-\frac{1}{2}}$.

Проинтегрируем $J_{i-\frac{1}{2}}$ в пределах $(S_{i-\frac{1}{2}}, S)$ и получим соотношение для определения $J_{i-\frac{1}{2}}$

$$-aS^2 e^{-\frac{b}{a} \ln S} \left(\frac{\partial}{\partial S} (e^{\frac{b}{a} \ln S} V) \right) = J_{i-\frac{1}{2}} - \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} (cV + \frac{\partial V}{\partial t}) dS = 0, \quad (5)$$

Разделим (5) на $aS^2 e^{-\frac{b}{a} \ln S}$ и проинтегрируем на интервале (S_{i-1}, S_i) , тогда выражение для потока имеет вид

$$\begin{aligned} J_{i-\frac{1}{2}} &= \left[-((e^{\frac{b}{a} \ln S} V)_i - (e^{\frac{b}{a} \ln S} V)_{i-1}) \right. \\ &\quad \left. - \int_{S_{i-1}}^{S_i} \frac{dS}{aS^2 e^{-\frac{b}{a} \ln S}} \int_{S_{i-\frac{1}{2}}}^S (cV + \frac{\partial V}{\partial t}) d\hat{S} \right] / \int_{S_{i-1}}^{S_i} \frac{dS}{aS^2 e^{-\frac{b}{a} \ln S}} \end{aligned} \quad (6)$$

Аналогично вычисляем $J_{i+\frac{1}{2}}$. Подставляя значения потоков в уравнение баланса (3) приходим к интегральному тождеству Марчука.

$$\begin{aligned} & -\frac{(e^{\frac{b}{a}\ln S V})_{i+1} - (e^{\frac{b}{a}\ln S V})_i}{\int_{S_i}^{S_{i+1}} \frac{dS}{aS^2 e^{-\frac{b}{a}\ln S}}} + \frac{(e^{\frac{b}{a}\ln S V})_i - (e^{\frac{b}{a}\ln S V})_{i-1}}{\int_{S_{i-1}}^{S_i} \frac{dS}{aS^2 e^{-\frac{b}{a}\ln S}}} - \int_{S_{i-\frac{1}{2}}}^{S_{i+\frac{1}{2}}} (cV + \frac{\partial V}{\partial t}) dS \\ & = -\left(\int_{S_i}^{S_{i+1}} \frac{dS}{aS^2 e^{-\frac{b}{a}\ln S}}\right)^{-1} \int_{S_i}^{S_{i+1}} \frac{dS}{aS^2 e^{-\frac{b}{a}\ln S}} \int_S^{S_{i+\frac{1}{2}}} (cV + \frac{\partial V}{\partial t}) d\acute{S} \\ & \quad - \left(\int_{S_{i-1}}^{S_i} \frac{dS}{aS^2 e^{-\frac{b}{a}\ln S}}\right)^{-1} \int_{S_{i-1}}^{S_i} \frac{dS}{aS^2 e^{-\frac{b}{a}\ln S}} \int_{S_{i-\frac{1}{2}}}^S (cV + \frac{\partial V}{\partial t}) d\acute{S} \end{aligned} \quad (7)$$

Преобразуем уравнение (7). Пусть

$$u = cV + \frac{\partial V}{\partial t}, p(S) = \left(\int_{S_i}^{S_{i+1}} \frac{dS}{aS^2 e^{-\frac{b}{a}\ln S}}\right)^{-1} \int_{S_i}^S \frac{d\acute{S}}{a\acute{S}^2 e^{-\frac{b}{a}\ln \acute{S}}}$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \left(\int_{S_i}^{S_{i+1}} \frac{dS}{aS^2 e^{-\frac{b}{a}\ln S}}\right)^{-1} \int_{S_i}^{S_{i+1}} \frac{dS}{aS^2 e^{-\frac{b}{a}\ln S}} \int_S^{S_{i+\frac{1}{2}}} u(\acute{S}) d\acute{S} = \\ & \left(\int_{S_i}^{S_{i+1}} \frac{dS}{aS^2 e^{-\frac{b}{a}\ln S}}\right)^{-1} \int_{S_i}^{S_{i+1}} \frac{d}{d\acute{S}} \left(\int_{S_i}^S \frac{dS}{aS^2 e^{-\frac{b}{a}\ln S}}\right) \int_S^{S_{i+\frac{1}{2}}} u(\acute{S}) d\acute{S} = \\ & \int_{S_{i+\frac{1}{2}}}^{S_{i+1}} u(S) dS + \left(\int_{S_i}^{S_{i+1}} \frac{dS}{aS^2 e^{-\frac{b}{a}\ln S}}\right)^{-1} \int_{S_i}^{S_{i+1}} u(S) dS \int_{S_i}^S \frac{d\acute{S}}{a\acute{S}^2 e^{-\frac{b}{a}\ln \acute{S}}} = \\ & \quad - \int_{S_{i+\frac{1}{2}}}^{S_{i+1}} u(S) dS + \int_{S_i}^{S_{i+1}} p(S) u(S) dS \end{aligned}$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} & \left(\int_{S_{i-1}}^{S_i} \frac{dS}{aS^2 e^{-\frac{b}{a}\ln S}}\right)^{-1} \int_{S_{i-1}}^{S_i} \frac{dS}{aS^2 e^{-\frac{b}{a}\ln S}} \int_{S_{i-\frac{1}{2}}}^S u(\acute{S}) d\acute{S} = \\ & \quad - \int_{S_{i-1}}^{S_{i-\frac{1}{2}}} u(S) dS + \int_{S_{i-1}}^{S_i} \hat{p}(S) u(S) dS, \end{aligned}$$

где

$$\hat{p}(S) = \left(\int_{S_{i-1}}^{S_i} \frac{dS}{aS^2 e^{-\frac{b}{a}\ln S}}\right)^{-1} \int_S^{S_i} \frac{d\acute{S}}{a\acute{S}^2 e^{-\frac{b}{a}\ln \acute{S}}}.$$

Таким образом уравнение (7) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & -\frac{(e^{\frac{b}{a}\ln S V})_{i+1} - (e^{\frac{b}{a}\ln S V})_i}{\int_{S_i}^{S_{i+1}} \frac{dS}{aS^2 e^{-\frac{b}{a}\ln S}}} + \frac{(e^{\frac{b}{a}\ln S V})_i - (e^{\frac{b}{a}\ln S V})_{i-1}}{\int_{S_{i-1}}^{S_i} \frac{dS}{aS^2 e^{-\frac{b}{a}\ln S}}} = \\ & \quad \int_{S_i}^{S_{i+1}} (1 - p(S)) u(S) dS + \int_{S_{i-1}}^{S_i} (1 - \hat{p}(S)) u(S) dS \end{aligned} \quad (8)$$

Заметим, что

$$p(S_i) = 0, \quad p(S_{i+1}) = 1, \quad \hat{p}(S_{i-1}) = 1, \quad \hat{p}(S_i) = 0.$$

Для построения разностной схемы применим квадратурную формулу Симпсона [4] на интервале (S_i, S_{i+1}) для первого интеграла в (8)

$$\int_{S_i}^{S_{i+1}} (1 - p(S)u(S))dS = \frac{h_{i+1}}{6} \left(u_i + 4p(S_{i+\frac{1}{2}})u_{i+\frac{1}{2}} \right)$$

и интерполяцию полиномом Лагранжа по трем узлам (параболическая интерполяция).

$$\begin{aligned} p(S_{i+\frac{1}{2}})u_{i+\frac{1}{2}} = & -\frac{h_{i+1}h_{i+1}}{4h_i(h_i + h_{i+1})}p(S_{i-1})u_{i-1} + \\ & + \frac{(h_{i+1} + 2h_i)}{4h_i}p(S_i)u_i + \frac{(h_{i+1} + 2h_i)h_{i+1}}{4(h_i + h_{i+1})h_{i+1}}p(S_{i+1})u_{i+1} \end{aligned}$$

Для второго интеграла в (8) имеем

$$\int_{S_{i-1}}^{S_i} (1 - \hat{p}(S)u(S))dS = \frac{h_i}{6} \left(4\hat{p}(S_{i-\frac{1}{2}})u_{i-\frac{1}{2}} + u_i \right)$$

и интерполяцию полиномом Лагранжа второго порядка по трем узлам (параболическая интерполяция).

$$\begin{aligned} \hat{p}(S_{i-\frac{1}{2}})u_{i-\frac{1}{2}} = & \frac{h_i(h_i + 2h_{i+1})}{4h_i(h_i + h_{i+1})}\hat{p}(S_{i-1})u_{i-1} + \\ & + \frac{(h_i + 2h_{i+1})}{4h_{i+1}}\hat{p}(S_i)u_i - \frac{h_i h_i}{4(h_i + h_{i+1})h_{i+1}}\hat{p}(S_{i+1})u_{i+1} \end{aligned}$$

В результате получаем аппроксимацию уравнения (1) с точностью четвертого порядка.

Запишем полученную систему уравнений в алгебраическом виде

$$A \frac{\partial V}{\partial t} = BV. \quad (9)$$

Матрица A является трехдиагональной матрицей с коэффициентами

$$\begin{aligned} a_{i,i} &= \frac{(h_{i+1} + 2h_i)}{4h_i}p(S_i) + \frac{(h_{i+1} + 2h_i)}{4h_{i+1}}\hat{p}(S_i), \\ a_{i,i-1} &= \frac{h_i(h_i + 2h_{i+1})}{4h_i(h_i + h_{i+1})}\hat{p}(S_{i-1}) - \frac{h_{i+1}h_{i+1}}{4h_i(h_i + h_{i+1})}p(S_{i-1}), \\ a_{i,i+1} &= \frac{(h_{i+1} + 2h_i)h_{i+1}}{4(h_i + h_{i+1})h_{i+1}}p(S_{i+1}) - \frac{h_i h_i}{4(h_i + h_{i+1})h_{i+1}}\hat{p}(S_i). \end{aligned} \quad (10)$$

Заметим, что если $h_i = h$, то матрица A является симметричной со строгим диагональным преобладанием. Матрица B также является трехдиагональной и монотонной с коэффициентами

$$\begin{aligned}
 e_i &= (e^{\frac{b}{a} \ln S})_i & ee_i &= \int_{S_i}^{S_{i+1}} \frac{dS}{aS^2 e^{-\frac{b}{a} \ln S}} \\
 b_{i,i} &= c_i a_{i,i} + \frac{e_i}{ee_i} + \frac{e_i}{ee_{i-1}} \\
 b_{i,i-1} &= c_{i-1} a_{i,i-1} + \frac{e_{i-1}}{ee_{i-1}} \\
 b_{i,i+1} &= c_{i+1} a_{i,i+1} + \frac{e_{i+1}}{ee_i}
 \end{aligned} \tag{11}$$

Заметим также, что краевые условия Дирихле учитываются точно. Для интегрирования по времени системы (9) применим явный метод Рунге-Кутты, используемый для решения жестких задач. Таблица Батчера для четырехстадийного метода четвертого порядка точности имеет вид

$$\begin{array}{c|cccc}
 0 & & & & \\
 \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
 \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\
 \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & \\
 1 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6}
 \end{array} \tag{12}$$

Приведем численный пример решения уравнения Блэка-Шоулза со следующими краевыми условиями Дирихле и параметрами

$$\begin{aligned}
 V(0, t) &= E, \quad V(S_{max}, t) = 0, \quad V(x, 0) = \max(E - S, 0) \\
 S_{max} &= 50, \quad E = 10, \quad T = 1, \\
 h &= \frac{S_{max}}{N + 1}, \quad \Delta t = \frac{T}{M + 1}, \quad \sigma = 0.6, \quad r = 0.25, \quad d = 0.2.
 \end{aligned}$$

Для определения порядка сходимости на различных сетка, было вычислено «точное» численное решение с $N = M = 2^{12}$.

M	N	L2-error	Order
1024	128	0.000150231	
1024	256	9.41888E-06	15.95
1024	512	5.89786E-07	15.97
1024	1024	3.68156E-08	16.02
N	M	L2-error	Order
1024	128	1.98649e-4	
1024	256	1.24999E-05	15.89
1024	512	7.81635E-07	15.99
1024	1024	4.88156E-08	16.01

Литература

1. *Black, F. and Scholes M.* The pricing of options and corporate liabilities. // J. Political Economy. 1973. N 81. P. 637–654.
2. *Brandimarte P.* Numerical Methods in Finance and Economics: A MATLAB-Based Introduction. Second edition. J. Wiley and Sons. Inc.. New Jersey. USA. 2009.
3. *Ильин В.П.* Математическое моделирование. Часть 1. Непрерывные и дискретные модели. Новосибирск: Изд-во Сибирского отделения РАН. 2017.
4. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. М.: Наука. 1975.

РАЗНОСТНЫЕ НЕОТРАЖАЮЩИЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Дородницын Л.В.

*Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова, Москва*

Моделирование большинства задач аэродинамики и аэроакустики заставляет переходить от неограниченных пространственных областей к ограниченным и задавать искусственные граничные условия.

Мотивацией настоящего исследования послужили следующие проблемы.

1. В расчетах газодинамических задач происходит отражение волн от искусственных границ.
2. В случае двух и более пространственных измерений неотражающие граничные условия должны быть нелокальными. Это значительно усложняет алгоритмы и увеличивает вычислительные затраты.
3. Для многомерных уравнений Эйлера любые локальные граничные условия вызывают отражение косых акустических волн.
4. Уравнения динамики вязкого газа и большинство разностных схем требуют большего числа граничных условий, нежели гиперболические системы.
5. Ряду разностных схем присущи, помимо регулярных (физических) волн, частые («пилообразные») осцилляции.
6. Такие осцилляции могут существенно исказить численное решение, причем они более заметны, чем отраженные регулярные волны.

По этим причинам будем исследовать многомерные разностные схемы как самостоятельный объект, который не сводится ни к одномерным моделям, ни к многомерным дифференциальным системам. При этом суть явления видна на уровне линеаризованных уравнений с постоянными коэффициентами, что облегчает применение математического аппарата, такого как преобразование Фурье–Лапласа.

Библиография на тему дискретных неотражающих условий не столь обширна, как по дифференциальным их постановкам. В [1] излагается подход к построению нелокальных неотражающих условий. Перечислим важнейшие публикации о газодинамических локальных искусственных граничных условиях [2]–[5], где, несмотря на успешные результаты, не был проведен подробный анализ многомерных разностных моделей.

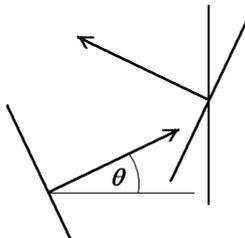


Рис. 1. Схема отражения косых волн от правой границы

I Граничные условия для дифференциальных задач

Рассмотрим двумерное волновое уравнение в прямоугольной области

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) = 0, \quad 0 < x < X, \quad 0 < y < Y, \quad t > 0. \quad (1)$$

Оно эквивалентно системе уравнений акустики

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

Для двумерного волнового уравнения можно построить только *нелокальные* неотражающие условия. Любое локальное граничное условие с постоянными коэффициентами вызывает отражение косых волн (рис. 1) и однозначно определяет соотношение амплитуд падающей и отраженной волн. Пример — одномерное неотражающее условие на правой границе:

$$(\partial p / \partial t + \partial p / \partial x)|_{x=X} = 0. \quad (3)$$

Частное решение (1), (3) в виде суперпозиции плоских гармоник есть

$$p(x, y, t; \omega, \theta) = \exp\{i\omega t - i\omega x \cos \theta - i\omega y \sin \theta\} + R \exp\{i\omega t + i\omega x \cos \theta - i\omega y \sin \theta\}, \quad R = -\operatorname{tg}^2(\theta/2) = O(s^2). \quad (4)$$

Здесь R — коэффициент отражения, θ — угол падения, $s = \sin \theta$.

Перейдем к динамике невязкого газа. Двумерные линеаризованные уравнения Эйлера

$$\frac{\partial U}{\partial t} + C_x \frac{\partial U}{\partial x} + C_y \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

записываются относительно искомого вектора возмущений $U = (\rho' u' v' p')^T$ с постоянными матрицами

$$C_x = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 1/\rho \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \rho c^2 & 0 & u \end{pmatrix}, \quad C_y = \begin{pmatrix} v & 0 & \rho & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 1/\rho \\ 0 & 0 & \rho c^2 & v \end{pmatrix}.$$

Общее решение (5) разлагается по гармоникам четырех видов:

$$U(x, y, t; \omega, \ell) = \sum_{j=1}^4 a_j \widehat{U}_j \exp\{i\omega t - ik_j x - i\ell y\}.$$

Правая (1) и левая (2) акустические, энтропийная (3) и вихревая (4) волны характеризуются волновыми числами и собственными векторами:

$$k_1 = \frac{\omega}{c+u}, \quad k_2 = -\frac{\omega}{c-u}, \quad k_3 = k_4 = \frac{\omega - v\ell}{u},$$

$$(\widehat{U}_1 \quad \widehat{U}_2 \quad \widehat{U}_3 \quad \widehat{U}_4) = \begin{pmatrix} \rho & \rho & \rho & 0 \\ c \cos \theta_1 & c \cos \theta_2 & 0 & -c \operatorname{tg} \theta_3 \\ c \sin \theta_1 & c \sin \theta_2 & 0 & c \\ \rho c^2 & \rho c^2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{tg} \theta_j = \ell/k_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Волновые числа акустических мод выписаны для одномерного случая.

Рассмотрим условие на правой ($x = X$) или левой ($x = 0$) границе

$$\mathcal{L}U|_{x=x_{\Gamma}} = 0. \quad (6)$$

При дозвуковом течении ($0 < u < c$) левая акустическая волна (k_2) распространяется влево, остальные — вправо. Следовательно, через левую границу входят правая акустическая (k_1), энтропийная (k_3) и вихревая (k_4) моды, а выходит левая акустическая. На правой границе волны обмениваются ролями.

Пусть \mathcal{L} — линейный оператор с постоянными коэффициентами и образом Фурье $\widehat{\mathcal{L}}(k, \ell, \omega)$. Тогда амплитуды a_j удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений [3]:

$$\sum_{j=1}^4 \widehat{V}_j a_j = 0, \quad \text{где} \quad \widehat{V}_j = \widehat{\mathcal{L}}(k_j, \ell, \omega) \widehat{U}_j, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Неотражающие граничные условия по определению должны давать амплитуды $a_j = 0$ для входящих мод и a_j — произвольные для выходящих мод. В [3] формулируется критерий неотражающего граничного условия в виде требований на столбцы матрицы, т.е. на граничный оператор.

Правая граница:

$$\widehat{V}_1 = \widehat{V}_3 = \widehat{V}_4 = 0, \quad \widehat{V}_2 \neq 0, \quad \forall \omega, \ell. \quad (7)$$

Левая граница:

$$\widehat{V}_2 = 0, \quad \widehat{V}_1, \widehat{V}_3, \widehat{V}_4 \text{ — линейно независимы, } \forall \omega, \ell. \quad (8)$$

Отметим, что любое локальное граничное условие частично отражает акустические волны.

II Граничные условия для разностных задач

В разностных схемах взаимодействие волн с границами происходит по закону. Если разностная система уравнений требует большего числа граничных условий, нежели исходная дифференциальная, будем строить переопределенные дифференциальные задачи и их дискретные аналоги. В ряде случаев этим устраняется сильное отражение косых акустических волн.

Различие между дифференциальными и разностными задачами видно на примере простейшей схемы с центральными разностями для одномерного уравнения переноса

$$\partial u / \partial t + \partial u / \partial x = 0.$$

На равномерной сетке с шагом h оно заменяется уравнением

$$du_j / dt + u_{\bar{x}} = 0, \quad (9)$$

где $u_{\bar{x},j} \equiv (u_{j+1} - u_{j-1}) / (2h)$ есть центральная разностная производная. В численном алгоритме производная по времени d/dt реализуется, например, с помощью схемы Кранка–Николсон.

Гармоническое решение (9) содержит «физическую» моду и паразитную пилообразную осцилляцию:

$$u(x_j, t) = \exp\{i\omega t - ikx_j\} + R(-1)^j \exp\{i\omega t + ikx_j\}, \\ k = k(\omega, h) = \arcsin(\omega h) / h \approx \omega.$$

Краевые условия для (9) требуются как на левом конце, так и на правом. Зададим справа уравнение с направленной разностью и выпишем соответствующий коэффициент отражения:

$$\frac{du_N}{dt} + u_{\bar{x},N} = 0, \quad u_{\bar{x},j} \equiv \frac{u_j - u_{j-1}}{h}, \quad R \approx -\frac{\omega^2 h^2}{4}.$$

Похожим образом, хотя и более сложно, устроено решение 7-точечной схемы DRP [4]:

$$\frac{du_j}{dt} + \frac{1}{h} \sum_{l=1}^3 a_l (u_{j+l} - u_{j-l}) = 0. \quad (10)$$

Показательным примером [6] служит моделирование переноса начального гауссиана при задании обобщенных условий Дирихле на обоих концах:

$$u_0 = u_1 = u_2 = 0, \quad u_N = u_{N-1} = u_{N-2} = 0.$$

Плавный импульс без искажения достигает правой границы и отражается в виде пилообразного пакета, который, дойдя до левой границы, порождает плавный импульс первоначальной формы, но притом ложный, нефизический.

Разностные схемы для двумерных уравнений Эйлера (5) на равномерной прямоугольной сетке приводят к разложению решения по модам

$$U(x, y, t; \omega, \ell) = \exp\{i\omega t - i\ell y\} \times \\ \times \left[\sum_{j=1}^4 a_j \widehat{U}_j \exp\{-ik_j x\} + \sum_j a_j^S \widehat{U}_j^S \exp\{-ik_j^S x\} \right].$$

Первые четыре моды близки (при наличии диссипации и дисперсии) к таковым в дифференциальных уравнениях Эйлера (5). Остальные, дополнительные, (\widehat{U}_j^S, k_j^S) являются сугубо схемными.

В частном случае схемы с центральными разностями

$$\frac{dU}{dt} + C_x U_{\bar{x}} + C_y U_{\bar{y}} = 0$$

дополнительные собственные векторы и волновые числа связаны с физическими:

$$\widehat{U}_j^S = \widehat{U}_j, \quad k_j^S = \pm\pi/h - k_j, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Граничное условие (6) задает систему уравнений для амплитуд:

$$\sum_{j=1}^4 \widehat{V}_j a_j = - \sum_j \widehat{V}_j^S a_j^S, \quad \text{где } \widehat{V}_j = \widehat{\mathcal{L}}(k_j, \ell, \omega) \widehat{U}_j, \quad \widehat{V}_j^S = \widehat{\mathcal{L}}(k_j^S, \ell, \omega) \widehat{U}_j^S. \quad (11)$$

Остановимся на случае, когда существует 4 вида схемных волн, вправо распространяются моды k_1, k_3, k_4, k_2^S , влево — моды k_2, k_1^S, k_3^S, k_4^S и на каждой границе требуется четыре уравнения.

Под неотражающими граничными условиями понимается следующее.

1. Никакие входящие волны не должны возникать «с нуля».
2. Выходящие *регулярные* волны не должны порождать входящие *регулярные* волны.

Тем самым к решению системы уравнений (11) предъявляются требования:

$$a_j = 0 \quad \text{для входящих мод, при всех } a_l^S \equiv 0, \\ a_j - \text{произвольные для выходящих мод.}$$

Критерий неотражающего условия на правой границе, вместо (7), приобретает вид

$$\widehat{V}_2, \widehat{V}_1^S, \widehat{V}_3^S, \widehat{V}_4^S - \text{линейно независимы,} \\ \widehat{V}_1 = \beta_{11} \widehat{V}_1^S + \beta_{13} \widehat{V}_3^S + \beta_{14} \widehat{V}_4^S, \\ \widehat{V}_3 = \beta_{31} \widehat{V}_1^S + \beta_{33} \widehat{V}_3^S + \beta_{34} \widehat{V}_4^S, \\ \widehat{V}_4 = \beta_{41} \widehat{V}_1^S + \beta_{43} \widehat{V}_3^S + \beta_{44} \widehat{V}_4^S.$$

Для левой границы критерий (8) заменяется следующим:

$$\widehat{V}_1, \widehat{V}_3, \widehat{V}_4, \widehat{V}_2^S - \text{линейно независимы, } \widehat{V}_2 = \beta \widehat{V}_2^S.$$

Требования оба раза менее жесткие, чем в дифференциальном случае. Локальные неотражающие условия могут существовать, как увидим ниже.

Обратимся к более простой системе двумерных уравнений акустики (2). Для схемы с центральными разностями

$$du/dt + p_{\bar{x}} = 0, \quad dv/dt + p_{\bar{y}} = 0, \quad dp/dt + u_{\bar{x}} + v_{\bar{y}} = 0$$

рассмотрим два варианта правых граничных условий.

Вариант I. Зададим условие излучения [3], являющее собой два уравнения переноса с разностями назад:

$$du_{Nk}/dt + u_{\bar{x},Nk} = 0, \quad dp_{Nk}/dt + p_{\bar{x},Nk} = 0.$$

Аналогичная задача для дифференциальных уравнений переопределена.

Физическая волна, падающая под углом, не отражается зеркально, а генерирует пилообразную осцилляцию низкой амплитуды — порядка величины шага сетки h :

$$p(x_j, y, t; \omega, \theta) = \exp\{i\omega t - i\omega y \sin \theta\} \left(\exp\{-i\omega x_j \cos \theta\} + R(-1)^j \exp\{i\omega x_j \cos \theta\} \right), \quad R \approx -i\omega h \sin^2(\theta/2) = O(hs^2). \quad (12)$$

Вариант II. Изменим первое граничное уравнение:

$$du_{Nk}/dt + p_{\bar{x},Nk} = 0, \quad dp_{Nk}/dt + p_{\bar{x},Nk} = 0.$$

В дифференциальном случае задача корректна, поскольку первое уравнение следует из основной системы уравнений акустики (2).

Косая волна отражается с образованием ложной регулярной волны. Частное решение имеет вид, близкий к (4):

$$p(x_j, y, t; \omega, \theta) = \exp\{i\omega t - i\omega y \sin \theta\} \left(\exp\{-i\omega x_j \cos \theta\} - \operatorname{tg}^2(\theta/2) \exp\{i\omega x_j \cos \theta\} \right).$$

Еще одна аппроксимация уравнений Эйлера (5) — центрально-разностная схема с диффузией (простейший пример схемы с фильтрами [7]):

$$\frac{dU}{dt} + C_x U_{\bar{x}} + C_y U_{\bar{y}} = \mu (U_{\bar{x}x} + U_{\bar{y}y}),$$

где $u_{\bar{x}x,j} \equiv (u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1})/h^2$ — вторая разностная производная. Фурье-анализ позволяет найти общее и частные решения такой системы, однако результаты оказываются громоздкими.

Для простоты рассмотрим дифференциальную систему уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial t} + C_x \frac{\partial U}{\partial x} + C_y \frac{\partial U}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right).$$

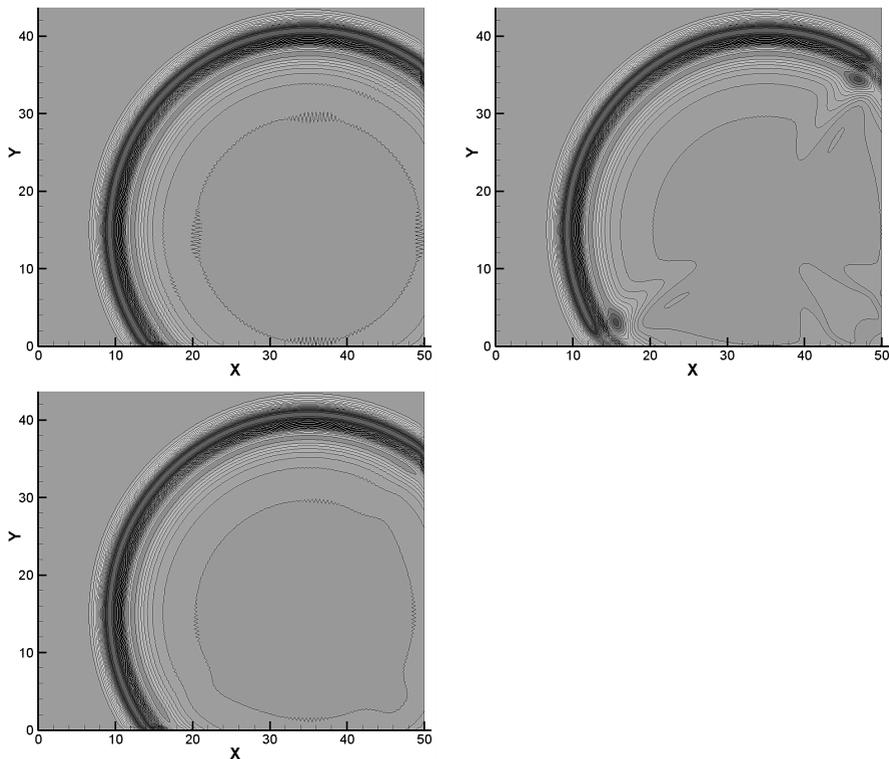


Рис. 2. Волны от начального импульса при трех видах граничных условий: сверху – вариант I и вариант II; внизу – схема с фильтрами, вариант I

Выберем аналогичную модель для уравнений акустики с правым граничным условием согласно варианту I:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), & \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} &= \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= \mu \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right), \\ (\partial u / \partial t + \partial u / \partial x)|_{x=X} &= 0, & (\partial p / \partial t + \partial p / \partial x)|_{x=X} &= 0. \end{aligned}$$

В отличие от бездиссипативной схемы (12), здесь падающая физическая волна образует отраженную регулярную волну в виде

$$p(x, y, t) = \exp\{i\omega t - i\omega y \sin \theta\} \left(\exp\{-i\omega x \cos \theta\} - \operatorname{tg}^4(\theta/2) \exp\{i\omega x \cos \theta\} \right),$$

однако отражение волны много слабее, чем в гиперболическом случае (4).

Для сравнения граничных условий выбрана задача о распространении начального локального импульса [4, 5] на основе 7-точечной DRP-аппроксимации (10) уравнений акустики. На рис. 2 показаны изолинии p на одинаковый момент времени для вариантов I (вверху слева) и II (справа), адаптированных к этой схеме на всех четырех границах, и для схемы с фильтрами [7] при задании варианта I (внизу слева).

Выводы

- При отражении волн от искусственных границ возникают как волны, подобные падающим, так и специфические схемные волны.
- Отражение косых волн существенно зависит от выбора разностной аппроксимации основных уравнений.
- Для многомерных разностных задач предпочтительно использовать граничные условия, неотражающие для одномерных дифференциальных уравнений Эйлера и содержащие избыточное число уравнений.
- Построены примеры дискретных искусственных граничных условий, дающих отражение падающих акустических волн $O(hs^2)$.

Литература

1. *Рябенский В.С.* Метод разностных потенциалов и его приложения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
2. *Rowley C.W., Colonius T.* Discretely nonreflecting boundary conditions for linear hyperbolic systems // J. Comput. Phys. 2000. Vol. 157. No.2. P. 500–538.
3. *Дородницын Л.В.* Искусственные граничные условия при численном моделировании дозвуковых течений газа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2005. Т.45. №7. С.1251–1278.
4. *Tam C.K.W., Webb J.C.* Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics // J. Comput. Phys. 1993. Vol. 107. No.2. P. 262–281.
5. *Dorodnicyn L.W.* Artificial boundary conditions for high-accuracy aeroacoustic algorithms // SIAM J. Sci. Comp. 2010. Vol. 32. No.4. P. 1950–1979.
6. *Дородницын Л.В.* Локальные неотражающие граничные условия в дифференциальных и разностных задачах // Современные проблемы математического моделирования. Сборник трудов XV Всероссийской конференции-школы молодых исследователей. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2013. С.77–83.
7. *Tam C.K.W., Webb J.C., Dong Zh.* A study of the short wave components in computational acoustics // J. Comput. Acoustics. 1993. Vol. 1. P. 1–30.

ВАРИАТИВНОСТЬ ОПОСРЕДОВАННОЙ РЕГУЛЯЦИИ ЕСТЕСТВЕННОЙ УБЫЛИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОМЫСЛОВЫХ ПОПУЛЯЦИЙ¹

Дубровская В.А., Переварюха А.Ю.

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН, Санкт-Петербург

Введение

Данная статья дополняет предложенный авторами на предыдущей конференции подход к описанию динамики численности поколения популяций на критических стадиях развития. Развивается прикладное применение динамически переопределяемых вычислительных структур. Подобные гибридные структуры основаны на использовании обыкновенных дифференциальных уравнений разрешенных относительно старшей производной с предикативно изменяемой формой правой частью. Эпизодически допустимы уравнения с отклоняющимся аргументом для описания особенностей регуляции завершающей стадии критического периода жизни, называемого часто «интервал уязвимости» $[0, T]$. Модель включает сопоставленное правым частям множество предикатов. Условия достижения смены режима поведения рассчитываются исходя из вспомогательного уравнения, считающего показателем размерного развития особей группы, связанный с уровнем конкурентного противоборства. В предыдущей работе мы явно изменяли в момент выделенного алгоритмом события темп убыли численности. Переходы между стадиями рассматривались резкими, скачкообразными изменениями эколого-физиологического состояния, как у молодежи некоторых видов рыб, которые мигрируют из рек и проходят подготовку к морскому периоду жизни. Нас интересовал аспект модели — у озимых субпопуляционных групп осетра и севрюги время речной миграции молодежи значительно дольше, чем у яровой группы, но озимая раса вносила ранее до деградации основной вклад в пополнение запасов. Актуальность такого представления процесса была обоснована в рамках проекта по моделированию аспектов сложного взаимодействия факторов в воспроизводстве осетровых рыб Каспия. Интересно получить оценку роли нарастающей репродуктивной изоляции отдельных форм в выраженной нелинейности кривой воспроизводства, неожиданно явно различных для севрюги и осетра.

Не для всех биологических видов с выраженной стадийностью переходы столь резки. Для морских крупных хищных рыб как треска скорее важен не

¹Разработано в рамках проекта РФФИ №16-37-00028 мол-а.

фактор доступности ресурсов жизнедеятельности, а достижения размеров избегания каннибализма. Для насекомых с неполным циклом превращений способным к массовым вспышкам две старшие стадии экологически не отличаются, а первая весьма краткая. Мы рассмотрим метод моделирования популяционной динамики при факторе опосредованной регуляции у скорости убыли численности поколения. При разработке новой модели положим, что совокупность изменений, которую мы называем «размерное развитие организмов» — крайне неравномерный процесс на ключевых этапах онтогенеза. Уравнения роста организмов ранее строились исходя из плавного протекания онтогенеза. Нарушение косвенной регуляции может рассматриваться как скрытый механизм отложенного запуска явления коллапса запасов у многовозрастных промысловых популяций семейства *Acipenseridae*, когда запас по подсчетам составленный из нескольких резервных поколений внезапно истощается и не возобновляется десятилетия.

I Три фактора регуляции восполнения на $t \in [0, T]$

В прошлом нами обсуждались особенности аппарата функциональных итераций часто применяемых для описания динамики развития популяционного процесса с нелинейной функцией эффективности воспроизводства $R = f(S)$. Обосновано, почему желательно избегать перехода к хаотическому режиму через бесконечный каскад бифуркаций периодов 2^i . Выделено отдельно, какие целевые критерии необходимы для такой функции в конкретном случае популяции волжской севрюги, и почему критерии не годятся для сига Онтарио [1]. В частности показано, что дискретные итерации с управляющим \mathbf{a} параметром $R_{n+1} = f(R_n; \mathbf{a})$ моделей Шепарда и/или Рикера обладают противоречивым качественным поведением траектории с точки зрения биологической интерпретации происходящих бифуркаций. Поставлен вопрос о принципиальной экологической интерпретируемости поведения ряда дискретных моделей — появления у их траектории циклов в порядке теоремы Шарковского, перемежающихся хаотическим движением.

Предлагается усовершенствовать дискретно-непрерывную вычислительную структуру для описания изменений режимов развития моделируемого процесса, к которым перспективно отнести существенные колебания скорости роста в раннем онтогенезе рыб. В дальнейшем возможно в сценарном анализе логики принятия экспертных решений при управлении промыслом реализовать предикативно переопределяемую событийную структуру модели на основе карты поведений.

Согласно анализу ситуации с субпопуляционными группами осетровых рыб, в новой модели восполнения запасов с механизмом опосредованной регуляции темпа убыли через неявные показатели целесообразно учесть взаимодействие трех факторов:

- I. Регуляцию показательно зависимой от плотности убыли текущей численности $N^k(t)$, $k \in (1, 2]$ на ранних стадиях развития рыб как фактора лимитированных ресурсов.
- II. Описание влияния на выживаемость скорости размерного развития, как фактора нестабильности действия ювенальной смертности на интервале уязвимости $0 < t \leq \mathcal{T}$, зависящей от квадрата численности.
- IIIа. Резкое, триггерное усиление действия линейной смертности в ограниченных интервалах состояния $S \in [0 + \epsilon, S \approx R_1^*)$ малочисленной локальной нерестовой группы с пороговым значением R_1^* . Функционально атрибутируется включение/выключение «фактора Олли» к нулевой стадии развития — оплодотворения икры (или откладки яиц у непартеногенетически размножающихся насекомых сем. Psillidae).

В перспективе совершенствования мы добавим еще один:

- IIIб. Вероятностный характер эффективности воспроизводства в окрестности порогового значения $R_1^* \pm \epsilon$. Роль случайных возмущений нарастает по мере удаления от неустойчивого порога $R_0 < R_1^*$, $R_{n+1} \rightarrow 0 + \epsilon$.

II Вариативность размерного развития в модели

Моделей роста организмов известно несколько, однако они не специфичны для условий раннего онтогенеза рыб (или насекомых отряда Hemiptera). Для нашей задачи актуальнее, чем непосредственно весовые характеристики, описание в уравнении убыли поколений взаимовлияния: условная скорость прироста $w(t) \iff \hat{N}(t)$ средняя плотность скопления особей, в локальном случае соотнесенная с численностью. Вопрос о влиянии кучности посадки на прирост молоди оказался не однозначен по имеющимся литературным данным. В первом приближении давление оценивалось нами как обратная дробно-степенная связь: $w(t) \sim N^{-k}(t)$, $0,5 < k < 1$. Различные эксперименты говорят о непропорциональной и более того — о немонотонной связи распределения навески с плотностью посадки молоди. Результаты в [2] о сдвиге влево максимума весового распределения молоди при разреженной плотности казались нелогичны, но могут объясняться из коллективных поведенческих реакций. Мы можем математически согласовать их с альтернативными данными, например в [3], показавшими, что при снижении плотности посадки при высоком уровне выживаемости молодь осетровых имеет минимальные коэффициенты вариации массы. Для отражения гипотетического нарушения плотностно-размерного взаимодействия воспользуемся сложной, лишенной симметрии зависимостью с двумя экстремумами $v(N)$ для давления численности молоди в водоеме на темпы ее развития, $v(0) = 0$.

Предложение 1. Пусть минимум следующей зависимости будет соответствовать оптимальным значениям скопления молоди.

$$v(N) = \frac{N}{z \exp(-bN(Pe^{-\rho N} + 1))} \quad (1)$$

Тогда необходимо учитывать и следующее:

Следствие 1. Так как предполагается $w(t) \sim G/v(N)$ и давление фактора плотности на темпы роста будет усиливаться ограниченно слева и неограниченно справа от пологого минимума $v(N_{min})$.

Обоснование в том, что «прореживания» популяций не приносят желаемого результата увеличения биомассы за счет высвобождения кормовой базы. Увеличение рациона молоди сверх достаточного объема не влияет на скорость роста [4]. Использование константы ресурсов G с сезонным переопределением известен, но не желательный способ.

III Расширенное балансовое уравнение развития

Описание с представлением об оптимуме развития представляется наилучшим решением. Константный оптимум w_0 достаточно условен ввиду споров специалистов о стандарте навески заводской молоди. Известная зависимость связи роста от времени, в форме, которая обычно используется в ихтиологии: $W_t = W_\infty (1 - \exp(-kt - x))^3$, где указывается предельный вес организма W_∞ не подходит нашим задачам. Исходное феноменологическое уравнение, предложенное фон Бергаланфи [5] результирующего действие анаболизма и катаболизма:

$$\frac{dW}{dt} = \eta \sqrt[3]{W(t)^\zeta} - kW(t)^\sigma, W(0) = W_0 \quad (2)$$

Решение для частного случая, если вклад катаболизма линеен $\sigma = 1$, а анаболизма для рыб как считают многие авторы соответствует показателю степени $\zeta = 2$ записывается:

$$W_t = \left(\eta/k - (\eta/k - W_0^{1/3}) \exp(-kt/3) \right)^3$$

Развитие в раннем онтогенезе осетровых видов носит стадийный характер и стадии сменяются быстро. Задержка в прохождении формирования организма влечет ухудшение его конкурентоспособности, что могло сказываться при массовом одномоментном выпуске. Действие на жизнестойкость поколения оказывает отклонение, которое получается в результате включения масштабированного давления плотности в расширенное уравнение:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\eta}{\xi v(N(t))} \sqrt[3]{w(t)^\zeta} - kw(t)^\sigma, w(0) = w_0 \quad (3)$$

и расчетом из традиционного уравнения фон Бергаланфи, не включающего внешние факторы. Модель при $v(0)$ неопределенна. Опишем убыль численности поколения $N(t)$ от исходной $N(0)$ до итогового промыслового пополнения $R = N(T)$ на интервале модельного времени $t \in [0, T]$ уравнением:

$$\frac{dN}{dt} = -(\alpha \Delta N(t) + \Psi(S)\beta) N(t) \quad (4)$$

где α – коэффициент компенсационной смертности связанный со скученностью; β – коэффициент не связанный с плотностью смертности. Начальные условия: $N(0) = \lambda S, w(0) = W(0)$ λ – усредненная плодовитость нерестового запаса S ; $t \in [0, T], R = N(T)$ интервал уязвимости действия квадратичного типа $\alpha N^2(t)$ типа убыли. Мы можем принять, что для мальковой стадии активного питания показатель σ отличается от единичного уровня до $5/4$ при $\zeta = 2\frac{1}{4}$. В уравнение убыли численности включен показатель масштабированного относительного отклонения $\Delta_t = 10^{-2} * W_t/w_t$ размерного развития.

Объединённые в систему дифференциальные уравнения опишут в вычислительной среде динамику убыли поколения при ограниченном влиянии функционала Ψ , роль которого мы обсуждали в предыдущем докладе.

IV Заключение

Так мы получим зависимость «кривую восполнения» с ненулевой горизонтальной асимптотой. Как и ранее кривая имеет две нетривиальные точки пересечения с биссектрисой координатного угла $R^* = f(R^*)$, удалённые от экстремумов. Но полученный в новой модификации дополнительный минимум позволяет уйти от критериев теоремы Синжера реализации бесконечного каскада бифуркаций удвоения периода цикла [6]. Знакопостоянство и условие $H_\psi < 0$ для дифференциального инварианта Шварца:

$$H_\psi = \frac{\psi'''(x)}{\psi'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{\psi''(x)}{\psi'(x)} \right)^2$$

нарушается при наличии таких экстремумов. Вместо аттрактора в виде канторовского множества и сопутствующего ему хаотического движения траектории в итерациях неунимодальных функций могут возникать одновременно сосуществующие притягивающие циклы. В работах по моделированию популяционной динамики использовалось свойство хаотизации. Однако, интерпретировать нужно не просто переход к аperiodическому режиму по Фейгенбауму [7], но появление нерегулярных всплесков хаотического движения при наличии несчетного числа периодических окон [8].

В результате построения модели мы можем анализировать последовательность непрерывных систем, связанных в момент переопределения начальных условий $N_{n+1}(0) = N_n(n)$ на множестве пронумерованных временных отрезков $\mathcal{T} \in \{[0, T]_n\}$. Фазовое пространство дискретно-непрерывной итерации разделено на две области притяжения Ξ_1 меньшая и Ξ_2 большая. Границей между ними является репеллерная точка R_1^* первого пересечения кривой с биссектрисой координатного угла. Эта особая точка отражает предельную допустимую для выживания популяции L численность нерестового стада. В экологическом смысле у Ξ_1 аттрактора не существует и в начале координат модельная зависимость неопределенна при $R_i \dots R_{i+n} \ll R_1^*$. Получено подтверждение гипотезе, что расширение модели популяций по набору включаемых факторов не обязательно влечет усложнение в поведении траектории полученной динамической системы. От чего модель не теряет своих прогностических возможностей.

Исследования поддержаны проектом РФФИ 16-37-00028 (СПИИРАН).

Литература

1. Дубровская В.А., Соловьева Т.Н., Переварюха А.Ю. Неустойчивое критическое равновесие в динамике сложно-структурированной популяции осетровых рыб // Системный анализ и прикладная информатика. 2016. N 1. С. 11–22.
2. Ryabova G.D. Variation in morphometric and genetic characteristics of stellate sturgeon juveniles raised at different densities // Russian Journal Genetics. 2006. N 2. P. 182–191.
3. Некрасова С.О., Яковлева А.П., Львов Л.Ф. Повышение рыбопродуктивных показателей выращивания молоди севрюги // Вестник Астраханского государственного технического университета. 2006. N 6. С. 245–253.
4. Гершанович А.Д. Экология и физиология молоди осетровых. Москва: Агропромиздат, 1987. 215 с.
5. von Bertalanffy L. Quantitative laws in metabolism and growth // The Quarterly Review Of Biology. 1957. Vol 32. N 3. P. 217–231.
6. Singer D. Stable orbits and bifurcations of the maps on the interval // SIAM journal of applied math. 1978. Vol. 35. P. 260–268.
7. Feigenbaum M.J. Universal behavior in nonlinear systems // Physica D. 1983. Vol. 7. N. 1. P. 16–39.
8. Дубровская В.А., Переварюха А.Ю. О критериях обоснованности для анализа нелинейных эффектов в моделях эксплуатируемых популяций // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. 2016. N. 48. С. 74–83.

АНГЛОЯЗЫЧНАЯ МАГИСТЕРСКАЯ ПРОГРАММА МЕХМАТА ЮФУ «COMPUTATIONAL MECHANICS AND INFORMATIONAL TECHNOLOGIES»¹

Карякин М.И., Надолин К.А., Наседкин А.В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

В работе обсуждается англоязычная междисциплинарная магистерская программа "Computational Mechanics and Informational Technologies" реализуемая в Институте математики, механики и компьютерных наук им. И.И.Воровича Южного федерального университета.

Разработка магистерской программы была поддержана Благотворительным фондом Владимира Потанина в рамках грантового конкурса 2016/2017 г. стипендиальной программы Фонда для преподавателей магистратуры в номинации «Создание новой магистерской программы». Набор студентов на программу состоится в 2018 году.

Введение

Математическое моделирование, как современный способ проведения научных исследований и проектирования сложных технических устройств, требует подготовки специалистов, обладающих компетенциями как в предметной области, так и в области современных информационных технологий, поскольку основным инструментом проведения вычислительных экспериментов является высокопроизводительный компьютер, оснащенный сложным наукоемким программным обеспечением.

Одна из проблем подготовки специалистов связана с тем, что до последнего времени молодые люди, поступающие в высшие учебные заведения, не видели карьерных перспектив в областях деятельности, связанных с научными исследованиями, наукоемким проектированием и высокотехнологичным производством. Поэтому популярность математического образования среди студентов в новое время существенно снизилась. Вместе с тем, остается весьма высоким среди выпускников бакалавриата спрос на программы обучения, связанные с информационно-коммуникационными технологиями. Также большой популярностью среди студентов пользуется изучение английского языка.

Эти обстоятельства позволяют надеяться, что англоязычная магистерская программа, сочетающая прикладную математику и механику с современными информационными технологиями и разработанная с учетом международных (европейских) стандартов, должна заинтересовать студентов и привлечь абитуриентов в магистратуру мехмата ЮФУ.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Благотворительного фонда Владимира Потанина

I Концепция магистерской программы

Основной целью является разработка на основе накопленного опыта, кадрового потенциала и имеющегося учебно-методического и материально-технического задела Института математики, механики и компьютерных наук ЮФУ англоязычной магистерской программы, когерентной магистерским программам европейских университетов-партнеров, входящих в Европейский Консорциум Индустриальной Математики (European Consortium for Mathematics in Industry – ЕСМІ) [1], и прежде всего, магистерской программе "Computational Engineering and Technical Physics" реализуемой в финском Технологическом университете г. Лаппеенранты (Lappeenranta University of Technology – LUT). Под когерентностью понимается близость, но не идентичность, как набора учебных модулей, так и организации образовательных мероприятий.

Выбор партнерского университета объясняется тем, что мехмат ЮФУ сотрудничает с Отделением математики и физики Школы Инженерных наук LUT более 10 лет. Новая программа будет способствовать развитию партнерских связей с европейскими университетами, повышению спроса среди абитуриентов на образовательные услуги мехмата ЮФУ и усилению мотивации студентов к обучению на направлениях подготовки «Прикладная математика и информатика» и «Механика и математическое моделирование».

В процессе реализации программы планируется использовать партнерские связи с европейскими университетами. Включение в учебный процесс на регулярной основе академической мобильности в зарубежные вузы будет мотивировать студентов и преподавателей повышать уровень владения профессиональным иностранным языком. Общение с иностранными студентами и преподавателями будет стимулировать наших студентов глубже осваивать профессиональные знания и навыки, а преподавателей расширять научный кругозор и повышать уровень профессиональной подготовки. Развитие международной академической мобильности с перспективой получения второго диплома европейского университета должно существенным образом повысить мотивацию студентов к учебе и создать условия «встречной мобильности» для студентов зарубежных университетов, не владеющих русским языком.

II Сравнение ФГОС и ЕСМІ Model Master in Mathematics for Industry

Разрабатываемая англоязычная магистерская программа "Computational Mechanics and Informational Technologies" должна быть близка по структуре и содержанию магистерским программам европейских университетов-партнеров.

При разработке англоязычной магистерской программы требуется решить весьма не простую задачу сопряжения требований ФГОС РФ и требований к магистерским программам, принятым Консорциумом европейских университетов (ЕСМІ Model Master in Mathematics for Industry) [1]. Замечим, что механическое соединение указанных требований невозможно, поскольку они отражают разные подходы к решению ряда организационных и учебно-методических задач. Однако и ФГОС РФ, и модель ЕСМІ допускают определенную гибкость и свободу реализации образовательных программ магистратуры, что позволяет найти пути решения поставленной задачи.

В Таблице 1 представлена информация о структуре программы магистратуры в соответствии с ФГОС программ магистратуры по направлениям подготовки 01.04.02 – «Прикладная математика и информатика» [2], 01.04.03 – «Механика и математическое моделирование» [3] и 02.04.02 – «Фундаментальная информатика и информационные технологии» [4].

Таблица 1.

Структура программы магистратуры по ФГОС		Объем в зачетных единицах
Блок 1	Дисциплины (модули)	60-63
	В том числе:	
	базовая часть	21
	вариативная часть	39-42
Блок 2	Практики, в том числе научно-исследовательская работа (НИР)	48-54
	В том числе:	
	вариативная часть	48-54
Блок 3	Государственная итоговая аттестация	6-9
	В том числе:	
	базовая часть	6-9
Объем программы магистратуры		120

В Таблице 2 представлена ЕСМІ Model Master in Mathematics for Industry – рекомендованная ЕСМІ структура магистерской программы по прикладной математике [5].

Сравнительный анализ данных Таблиц 1 и 2 показывает, что требования ФГОС РФ и рекомендованная ЕСМІ структура магистерской программы европейских университетов, хотя и различаются по ряду позиций, но не противоречат друг другу. Кроме того, в модели ЕСМІ уделено особое внимание практикоориентированной подготовке студентов. Поэтому важным элементом магистерской программы "Computational Mechanics and Informational Technologies" станет включение в учебный процесс различных форм проектной деятельности студентов. Предполагается использовать опыт европейских партнеров по проведению «Недель моделирования»

Таблица 2.

ECMI Model Master in Mathematics for Industry TECHNOMATHEMATICS		ECTS
Block A:	Recommended prerequisites to enter the Master programme Basic knowledge in calculus Linear Algebra Some basics in numerical analysis Programming skills Basic knowledge in physics or mechanics Basics in statistics	48 18 6 6 6 6 6
Block B:	The student is recommended to get at least a half of the listed topics before entering the Master. The remaining topics should be taken during the Master study Transforms, linear systems, basics in ODE Basics in PDE Numerics for differential equations Minor field of study related to mathematics	48-54 6 6 6 6
Block C:	Elective courses in the field of industrial mathematics. Every student can choose among offered specialization courses at his home university or at an ECMI partner university. Recommendations: Mathematical courses Courses in a minor field of study related to mathematics	48-60 42-45 12-15
Block D:	Modelling activities Regular modeling seminar Other modelling activities (e.g. summer schools, industrial projects, study groups, internships etc.) ECMI International Modelling week	18 6-15 0-9 3
Block E:	Master thesis: The thesis should be related to a real industrial problem. It could preferably be carried out in an interdisciplinary environment involving participants from industry, and must have a nontrivial mathematical content.	30
Total amount of programme		120

("Modelling Weeks"), организации «Исследовательских групп» ("Study Groups"), а также собственный опыт мехмата по организации и проведению ежегодной студенческой научной конференции ЮФУ «Неделя науки», других научных мероприятий, где студенты получают возможность публичной презентации своих самостоятельно полученных научных результатов.

Особую роль при организации проектного обучения могут сыграть электронные ресурсы, связанные с инициативными научными исследованиями и разработкой наукоемкого программного обеспечения, реализуемые через Интернет. Примером таких проектов могут быть «Исследовательские группы» ("Study Groups"), объединяющие членов ЕСМІ и функционирующие с 1968 г. [6]. Другим примером является большое количество проектов Free Software Foundation [7] или Массачусетского Технологического Института [8].

Общая с европейскими партнерами тематика обучения и близость направлений профессиональной подготовки специалистов позволят совместно использовать электронные образовательные ресурсы в режиме удаленного доступа, а также будут способствовать приобретению студентами компетенций по работе в интернациональных командах и развитию межкультурных коммуникаций.

III Кадровая и материально-техническая база

Институт математики, механики и компьютерных наук ЮФУ располагает необходимыми для реализации программы кадрами, технологиями и материально-техническими ресурсами.

Профессорско-преподавательский состав Института насчитывает 99 человек, из которых 44 доктора наук, профессора и 55 кандидаты наук, доценты.

В Институте имеется и используется в учебном процессе следующее оборудование, программное и информационное обеспечение:

- 12 компьютерных классов, оснащенных современными персональными компьютерами и презентационным оборудованием, включая интерактивные доски. Компьютерные классы и компьютеры кафедр и лабораторий соединены в единую локальную сеть, в составе которой функционируют мощные вычислительные кластеры.
- 4 Linux-кластера, обслуживаемые единой диспетчерской системой управления заданиями OpenPBS.
- 2 конференц-зала, оснащенные мощным стационарным презентационным оборудованием, включая оборудование для проведения видеоконференций.

- 4 большие лекционные аудитории, оснащенные мощным стационарным презентационным оборудованием.
- 15 кафедральных мобильных презентационных комплектов, включающих переносной экран и мультимедийный проектор, что позволяет организовать занятие-презентацию в любой аудитории.
- библиотека с читальным залом на 50 мест, оснащенным компьютерами для входа в библиотечную информационную сеть ЮФУ с возможностью подписного доступа к многочисленным электронным базам данных.
- бессрочные неограниченные лицензии использования современных и весьма дорогостоящих программных продуктов для сложных научных и инженерных расчетов (ANSYS, CFX, MSC Software, ABAQUS, COMSOL).

IV Дисциплины специализации

При формировании структуры учебных дисциплин применяется европейский подход, когда внутри одной магистерской программы предусмотрена «старшая» (major) и «младшая» (minor) специализация. Подобный подход широко используется в зарубежных вузах, и в частности, в университетах-партнерах консорциума ЕСМІ. Такая структура магистерской программы, а также большой набор предлагаемых дисциплин специализации единой трудоемкости 5 ECTS позволит гибко строить индивидуальные траектории обучения студентов и формировать компетенции, относящиеся к выбранным направлениям подготовки.

В Таблице 3 представлены дисциплины специализации и учебные модули разрабатываемой магистерской программы

Заключение

В заключении отметим, что мехмат ЮФУ имеет все условия и хороший задел для успешной реализации англоязычной междисциплинарной магистерской программы. С 2009 г. на мехмате разрабатываются и внедряются в учебный процесс англоязычные дисциплины и учебные модули. Важную роль в развитии процесса интернационализации обучения на мехмате ЮФУ сыграл международный проект «Интернационализация учебных планов на уровне магистра в российских вузах в Южном регионе» ("Internationalized Curricula Advancement at Russian Universities in the Southern region" – ICARUS), который выполнялся в 2011-2014 гг. по программе ЕС Tempus-IV [8]. В этом проекте, объединившем 4 российских и 4 европейских университета, мехмат ЮФУ выступал головным участником от российских вузов.

Таблица 3.

Дисциплины специализации и учебные модули		ECTS
Базовая часть		
Б1.Б.1	Modern problems of Applied Mathematics and Informatics	5
Б1.Б.2	Mathematical Models of Computational Mechanics and Biomechanics	5
Б1.Б.3	Иностраный язык	4
Б1.Б.4	Modern Computer Technologies	5
Б1.Б.5	Seminar IT in Engineering	5
Вариативная часть (обязательные дисциплины)		
Б1.В.ОД.1	Mathematical Modeling of Information Systems and Processes	5
Б1.В.ОД.2	Advanced Problems of the Mathematical Physics	5
Б1.В.ОД.3	Modern numerical methods in mathematical modeling	5
Б1.В.ОД.4	Numerical methods of linear algebra	5
Вариативная часть (дисциплины по выбору)		
Б1.В.ДВ.1	Модуль университетской академической мобильности	3
Б1.В.ДВ.2	Stochastic modeling and statistical data processing	5
Б1.В.ДВ.3	Mathematical models for biological fluids	5
Б1.В.ДВ.4	Parallel and distributed programming	5
Б1.В.ДВ.5	Computer algebra methods and its applications	5
Б1.В.ДВ.6	Pattern recognition and machine learning. The mathematical basis	5
Факультативные дисциплины		
Б1.В.ДВ.7	Quantum Computing	5
Б1.В.ДВ.8	Cross-platform Application	5
Б1.В.ДВ.9	Mobile Development	5
Б1.В.ДВ.10	Object-oriented design and programming on C++	5
Вариативная часть (НИР и практики)		
Б5.Н.1-4	Научно-исследовательская работа	30
Б5.П.1	Модуль проектной деятельности	9
Б5.П.2	Преддипломная научно-исследовательская практика	9

Внедрение англоязычной междисциплинарной магистерской программы "Computational Mechanics and Informational Technologies" будет естественным продолжением деятельности коллектива мехмата ЮФУ по практическому развитию интернационализации обучения, что соответствует приоритетам Программы развития Южного федерального университета.

Литература

1. *Интернет-ресурс* <https://ecmiindmath.org/education/>
2. Приказ Минобрнауки России от 28 августа 2015 года № 911 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика (уровень магистратуры)» // *Интернет-ресурс* <http://минобрнауки.рф/документы/6496>
3. Приказ Минобрнауки России от 23 сентября 2015 г. № 1045 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 01.04.03 Механика и математическое моделирование (уровень магистратуры)»
4. Приказ Минобрнауки России от 17 августа 2015 года № 830 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 02.04.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии (уровень магистратуры)» // *Интернет-ресурс* <http://минобрнауки.рф/документы/6472>
5. *Интернет-ресурс* <https://ecmiindmath.org/education/ecmi-model-master-in-mathematics-for-industry/>
6. *Интернет-ресурс* <https://ecmiindmath.org/study-groups/>
7. *Интернет-ресурс* <http://www.fsf.org/campaigns/priority-projects/>
8. *Интернет-ресурс* <https://sourceforge.net/projects/mitopensource/>
9. Карякин М.И., Надолин К.А., Наседкин А.В. Реализация в рамках проекта ICARUS магистерских программ «IT in Engineering» с перспективой присуждения двух дипломов // Материалы XIII Межд. научно-метод. конф. «Информатика: проблемы, методология, технологии», г. Воронеж, 7-8 февраля 2013 г. Т. 4. С. 154–157

РАСЧЕТ ЗАДАЧИ МИКРОМАСШТАБНОЙ МОДЕЛИ АТМОСФЕРЫ ДЛЯ НЕСЖИМАЕМОЙ СРЕДЫ¹

Кондаков В.Г.

*Институт проблем безопасного развития атомной
энергетики РАН, Москва*

Введение

В работе [1] была предложена новая конечно-разностная модель слабо сжимаемой среды в условиях городской застройки. Методика позволяет рассчитывать дозвуковое течение среды введением искусственной скорости звука, таким образом, чтобы максимальная скорость в расчетной области не превышала 0.1 Маха. При таком подходе плотность оказывается почти постоянной, поскольку девиация плотности не превысит 1% ($\delta\rho/\rho \sim M^2 \leq 0.01$). Схема при этом остается явной и условно-устойчивой при выполнении условий Куранта-Фридрихса-Леви. В силу специфики LES-подхода приходилось следить за тем, чтобы задача насчитала до квазистационарного режима при заданных начальных и граничных условиях. Потом после перезапуска продолжать счет с процедурой осреднения данных для набора статистики по средним скоростям и среднеквадратичным отклонениям.

Менее затратным в плане вычислений оказался RANS-подход [2, 3] с введением замыкающих уравнений на турбулентную кинетическую энергию и скорость ее диссипации. В общем виде система уравнений на кинетическую энергию получается из предположения, что средние величины скорости выходят на стационарный режим. Модели турбулентности в замыкании $k - \epsilon$ уравнений отличаются друг от друга способом аппроксимации правых частей, содержащих генерацию, диссипацию и транспортную часть. Транспортная часть для уравнения турбулентной кинетической энергии представляет собой диффузию турбулентности в соответствии с предположением, что турбулентность распространяется из регионов с высокой турбулентностью в области с низкой турбулентностью. Отличают высокорейнольдсовые модели [2] и низкорейнольдсовые [3]. Термин «низкорейнольдсовая» относится не ко всей области течения, а только к пристеночной области, где доминируют вязкие эффекты, то есть в области вязкого подслоя. Низкорейнольдсовая модель турбулентности позволяет корректно рассчитать асимптотическое поведение различных характеристик потока. Корректная асимптотика означает, что модель может использоваться для расчета течения по всей толщине погранслоя, в том числе вязком подслое и буферном слое.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-00250 мол-а

Уравнения Рейнольдса можно использовать для расчета поля скорости во всех четырех областях турбулентного пограничного слоя. Однако, так как толщина вязкого и буферного слоев очень мала, решить уравнения в области этих слоев может быть крайне затруднительно. С помощью использования пристеночных функций можно отказаться от решения уравнений Рейнольдса в буферной области и аналитически рассчитать скорость вблизи стенки. Таким образом, мы должны иметь аналитическое выражение для расчета скорости в вязком подслое, тогда требования к вычислительным ресурсам, необходимым для решения уравнений Рейнольдса, можно существенно снизить. В высокорейнольдсовой модели $k - \epsilon$ буферный слой не моделируется, для расчета скорости у стенки используются пристеночные функции.

I Высокорейнольдсовая $k - \epsilon$ модель

Осредненные уравнения Навье-Стокса в предположении слабой сжимаемости замкнуты уравнениями сохранения турбулентной кинетической энергии k и ее диссипации ϵ записываются в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0, \\ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) + \nabla p = \mu_T \Delta \mathbf{v}, \\ \frac{\partial k}{\partial t} + \nabla(k \mathbf{v}) = \nabla \left(\frac{\mu_T}{\sigma_k} \nabla k \right) + S - \epsilon, \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \nabla(\epsilon \mathbf{v}) = \nabla \left(\frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \nabla \epsilon \right) + \frac{\epsilon}{k} C_1 S - C_2 \frac{\epsilon^2}{k}, \\ \mu_T = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}, S = \mu_T \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \end{cases} \quad (1)$$

Эта модель турбулентности впервые была предложена в работе [2] Лаундером и Сполдингом (1974), которые рекомендуют использовать следующие параметры:

$$C_\mu = 0.09, C_1 = 1.44, C_2 = 1.92, \sigma_k = 1.0, \sigma_\epsilon = 1.3 \quad (2)$$

Помимо самих уравнений модель требует задания, т.н., пристеночной функции, которое задает граничное условие на стенках с условием прилипания. В качестве пристеночной функции предложенную в работе [4]:

$$\begin{aligned} u(\Delta) &= \frac{u_*}{\kappa} \left(\ln \left(\frac{\Delta}{r} \right) + \phi(S) \right), \\ k &= \frac{u_*^2}{\sqrt{C_\mu}}, \\ \epsilon &= \frac{u_*^3}{\kappa \Delta}. \end{aligned} \quad (3)$$

В этих уравнениях: u_* – динамическая скорость, $\kappa = 0.41$ – постоянная Кармана, k – кинетическая энергия турбулентности, ϵ – диссипация кинетической энергии турбулентности, Δ – расстояние до шероховатой поверхности, r – шероховатость поверхности, ϕ – эмпирическая константа,

зависящая от класса устойчивости атмосферы. Введем вектор переменных $\psi = (\rho, u, v, w, k, \epsilon)^T$ в виде система уравнений (1) принимает вид:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z} = \mathbf{Q}$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ k \\ \epsilon \end{pmatrix}, \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ uk \\ u\epsilon \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ vk \\ v\epsilon \end{pmatrix}, \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho w \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ wk \\ w\epsilon \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_T \Delta u \\ \mu_T \Delta v \\ \mu_T \Delta w \\ \nabla \left(\frac{\mu_T}{\sigma_k} \nabla k \right) + S - \epsilon \\ \nabla \left(\frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \nabla \epsilon \right) + \frac{\epsilon}{k} C_1 S - C_2 \frac{\epsilon^2}{k} \end{pmatrix}, \mu_T = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$$
(4)

II Низкорейнольдсовая $k - \epsilon$ модель

Данная модель в отличие от высокорейнольдсовой модели не использует пристеночные функции, заменяя их демпфирующими функциями. Следующая система уравнений носит название низкорейнольдсовой турбулентно-

сти Лаундера и Шарма ([3]):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \nabla (u_i \mathbf{v}) + \frac{\partial p}{\partial x_j} = \nabla [(\nu + \nu_T) \nabla u_i], \\ \frac{\partial k}{\partial t} + \nabla (k \mathbf{v}) = \nabla \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + S - \epsilon, \\ \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial t} + \nabla (\epsilon \mathbf{v}) = \nabla \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \tilde{\epsilon} \right] + \frac{\tilde{\epsilon}}{k} f_1 C_1 S - f_2 C_2 \frac{\tilde{\epsilon}^2}{k} + E, \\ \nu_T = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\tilde{\epsilon}}, S = \nu_T \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \\ \epsilon = \tilde{\epsilon} + D, \\ f_\mu = \exp \left[\frac{-3.4}{(1+R_T/50)^3} \right], \\ f_1 = 1, \\ f_2 = 1 - 0.3 \exp(R_T^2), \\ D = 2\nu \left[\left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial z} \right)^2 \right], \\ E = 2\nu \nu_T \left[\left(\frac{\partial \sqrt{S/\nu_T}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sqrt{S/\nu_T}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sqrt{S/\nu_T}}{\partial z} \right)^2 \right], \\ R_T = \frac{k^2}{\nu \tilde{\epsilon}}. \end{array} \right. \quad (5)$$

Перепишем ее в матричном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z} = \mathbf{Q}$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ k \\ \epsilon \end{pmatrix}, \mathbf{E} = \begin{pmatrix} u^2 \\ uv \\ uw \\ uk \\ u\tilde{\epsilon} \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} uv \\ v^2 \\ vw \\ vk \\ v\tilde{\epsilon} \end{pmatrix}, \mathbf{G} = \begin{pmatrix} uw \\ vw \\ w^2 \\ wk \\ w\tilde{\epsilon} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} \left((\nu + \nu_T) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \left((\nu + \nu_T) \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \left((\nu + \nu_T) \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \left((\nu + \nu_T) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + S - \tilde{\epsilon} - D \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \left((\nu + \nu_T) \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial x_i} \right) + \frac{\tilde{\epsilon}}{k} f_1 C_1 S - f_2 C_2 \frac{\tilde{\epsilon}^2}{k} + E + \frac{D}{\tau} \end{pmatrix},$$

III Разностная схема КАБАРЕ

Разностное уравнение является неявным, поэтому чтобы разрешить ее здесь применяется метод предиктор-корректор, где первый шаг-предиктор будет вычислять промежуточные значения консервативных, второй шаг-корректор вычисляет консервативные переменные на новом временном слое. Остается определить вычисление потоковых переменных, участвующих в

шаге-корректоре. Эту процедуру будем вычислять с помощью характеристических уравнений.

Шаг № 1. Предиктор

$$\frac{\tilde{\mathbf{U}}_C^{n+1/2} - \tilde{\mathbf{U}}_C^n}{0.5\tau} + \frac{\mathbf{F}_R^n - \mathbf{F}_L^n}{x_{i+1} - x_i} + \frac{\mathbf{G}_T^n - \mathbf{G}_B^n}{y_{j+1} - y_j} + \frac{\mathbf{H}_F^n - \mathbf{H}_N^n}{z_{k+1} - z_k} = 0. \quad (7)$$

где нижние индексы означают следующие точки шаблона

$$\begin{aligned} f_C &= f_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}, \\ f_R &= f_{i+1, j+1/2, k+1/2}, f_L = f_{i, j+1/2, k+1/2} \\ f_T &= f_{i+1/2, j+1, k+1/2}, f_B = f_{i+1/2, j, k+1/2} \\ f_F &= f_{i+1/2, j+1/2, k+1}, f_N = f_{i+1/2, j+1/2, k}. \end{aligned} \quad (8)$$

Шаг № 2. Учет Вязкости

$$\frac{\tilde{\mathbf{U}}_C^{n+1/2} - \tilde{\mathbf{U}}_C^n}{\tau} = \tilde{\mathbf{Q}}_C^{n+1/2}. \quad (9)$$

Шаг № 3. Нелинейная коррекция потоков

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{I}}_x)^{n+1} &= (\mathbf{I}_x)_C^{n+1/2} - (\mathbf{I}_x)_R^n, (\tilde{\mathbf{I}}_x)^{n+1} = (\mathbf{I}_x)_C^{n+1/2} - (\mathbf{I}_x)_L^n, \\ (\tilde{\mathbf{I}}_y)^{n+1} &= (\mathbf{I}_y)_C^{n+1/2} - (\mathbf{I}_y)_T^n, (\tilde{\mathbf{I}}_y)^{n+1} = (\mathbf{I}_y)_C^{n+1/2} - (\mathbf{I}_y)_B^n, \\ (\tilde{\mathbf{I}}_z)^{n+1} &= (\mathbf{I}_z)_C^{n+1/2} - (\mathbf{I}_z)_F^n, (\tilde{\mathbf{I}}_z)^{n+1} = (\mathbf{I}_z)_C^{n+1/2} - (\mathbf{I}_z)_N^n, \\ (\mathbf{I}_x)_L^{n+1} &= \min \left[\max \left\{ \mathbf{I}_{\min}, (\tilde{\mathbf{I}}_x)_L^{n+1} \right\}, \mathbf{I}_{\max} \right], \\ (\mathbf{I}_x)_R^{n+1} &= \min \left[\max \left\{ \mathbf{I}_{\min}, (\tilde{\mathbf{I}}_x)_R^{n+1} \right\}, \mathbf{I}_{\max} \right], \\ (\mathbf{I}_y)_B^{n+1} &= \min \left[\max \left\{ \mathbf{I}_{\min}, (\tilde{\mathbf{I}}_y)_B^{n+1} \right\}, \mathbf{I}_{\max} \right], \\ (\mathbf{I}_y)_T^{n+1} &= \min \left[\max \left\{ \mathbf{I}_{\min}, (\tilde{\mathbf{I}}_y)_T^{n+1} \right\}, \mathbf{I}_{\max} \right], \\ (\mathbf{I}_z)_N^{n+1} &= \min \left[\max \left\{ \mathbf{I}_{\min}, (\tilde{\mathbf{I}}_z)_N^{n+1} \right\}, \mathbf{I}_{\max} \right], \\ (\mathbf{I}_z)_F^{n+1} &= \min \left[\max \left\{ \mathbf{I}_{\min}, (\tilde{\mathbf{I}}_z)_F^{n+1} \right\}, \mathbf{I}_{\max} \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Шаг № 4. Корректор

$$\frac{\tilde{\mathbf{U}}_C^{n+1} - \tilde{\mathbf{U}}_C^{n+1/2}}{0.5\tau} + \frac{\mathbf{F}_R^{n+1} - \mathbf{F}_L^{n+1}}{x_{i+1} - x_i} + \frac{\mathbf{G}_T^{n+1} - \mathbf{G}_B^{n+1}}{y_{j+1} - y_j} + \frac{\mathbf{H}_F^{n+1} - \mathbf{H}_N^{n+1}}{z_{k+1} - z_k} = 0. \quad (11)$$

IV Тестовые расчеты

Эксперимент серии А, А1 используется для верификации микромасштабных метеорологических моделей, предназначенных для расчета аэродинамики в условиях городской застройки. Препятствие имеет форму параллелепипеда. Размеры препятствия имеют размеры $20 \times 30 \times 25$ м. Измерительная сеть располагалась в двух плоскостях – горизонтальной и вертикальной. На горизонтальной плоскости измерялась продольная и поперечная основному потоку компоненты скорости ветра. На вертикальной плоскости измерялась продольная и вертикальная компоненты скорости ветра. Полная кинетическая энергия турбулентности доступна с датчиков, лежащих в обеих плоскостях, расположенных на вертикальной линии, на высоте 7 метров от земли по центру туннеля. Общее количество точек измерений в этом эксперименте 1246. Скорость ветра на высоте 100 м была равна 6 м/с, параметр шероховатости был равен 0.14 м, входной профиль ветра задавался степенной зависимостью $U(z) = U_{ref} \left(\frac{z}{H_{ref}} \right)^\alpha$, где $\alpha = 0.21$.

Таблица 1. Статистические критерии. Вертикальное сечение $y = 0$.

Критерий	LES		RANS-1		RANS-2		Эталон
	U	W	U	W	U	W	
FA-2	71%	86%	91%	96%	91%	96%	100%
HR	64%	87%	87%	95%	87%	95%	100%
BIAS	-0.35	0.185	0.29	0.05	0.53	-0.005	0
PCC	0.92	0.82	0.94	0.87	0.97	0.85	1
SAA	10.6		6.2		5.4		0

Таблица 2. Статистические критерии. Горизонтальное сечение $z/H = 0.28$.

Критерий	LES		RANS-1		RANS-2		Эталон
	U	V	U	V	U	V	
FA-2	74%	86%	80%	91%	91%	94%	100%
HR	59%	87%	65%	91%	87%	97%	100%
BIAS	-0.29	0.18	-0.27	-0.13	0.39	-0.044	0
PCC	0.86	0.82	0.87	0.84	0.96	0.91	1
SAA	12.4		7.2		6.5		0

В Таблицах 1 и 2 приведены статистические данные сравнения с экспериментом по трем различным моделям. LES – это расчет проведенный по модели без турбулентности, RANS-1 – расчет проведенный по высокорейнольдсовской модели, RANS-2 расчет проведенный по низкорейнольдсовской модели. Размеры сеток соответственно были LES – $280 \times 148 \times 66$ с шагом 1м, RANS-1 – $140 \times 74 \times 33$ с шагом сетки 2м, RANS-2 – $298 \times 92 \times 84$ с шагом сетки 1 м и сгущением возле стенок и дна в 10 ячеек на 1 м.

Заключение

В настоящей работе были предложены две модели $k - \epsilon$ турбулентности: высокорейнольдсовая, низкорейнольдсовая. Как показали тестовые расчеты, низкорейнольдсовая модель оказалась более близкой к эксперименту по сравнению с высокорейнольдсовой моделью турбулентности и моделью слабосжимаемой среды. Единственным требованием к низкорейнольдсовой модели является обязательное разрешение вязкого подслоя хотя бы одной ячейкой, размером с шероховатостью. С практической точки зрения выход на стационарное решение в низкорейнольдсовой модели происходит за большее количество шагов, чем в высокорейнольдсовой, но при этом мы получили количественно лучший результат. При современном развитии технологии параллельного счета с распределенной памятью мы получаем возможность получения отличных результатов за время порядка одних суток на кластере с 128 ядрами. Для модели среды с уравнением состояния слабосжимаемой среды на грубых сетках мы можем получить лишь качественный ответ на интересующие нас вопросы. Для более детального описания структуры течения тем более количественного совпадения с экспериментом необходимо делать разрешение сетки с размером порядка 1 см, что сразу делает практически невыполнимой расчет задачи в размерах городской застройки. Поэтому считая, что полученные модели $k - \epsilon$ турбулентности являются адекватными современным требованиям к прогнозу и могут быть применены к широкому кругу задач ввиду простоты и ясности алгоритма схемы. Следующим этапом в развитии данной методики видится создание блока переноса примесей с учетом гравитационного осаждения на поверхности зданий и обобщения схемы на случай произвольных выпуклых многоугольников для более детального описания характеристик городской застройки.

Литература

1. *Кондаков В.Г.* Гидродинамика в приближении слабой сжимаемости в условиях городской застройки. тезисы доклада международной конференции СКТЕММ-2016.
2. *Launder B.E. and Spalding D.B.* The numerical computation of turbulent flows // Comput.Meths. Appl. Mech. Eng. 1974. N 3. P. 269–289.
3. *Launder B.E. and Sharma B.T.* Application of the energy dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc // Lett. Heat and Mass Transfer 1974. N 1. P. 131–138.
4. Sondak, Douglas L., Wall functions for the $k - \epsilon$ turbulence model in generalized nonorthogonal curvilinear coordinates 1992). Retrospective Teses and Dissertations. Paper 9954

ПРЕДОУБСЛАВЛИВАТЕЛЬ С ПРОЕКТОРАМИ ДЛЯ СМЕШАННОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Крамаренко В.К.

*Институт Вычислительной Математики Российской
Академии Наук, Москва*

Введение

В данной статье, мы приводим результаты численных экспериментов для методов, описанных в статье [4], на примере простейшей модельной задачи диффузии в квадрате на квадратной сетке.

I Постановка задачи

Рассмотрим классическое уравнение диффузии с граничными условиями Неймана

$$\begin{aligned} -\nabla(D\nabla p) &= f \quad \text{in } \Omega, \\ -(D\nabla p) \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (1)$$

где Ω – многоугольник/многогранник в области $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$ с границей $\partial\Omega$, \mathbf{n} – внешняя нормаль единичной длины к $\partial\Omega$, $D = D(\mathbf{x})$ – тензор диффузии, и $f = f(\mathbf{x})$ – функция источника.

Задача (1) является типичной для описания многих физических процессов, таких как фильтрация воды или нефти сквозь горные породы.

Рассмотрим задачу (1) в смешанной формулировке, вводя переменную потока $\mathbf{u} = -D^{-1}\nabla p$:

$$\begin{aligned} D^{-1}\mathbf{u} + \nabla p &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= f \quad \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (2)$$

II Дискретизация

В области Ω введем конформную симплициальную (треугольную/тетраэдральную) сетку Ω_h . Для аппроксимации задачи (2) на Ω_h мы используем смешанные гибридные методы конечных элементов Равьяр-Тома (RT_0 метод) [2] или метод PWCF[1].

В результате применения данных методов дискретизации получим линейную систему уравнений [2, 3]:

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{p} \\ \bar{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\bar{F} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

с матрицей

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} M & B^T & C^T \\ B & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

При определенной нумерации переменных для потоков матрица M является блочно-диагональной матрицей с блоками $3 \times 3 / 4 \times 4$. Исключая в (3) переменные, связанные с потоками, мы получаем конденсированную систему:

$$S \begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{\lambda} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} S_{pp} & S_{p\lambda} \\ S_{\lambda p} & S_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

с симметричной положительно полуопределенной матрицей

$$S = \begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix} M^{-1} \begin{bmatrix} B^T & C^T \end{bmatrix} \quad (6)$$

Отметим, что S_{pp} является диагональной матрицей. Поэтому вектор \bar{p} в (5) также можно исключить, получив систему

$$S_{\lambda\lambda} \bar{\lambda} = \bar{G} \quad (7)$$

с матрицей

$$S_{\lambda\lambda} = S_{\lambda\lambda} - S_{\lambda p} S_{pp}^{-1} S_{p\lambda} \equiv \sum_{k=1}^m N_{\lambda,k} S_{\lambda,k} N_{\lambda,k}^T \quad (8)$$

где $S_{\lambda,k}$ – матрицы для подобластей E_k и $N_{\lambda,k}$ – соответствующие матрицы ассемблирования $k = \overline{1, m}$.

III Разбиение на подобласти

Разобьем Ω на $m > 1$ непересекающихся многоугольников/многогранников E_k , $k = \overline{1, m}$, и обозначим $\Gamma_{k,l}$ интерфейсы между E_k и E_l , т.е. $\Gamma_{k,l} = \partial E_k \cap \partial E_l$, $k < l$, $k, l = \overline{1, m}$. Для простоты предположим, что многоугольники/многогранники E_k выпуклы, а $D \equiv D_k = d_k I_k$ являются скалярными тензорами в каждой подобласти E_k (I_k единичная матрица соответствующей размерности). Разбиение на подобласти предполагается конформным по отношению к сеточному разбиению Ω_h .

Вследствие конформности границ для каждой подобласти можно составить свои матрицы \mathcal{A}_k , S_k и $S_{\lambda,k}$, используя тот же метод дискретизации. Тогда матрица S_λ может быть записана в виде

$$S_\lambda = \sum_{k=1}^m N_k S_{\lambda,k} N_k^T \tag{9}$$

где N_k матрицы ассемблирования, задающие связи между локальной и глобальной нумерациями, $S_{\lambda,k}$ – конденсированные матрицы для каждой подобласти E_k , $k = \overline{1, m}$. Очевидно, что матрицы $S_{\lambda,k}$ и S_λ вырождены, и их ядра (нуль-пространства) состоят из векторов с константными компонентами, то есть состоят из векторов, пропорциональных соответствующим векторам \bar{e} , где $\bar{e}^T = (1, 1, \dots, 1)$.

IV Построение преобуславливателя

Рассмотрим обобщенную проблему собственных значений

$$S_{\lambda,k} \bar{w} = \mu M_k \bar{w}, \quad k \geq 1 \tag{10}$$

где M_k диагональная $m_k \times m_k$ матрица с положительными диагональными элементами (m_k – размерность $S_{\lambda,k}$). Обозначим $\mu_{k,i}$, $i = \overline{1, m_k}$ – собственные значения в (10), а Λ_k – диагональную матрицу с этими значениями, упорядоченными в порядке неубывания (заметим, что $0 = \mu_{k,1} < \mu_{k,2}$); $\bar{w}_{k,i}$, $i = \overline{1, m_k}$ – M_k -ортонормированные собственные векторы в (10), а W_k – матрица, состоящая из этих векторов. В предложенных обозначениях спектральное разложение для $S_{\lambda,k}$ будет иметь вид:

$$S_{\lambda,k} = M_k W_k \Lambda_k W_k^T M_k. \tag{11}$$

Отметим, что

$$\bar{w}_{k,1} = \frac{1}{\|\bar{e}_k\|_{M_k}} \bar{e}_k \tag{12}$$

где \bar{e}_k вектор с компонентами равными единице и $\|\bar{e}_k\|_{M_k}$ обозначает M_k – норму \bar{e}_k , $k = \overline{1, m}$.

В статьях [4, 5] предлагается в качестве преобуславливателя использовать матрицы

$$B_k = \alpha_k (M_k - M_k \bar{w}_{k,1} \bar{w}_{k,1}^T M_k) \tag{13}$$

где α_k являются некими положительными числами.

Введем в рассмотрение матрицу

$$B = \sum_{k=1}^m N_k B_k N_k^T \quad (14)$$

Очевидно, что $B_k = B_k^T \geq 0$, $\ker(B_k) = \ker(S_{\lambda,k})$ и

$$\frac{\mu_{k,2}}{\alpha_k} B_k \leq S_{\lambda,k} \leq \frac{\mu_{k,m_k}}{\alpha_k} B_k, \quad k = \overline{1, m} \quad (15)$$

Отсюда следует, что $aB \leq S \leq bB$, где $a = \min_{1 \leq k \leq m} \frac{\mu_{k,2}}{\alpha_k}$ и $b = \max_{1 \leq k \leq m} \frac{\mu_{k,m_k}}{\alpha_k}$.

V Предобуславливатель грубой сетки

Для простоты мы рассмотрим задачу (1) в единичном квадрате разбитом на $m = \sqrt{m} \times \sqrt{m}$ подквадратов, как показано на Рис. 1. Предположим, что коэффициент диффузии является константой внутри каждой подобласти E_k , т.е. $d_k \equiv \text{const} > 0$ в E_k , $k = \overline{1, m}$. В $\Omega = [0; 1] \times [0; 1]$ определим квадратную сетку Ω_h с шагом $h = \frac{1}{n}$. Мы предполагаем, что n кратно \sqrt{m} . Таким образом, мы вводим макро-сетку с шагом $H = \frac{1}{\sqrt{m}}$, и мелкую сетку Ω_h . В задаче используются граничные условия из (1). Для численных экспе-

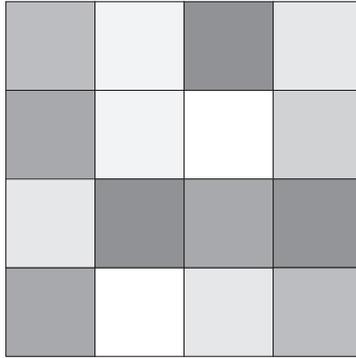


Рис. 1. Область Ω разбитая на подобласти E_k , $k = \overline{1, m}$, $m = 16$.

риментов, в каждой области коэффициент диффузии был выбран случайно в диапазоне от $d_{min} \equiv 1$ до величины d_{max} , которая является изменяющимся параметром в экспериментах.

Дискретизация задачи (2) была построена при помощи гибридной схемы метода конечных элементов PWCF [1]. Можно легко показать, что этот метод дискретизации на такой сетке эквивалентен гибридной схеме метода

конечных объемов на Ω_h . Используя этот метод, мы получаем систему уравнений (3) – (4) с диагональной матрицей M . Для получения матриц B_k в (13) была выбрана диагональная матрица масс M_k , $k = \overline{1, m}$.

Для численных экспериментов были выбраны

$$\alpha_k = \|M_k^{-1}A_k\| \equiv \alpha = \frac{d_k \cdot 8}{h^2}, \tag{16}$$

где M_k – соответствующие диагональные матрицы масс, $k = \overline{1, m}$.

В качестве начального приближения выбирался вектор со случайными компонентами, модуль которых не превышал единицы. Критерием остановки являлось падение S_λ -нормы ошибки в 10^6 раз. Для решения системы был выбран метод сопряженных градиентов с предобуславливателем (14). Ниже представлены таблицы с результатами сравнения двух методов решения системы (7). Матрица B в (14) вырожденная, поэтому системы с этой матрицей решались в ортогональном дополнении к $\ker B$.

В таблицах рассмотрены 3 случая с разным максимальным параметром d_{max} . ДП обозначает диагональный предобуславливатель, ПГС - предобуславливатель грубой сетки, n_{it} – количество итераций, t_{sol} – время, затраченное на решение системы в секундах.

$n \times n$		$d_{max} = 10^2$		$d_{max} = 10^4$		$d_{max} = 10^6$	
		ДП	ПГС	ДП	ПГС	ДП	ПГС
128×128	n_{it}	913	310	1281	308	1714	304
	t_{sol}	3.71	1.58	5.21	1.55	6.92	1.51
256×256	n_{it}	1837	678	2375	647	2981	646
	t_{sol}	34.78	16.68	50.80	16.79	65.05	16.43
512×512	n_{it}	3278	1397	5659	1321	7175	1310
	t_{sol}	256.11	136.67	423.89	118.01	531.58	126.96

Таблица 1. $H = \frac{1}{8}$, то есть $m = 8 \times 8 = 64$ подобластей.

$n \times n$		$d_{max} = 10^2$		$d_{max} = 10^4$		$d_{max} = 10^6$	
		ДП	ПГС	ДП	ПГС	ДП	ПГС
128×128	n_{it}	1256	143	2658	140	5123	138
	t_{sol}	5.54	0.86	12.17	0.86	24.67	0.92
256×256	n_{it}	1882	348	4896	327	7901	325
	t_{sol}	39.85	9.96	105.86	8.13	164.77	7.31
512×512	n_{it}	3587	745	8013	737	19325	729
	t_{sol}	295.35	74.63	664.05	74.78	1577.69	73.83

Таблица 2. $H = \frac{1}{16}$, то есть $m = 16 \times 16 = 64$ подобластей.

Результаты, представленные в таблицах показывают более высокую эффективность предобуславливателя грубой сетки по сравнению с диагональным предобуславливателем. Количество итераций для ПГС не зависит от отношения максимального и минимального коэффициентов диффузии.

VI Блочно-диагональный предобуславливатель

В этом разделе рассмотрим так называемый шахматный случай (см. Рис. 2) распределения коэффициентов диффузии в подобластях. Разделим под-области на две группы и предположим, что две ячейки E_k и E_l внутри каждой группы не имеют общей границы, т.е. $|\Gamma_{k,l}| = 0$, $1 \leq k < t \leq m_0$, $m_0 < m$.

Предположим, что коэффициент диффузии в первой группе подобластей ($d_k \gg 1$), $k = \overline{1, m_0}$, а коэффициент для второй группы подобластей $d_k = 1$, $k = \overline{m_0 + 1, m}$. Обозначим через S_0 матрицу S_λ в случае коэффициентов диффузии $d_k = 1$, $k = \overline{1, m}$. Тогда матрицу S_λ из (7) можно представить как сумму матриц S_0 и

$$S_1 = \sum_{k=1}^{m_0} (d_k - 1) N_k S_{\lambda,k} N_k^T. \quad (17)$$

Блочно диагональный предобуславливатель B для матрицы S зададим формулой

$$B = Z + \sum_{k=1}^{m_0} (d_k - 1) N_k B_k N_k^T \quad (18)$$

где Z – диагональная матрица с положительными элементами, например $Z = \|M^{-1} S_0\|_{\inf} M$, где $M = \sum_{k=1}^N N_k M_{\lambda,k} N_k^T$. Очевидно, что матрица B является блочно-диагональной матрицей, у которой блоки B_{kk} , $k = \overline{1, m_0}$ являются одноранговыми возмущениями диагональных матриц, а остальные блоки – диагональные матрицы.

Для численных экспериментов была выбрана область и разбиение, аналогичное предыдущему тесту. Подобласти разделены на две группы в шахматном порядке так, чтобы в первую группу попали «черные» подобласти (см. Рис. 2).

Коэффициент диффузии для подобластей в первой группе выбирается случайно, а коэффициент диффузии во второй группе везде равен единице.

Ниже представлены результаты сравнения 3 предобуславливателей: диагонального, предобуславливателя грубой сетки и блочно-диагонального предобуславливателя. Последний обозначен в таблицах как БДП. Условия сравнения те же, что и в предыдущем разделе.

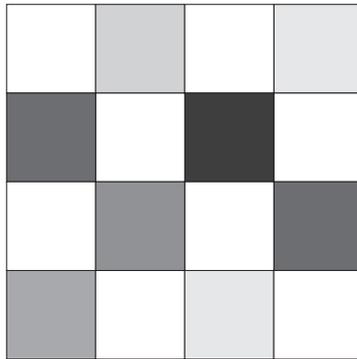


Рис. 2. Пример шахматного распределения.

	$d_{max} = 10^2$			$d_{max} = 10^4$			$d_{max} = 10^6$		
	ДП	ПГС	БДП	ДП	ПГС	БДП	ДП	ПГС	БДП
n_{it}	2100	673	1535	5090	556	1326	6993	542	1152
t_{sol}	41.69	17.38	33.33	105.41	13.47	29.92	142.89	13.13	27.24

Таблица 3. $H = \frac{1}{8}$, т.е. $m = 8 \times 8 = 64$ подобластей, $n = 256 \times 256$

	$d_{max} = 10^2$			$d_{max} = 10^4$			$d_{max} = 10^6$		
	ДП	ПГС	БДП	ДП	ПГС	БДП	ДП	ПГС	БДП
n_{it}	2386	326	1303	10104	293	1140	33412	267	993
t_{sol}	48.38	8.28	29.25	206.66	8.76	27.22	721.48	6.49	24.79

Таблица 4. $H = \frac{1}{16}$, т.е. $m = 16 \times 16 = 256$ подобластей, $n = 256 \times 256$

	$d_{max} = 10^2$			$d_{max} = 10^4$			$d_{max} = 10^6$		
	ДП	ПГС	БДП	ДП	ПГС	БДП	ДП	ПГС	БДП
n_{it}	4262	1373	2840	7421	1227	2581	15808	1141	2147
t_{sol}	328.07	132.31	250.762	521.89	117.91	233.01	1251.71	109.25	194.52

Таблица 5. $H = \frac{1}{8}$, т.е. $m = 8 \times 8 = 64$ подобластей, $n = 512 \times 512$

	$d_{max} = 10^2$			$d_{max} = 10^4$			$d_{max} = 10^6$		
	ДП	ПГС	БДП	ДП	ПГС	БДП	ДП	ПГС	БДП
n_{it}	4611	733	2440	16412	638	2070	54350	602	1814
t_{sol}	376.06	75.06	231.07	1193.26	50.81	151.68	3488.7	48.76	134.3

Таблица 6. $H = \frac{1}{16}$, т.е. $m = 16 \times 16 = 256$ подобластей, $n = 512 \times 512$

Результаты показывают независимость количества итераций для разного значения максимального коэффициента диффузии для блочно-

диагонального предобуславливателя и предобуславливателя грубой сетки. Наиболее эффективным является предобуславливатель грубой сетки, далее следует блочно-диагональный предобуславливатель, и наименее эффективным является диагональный предобуславливатель. Предобуславливатель грубой сетки также является самым быстрым по арифметическим затратам, т.е. по времени решения системы.

Замечание 1. *Блочно диагональный предобуславливатель может быть эффективно использован в параллельных расчетах для задач с сильно гетерогенными коэффициентами.*

Литература

1. *Kuznetsov Yu. A.*, Approximations with piece-wise constant fluxes for diffusion equations. // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2011. Vol. 19, N 4. P 309-328.
2. *Boffi D., Brezzi Fr., Fortin M.* Mixed Finite Element Methods and Applications // Springer Series in Computational Mathematics 44. Springer. Berlin. 2013.
3. *Brezzi F. and FortinM.* , Mixed and Hybrid Finite Element Methods. Springer. New York. 1991.
4. *Kuznetsov, Y. Kramarenko, V.* Preconditioners with projectors for mixed hybrid finite element methods // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling, 2017.32(1), pp. 39-45.
5. *Kuznetsov Yu. A.*, Two-level preconditioners with projectors for unstructured grids, // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling (2000), **15**, No. 3-4. 247-255.

ВЛИЯНИЕ КОРРОЗИОННОГО ИЗНОСА НА СЛОЖНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ БАЛКИ БЕРНУЛЛИ-ЭЙЛЕРА В РАМКАХ СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОДИНАМИКИ¹

Крылова Е.Ю.* , Синичкина А.О.** , Папкова И.В.** ,
Крысько В.А.**

* *Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Саратов*

** *Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Саратов*

Введение

Изучение эффектов, связанных с влиянием коррозионного износа и динамических термосиловых воздействий на поведение механических систем, является чрезвычайно сложным и перспективным направлением научных исследований, поскольку фактором, обуславливающим перестройку режимов динамических систем, может являться не только изменение параметров силового (механического) нагружения, но и изменение толщины конструкции вследствие действия агрессивной среды, а также температурные воздействия. Интерес к подобным задачам связан с необходимостью разработки механических конструкций, способных работать в агрессивных средах в условиях неравномерного нестационарного нагрева (например, в авиационной и ракетной технике, гироскопостроении, в системе защиты ядерных реакторов, в микромеханических системах и т.д.). Инженерная практика постоянно требует повышения точности математических моделей колебаний ответственных элементов конструкций. Что достигается совершенствованием определяющих соотношений, описывающих динамику механических систем и методов их численной реализации. Балки, как элементы инженерных конструкций находят широкое применение едва ли не во всех областях современной промышленности. По этому исследованию влияния коррозионного износа на колебательные режимы механических систем в виде балок находящихся в температурных полях является актуальной проблемой.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ проект № 16-31-00092

I Постановка задачи

В работе построена математическая модель нелинейных колебаний балки переменной толщины, под действием нормальной распределенной нагрузки. Для формулировки математических моделей делаем следующие предположения относительно геометрии балки, свойств материалов и условий эксплуатации: поперечные сечения остаются плоскими, и перпендикулярны деформированной оси балки - гипотезы Бернулли-Эйлера [1]; инерция вращения элементов балки не учитывается; внешние силы не меняют своего направления при деформации балки; продольный размер балки значительно превышает ее поперечные размеры; геометрическая нелинейность учитывается в форме Т. Кармана [2]; принимается также дополнительное допущение о том, что нормальными напряжениями в направлении нормали к срединной линии можно пренебречь по сравнению с основными напряжениями, под которыми понимают нормальные и касательные напряжения в ней самой и в слоях, ей параллельных; влияние коррозионного износа учитывается по модели Долинского, предполагается, что скорость коррозии линейно зависит от максимального напряжения и экспоненциально затухают со временем [3]; никаких ограничений на распространение температуры по толщине балок не накладывается, то есть рассматриваются двумерные уравнения теплопроводности; рассматриваются изотропные однородные балки переменной толщины; рассматриваются диссипативные системы. Балка занимает в пространстве R^2 двумерную область $\Omega = \{x \in [0, a]; -h \leq z \leq h\}$. При этом, декартова система координат введена согласно рисунку 1.

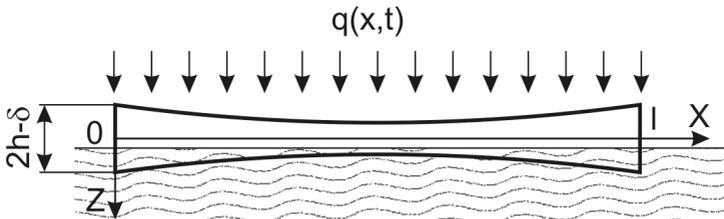


Рис. 1. Расчетная схема

Выражения для деформации удлинения в направлении x учитывая геометрическую нелинейность по модели Кармана переменную толщину балки и коррозионный износ для произвольной точки на слое, отстоящем от срединной линии на расстояние z будут иметь вид:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} w \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \alpha_t T(x, z, t).$$

Здесь w и u - перемещения произвольной точки срединной линии балки в поперечном и продольном направлении соответственно, $h(x)$ - функция

изменения толщины балки по ее длине, α_t – коэффициент теплового расширения материала балки, $T(x, z, t)$ – функция температурного поля.

Деформации и перемещения связаны законом Дюамеля-Неймона. Уравнения движения, граничные и начальные условия для балки были получены из энергетического принципа Остроградского-Гамильтона. Согласно этому принципу производится сравнение близких движений, приводящих систему материальных точек из начального положения в момент времени t_0 в конечное положение в момент времени t_1 . Для истинных движений должно выполняться условие:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta K - \delta \Pi + \delta W) dt = 0,$$

где K – кинетическая энергия балки, Π – потенциальная энергия балки, W – сумма элементарных работ внешних сил, приложенных к балке.

Кинетическая энергия определяется выражением:

$$K = \frac{\gamma(2h - \delta)}{2g} \int_0^l [(ut)^2 + (wt)^2] dx.$$

Потенциальная энергия представляет собой сумму энергий деформации изгиба и деформации срединной линии балки и определяется из соотношения:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} M_x + N_x e_{xx} \right) dx.$$

Внешняя работа, связанная с распределенными силами и диссипацией энергии имеет вид:

$$W = \int_0^l (q(x, t)w + \epsilon wt) dx.$$

Здесь l – длина балки, γ – удельный вес материала балки, g – ускорение свободного падения, M_x – изгибающий момент, N_x – нормальное усилие срединной линии, e_{xx} – деформация срединной линии.

Подставляя выражения для кинетической и потенциальной энергии и внешней работы в уравнение принципа Остроградского-Гамильтона, варьируя по переменным u и w , интегрируя по частям, и наконец, приравнявая выражения при δu и δw к нулю, получим разрешающие уравнения движения. Приведем их к безразмерному виду с использованием следующих параметров:

$$x = l\bar{x}, \quad \delta = h_0\bar{\delta}, \quad \delta_0 = \frac{\alpha}{h_0}\bar{\delta}_0, \quad b = b_0\bar{b}, \quad h = h_0\bar{h},$$

$$w = h_0\bar{w}, \quad u = \frac{h_0^2}{l}\bar{u}, \quad q = \frac{h_0^4}{l^4}\bar{q}, \quad l = h_0\bar{l}, \quad t = \frac{h_0^2}{\alpha}\bar{t}, \quad \epsilon = \frac{\alpha}{h_0^2}\bar{\epsilon}$$

$$T = \frac{h_0^2}{l^2 \alpha_{t0} \bar{T}}, \quad \alpha_t = \alpha_{t0} \bar{\alpha}_t, \quad C_{00} = h_0 \bar{C}_{00}, \quad C_{10} = h_0^2 \bar{C}_{10}, \quad C_{20} = h_0^3 \bar{C}_{20}.$$

Вводя следующие обозначения:

$$M_t = -E\alpha_t \int_{-h(x)}^{h(x)-\delta(x)} T(x, z, t) z dz,$$

$$N_t = -E\alpha_t \int_{-h(x)}^{h(x)-\delta(x)} T(x, z, t) dz,$$

$$C_{00} = E \int_{-h(x)}^{h(x)-\delta(x)} dz, \quad C_{10} = E \int_{-h(x)}^{h(x)-\delta(x)} z dz, \quad C_{20} = E \int_{-h(x)}^{h(x)-\delta(x)} z^2 dz,$$

E – модуль упругости материала балки, α – коэффициент температуропроводности, h_0 – толщина балки в ее центре в начальный момент времени, q – нормальная вибрационная нагрузка, $K = \frac{\gamma \alpha^2}{gh_0^2 E}$ – безразмерный физико-геометрический параметр, запишем уравнения движения элемента балки в перемещениях.

Черточки над безразмерными переменными для простоты опущены.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{2}{K\lambda^2(2h-\delta)} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{1}{2} w \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) C_{00} + \right. \\ \left. + \left(ux + \frac{1}{2} (wx)^2 - \frac{1}{2} w \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) C_{00} x - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} C_{10} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} C_{10} x + N_t x \right]$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\epsilon w t + \frac{2}{K\lambda^2(2h-\delta)} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + wx \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - wx \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{1}{2} w \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} \right) C_{10} + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + wx \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{2} wx \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{1}{2} w \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) C_{10} x + \right. \\ \left. + \left(ux + \frac{1}{2} (wx)^2 - \frac{1}{2} w \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 C_{10}}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} C_{20} - 2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \frac{\partial C_{20}}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 C_{20}}{\partial x^2} + \right. \\ \left. - \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + wx \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{2} wx \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{1}{2} w \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) C_{00} + \left(ux + \frac{1}{2} (wx)^2 - \frac{1}{2} w \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) C_{00} x - \right. \\ \left. - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} C_{10} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} C_{10} x \right) wx + \left(\left(ux + \frac{1}{2} (wx)^2 - \frac{1}{2} w \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) C_{00} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} C_{10} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\ \left. + q + \frac{\partial^2 M_t}{\partial x^2} C_{10} + N_t x wx + N_t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right].$$

Влияние коррозионного износа учитывается по модели Долинского, предполагается, что скорость коррозии линейно зависят от максимального напряжения и экспоненциально затухают со временем. В безразмерном виде уравнение Долинского будет иметь вид:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = (\delta_0 + P \epsilon_{xx}) \exp(-Bt).$$

Безразмерные физико-геометрические параметры определяются следующим образом: $P = K_1 E \frac{h_0^3}{l^2 \alpha}$, $B = b_0 \frac{h_0^2}{\alpha}$. Константы b и K_1 определяются экспериментально, δ_0 - начальная скорость коррозии.

Никаких ограничений на распространение температуры по толщине балки не накладывается, поэтому рассматривается двумерное уравнение теплопроводности для нестационарного поля с учетом связанности полей деформации и температур. Которое в безразмерном виде запишется следующим образом:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - L \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = D \alpha_t \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial t}.$$

Здесь $L = \frac{\lambda_0 h_0^2}{l^2 C_0 \alpha}$, $D = \frac{E \alpha_{t0} T_0}{(1-\nu) C_0}$ C_0 - удельная теплоемкость материала балки; T_0 - температура балки в исходном недеформированном состоянии. Таким образом математическая модель колебаний балки в условиях коррозионного износа и температурного поля будет состоять из уравнений движения элемента балки, уравнения Долинского и двумерного уравнения теплопроводности в связанной постановке, к которым присоединим граничные условия шарнирного опирания, условия I типа для уравнения теплопроводности и нулевые начальные условия.

II Методы решения

При решении полученной системы уравнений был использован метод конечных разностей. При интегрировании уравнений движения с граничными и начальными условиями на область балки накладывалась равномерная сетка с количеством узлов n по длине и по толщине. Частные производные по пространственным координатам, для повышения точности расчетной схемы, заменялись центральными конечно-разностными аппроксимациями. Полученную систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с соответствующими граничными и начальными условиями методом замены переменных сводим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которая, по временной координате решается методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности. Выбор метода связан с тем, что результаты, полученные методами 4-го и 6-го порядка точности полностью совпадают, но время счета для Рунге-Кутты 4-го порядка в два раза меньше [4]. На каждом шаге по времени для узла x_i рассчитываются значения функции $\delta(x_i)$ отвечающей за изменение толщины балки в следствии коррозии, значение жесткостей C_{00} , C_{10} , C_{20} и их производных, а так же температурные моменты и напряжения. После чего полученные параметры подставляются в уравнения движения. Пересчитывается толщина балки $h(x_i)$ с учетом коррозионного компонента с предыдущего слоя. На основании полученных из уравнений движения перемещений и прогибов балки

вычисляется полная деформация для каждой из точек сетки $\epsilon_{xx}(x_i, z_k)$. Подставляя ее в выражение для функции коррозии получим ее новое значение на рассматриваемом временном слое. Подставляя значения полной деформации в уравнение теплопроводности, получаем значения функции температурного поля $T(x_i, z_k)$ в каждой точке сетки, интегрируя по толщине, будем иметь $T(x_i)$ в срединной линии балки, что даст возможность получить значения температурных моментов и напряжений.

Литература

1. *A. E. H. Love* A Treatise on the Mathematical theory of Elasticity. New York: Dover Publications. 1944.
2. *Karman Th.* Festigkeitsprobleme in Maschinenbau // Encykle. D.Math.Wiss. 1910. V. 4. P. 348-352 (in German).
3. *Долгинский В.М.* Расчет нагруженных труб, подверженных коррозии // Химическое и нефтяное машиностроение. 1967. № 2. С. 9-10.
4. *A.V. Krysko, J. Awrejcewicz, I.E. Kutepov, N.A. Zagniboroda, V. Dobriyan, V.A. Krysko* Chaotic dynamics of flexible Euler-Bernoulli beams // Chaos. 2013. V. 23. N. 4.

ПРЕДОБУСЛОВЛИВАНИЕ МЕТОДОВ ПОДПРОСТРАНСТВА КРЫЛОВА КОСОЭРМИТОВЫМИ ИТЕРАЦИЯМИ¹

Мартынова Т.С.

*Институт математики, механики и компьютерных наук
им. Воровича И.И., Ростов-на-Дону*

Введение

При решении систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) одним из ключевых понятий является предобусловливание, т.е. выбор матриц, существенно влияющих на скорость сходимости методов. Для решения СЛАУ большой размерности, как правило, используются методы подпространств Крылова, но они имеют слабую скорость сходимости, когда применяются без предобусловливания.

Рассмотрим итерационное решение большой разреженной СЛАУ

$$Av = b, \quad b \in \mathbb{C}^n, \quad (1)$$

где $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ – неэрмитова положительно определенная матрица.

Матрицу A системы (1) представим в виде суммы эрмитовой и косозермитовой частей

$$A = A_0 + A_1, \quad (2)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{2}(A + A^*), \quad A_1 = \frac{1}{2}(A - A^*). \quad (3)$$

Пусть в некоторой матричной норме $||| \cdot |||$, $|||A_0||| \ll |||A_1|||$, т.е. матрица A является сильно неэрмитовой. В данной работе предполагается, что $\text{diag}(A_1) = 0$. Это условие удовлетворяется автоматически, если элементы матрицы A вещественные.

Представим косозермитову часть A_1 матрицы A в виде

$$A_1 = K_L + K_U, \quad (4)$$

где K_L и K_U строго нижне- и верхнетреугольная матрица соответственно. Очевидно, что $K_L = -K_U^*$.

На основе расщеплений (2)-(4) в [1, 2] предложены классы треугольных (ТКМ) и попеременно-треугольных (ПТКМ) косозермитовых (кососимметрических) итерационных методов для решения системы (1). В данной работе рассматриваются методы, относящиеся к ПТКМ.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ, Базовая часть гос. задания, тема: Фундаментальные и прикл. задачи мат. моделирования №1.5169.2017/8.9 и РФФИ, грант № 15-01-00441-а

Метод ПТКМ [2]. Пусть задано начальное приближение $v^{(0)}$ и положительные параметры ω и τ . Для $p = 0, 1, \dots$ до достижения сходимости последовательности приближений $\{v^{(p)}\}$ вычислять:

$$v^{(p+1)} = G(\omega, \tau)v^{(p)} + \tau B(\omega)^{-1}b,$$

где $G(\omega, \tau) = B(\omega)^{-1}(B(\omega) - \tau A)$, а $B(\omega) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ определяется следующим образом:

$$B(\omega) = (B_c + \frac{\omega}{2}K_L)B_c^{-1}(B_c + \frac{\omega}{2}K_U).$$

Здесь $B_c \in \mathbb{C}^{n \times n}$ – эрмитова положительно определенная матрица.

В [3] предложен двухшаговый косоэрмитов итерационный метод (ДКМ), даны достаточные условия сходимости метода и выбор оптимальных итерационных параметров. Матрица $B(\omega)$ для ДКМ имеет вид

$$B(\omega) = (B_c + \frac{\omega}{2}\widehat{K}_L)B_c^{-1}(B_c + \frac{\omega}{2}\widehat{K}_U), \quad (5)$$

где $\widehat{K}_L = K_L + H_0$, $\widehat{K}_U = K_U - H_0$, $H_0 \in \mathbb{C}^{n \times n}$ – некоторая эрмитова матрица, $B_c \in \mathbb{C}^{n \times n}$ – эрмитова положительно определенная матрица. Очевидно, что $\widehat{K}_L = -\widehat{K}_U^*$, $A_1 = (K_L + H_0) + (K_U - H_0) = \widehat{K}_L + \widehat{K}_U$.

В [4] авторами предложен обобщенный косоэрмитов треугольный метод GSTS (Generalized Skew-Hermitian Triangular Splitting) для решения седловых СЛАУ, блочно-структурированная матрица которых имеет положительно определенный $(1, 1)$ блок.

В данной работе исследуются свойства матрицы $B(\omega)$ из (5), используемой в качестве предобусловливателя для решения СЛАУ (1). Для седловых задач рассмотрен более общий случай, когда $(1, 1)$ матричный блок СЛАУ является положительно полуопределенным или вырожденным.

I Решение СЛАУ с неэрмитовой положительно определенной матрицей методом ДКМ+GMRES

Представим матрицу $B(\omega)$, определяемую (5), так же, как и исходную матрицу A , в виде суммы ее эрмитовой и косоэрмитовой частей. Тогда

$$B(\omega) = B_0(\omega) + B_1(\omega), \quad (6)$$

где

$$\begin{cases} B_0(\omega) = \frac{1}{2}(B(\omega) + B(\omega)^*) = B_c + (\frac{\omega}{2})^2\widehat{K}_L B_c^{-1}\widehat{K}_U, \\ B_1(\omega) = \frac{1}{2}(B(\omega) - B(\omega)^*) = \frac{\omega}{2}(\widehat{K}_L + \widehat{K}_U) = \frac{\omega}{2}A_1. \end{cases}$$

Предположим, что

$$0 < \alpha_h I \leq A_0 \leq \beta_h I, \quad 0 < \alpha_c I \leq B_c \leq \beta_c I, \\ \alpha_l I \leq \widehat{K}_L B_c^{-1} \widehat{K}_U \leq \beta_l I, \quad \alpha_s I \leq B_0(\omega) \leq \beta_s I,$$

где I – единичная матрица. Поскольку A_0 и B_c – эрмитовы положительно определенные матрицы, $B_0(\omega)$ и $\widehat{K}_L B_c^{-1} \widehat{K}_U$ – эрмитовы матрицы, то границы α_ξ и β_ξ , $\xi = h, c, l, s$ легко вычисляются.

Потребуем положительной определенности $B(\omega)$ из (6). Поскольку матрица $\widehat{K}_L B_c^{-1} \widehat{K}_U$ является отрицательно определенной, то $B_0(\omega) > 0$, если $\omega \in (0, \omega_{max})$, где $\omega_{max} = 2\sqrt{\left(-\frac{\alpha_c}{\alpha_l}\right)}$.

Следующая лемма определяет локализацию спектра предобусловленной матрицы СЛАУ (1) в случае применения ДКМ-предобусловливателя (5). Будем обозначать спектр матрицы A как $\sigma(A)$.

Лемма 1. Пусть матрицы A и $B(\omega)$ из (5) положительно определены. Тогда $\sigma(B(\omega)^{-1}A)$ содержится в одном из следующих трех кругов:

$$C_1: \left(x - \left(\frac{\beta_h}{2\alpha_h} + \frac{1}{\omega}\right)\right)^2 + y^2 = \left(\frac{\beta_h}{2\alpha_h} - \frac{1}{\omega}\right)^2, \text{ если } \frac{\alpha_h}{\beta_s} \geq \frac{2}{\omega}, \\ C_2: \left(x - \left(\frac{\alpha_h}{2\beta_s} + \frac{1}{\omega}\right)\right)^2 + y^2 = \left(\frac{\alpha_h}{2\beta_s} - \frac{1}{\omega}\right)^2, \text{ если } \frac{\beta_h}{\alpha_s} \leq \frac{2}{\omega}, \\ C_3: \left(x - \frac{1}{2}\left(\frac{\beta_h}{\alpha_s} + \frac{\alpha_h}{\beta_s}\right)\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{\beta_h}{\alpha_s} - \frac{\alpha_h}{\beta_s}\right)^2, \text{ если } \frac{\alpha_h}{\beta_s} \leq \frac{2}{\omega} \leq \frac{\beta_h}{\alpha_s}.$$

Доказательство. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \sigma(B(\omega)^{-1}A)$ и $x \in \mathbb{C}^n$ – соответствующий собственный вектор. Тогда

$$B(\omega)^{-1}A = \left(B_0(\omega) + \frac{\omega}{2}A_1\right)^{-1}(A_0 + A_1)$$

и

$$\lambda B(\omega)x = Ax,$$

$$\lambda = \frac{x^*Ax}{x^*B(\omega)x} = \frac{x^*A_0x + x^*A_1x}{x^*B_0(\omega)x + \frac{\omega}{2} \cdot x^*A_1x} \\ = \frac{\frac{x^*A_0x}{x^*B_0(\omega)x} + \frac{x^*A_1x}{x^*B_0(\omega)x}}{1 + \frac{\omega}{2} \cdot \frac{x^*A_1x}{x^*B_0(\omega)x}} = \frac{2}{\omega} + \frac{\frac{x^*A_0x}{x^*B_0(\omega)x} - \frac{2}{\omega}}{1 + \frac{\omega}{2} \cdot \frac{x^*A_1x}{x^*B_0(\omega)x}}.$$

Для удобства введем величины:

$$m = \frac{x^*A_0x}{x^*B_0(\omega)x}, \quad \eta = \frac{1}{i} \cdot \frac{x^*A_1x}{x^*B_0(\omega)x}.$$

Тогда

$$\lambda = \frac{2}{\omega} + \frac{m - \frac{2}{\omega}}{1 + i \cdot \frac{\omega}{2} \eta}.$$

Следовательно, собственные значения λ матрицы $B(\omega)^{-1}A$ лежат на окружности с центром $(\frac{m}{2} + \frac{1}{\omega}, 0)$ и радиусом $|\frac{m}{2} - \frac{1}{\omega}|$.

Поскольку $\frac{\alpha_h}{\beta_s} \leq m \leq \frac{\beta_h}{\alpha_s}$, то все эти окружности содержатся в кругах

$$\left(x - \left(\frac{\alpha_h}{2\beta_s} + \frac{1}{\omega}\right)\right)^2 + y^2 = \left(\frac{\alpha_h}{2\beta_s} - \frac{1}{\omega}\right)^2, \quad \left(x - \left(\frac{\beta_h}{2\alpha_s} + \frac{1}{\omega}\right)\right)^2 + y^2 = \left(\frac{\beta_h}{2\alpha_s} - \frac{1}{\omega}\right)^2$$

Очевидно, что эти круги касаются в точке $(\frac{2}{\omega}, 0)$, а двумя другими точками пересечения с осью абсцисс являются $(\frac{\alpha_h}{\beta_s}, 0)$ и $(\frac{\beta_h}{\alpha_s}, 0)$. Возможны три случая расположения данных точек на оси абсцисс:

$$\frac{\alpha_h}{\beta_s} \geq \frac{2}{\omega}, \quad \frac{\beta_h}{\alpha_s} \leq \frac{2}{\omega}, \quad \frac{\alpha_h}{\beta_s} \leq \frac{2}{\omega} \leq \frac{\beta_h}{\alpha_s},$$

в соответствии с которыми и получаем локализацию спектра матрицы $B(\omega)^{-1}A$ в одном из кругов C_1 , C_2 или C_3 . Лемма доказана.

Теперь, используя Лемму 1, можно получить результат для оценки асимптотической скорости сходимости метода ДКМ+GMRES.

Теорема 1. Пусть A и $B(\omega)$ из (5) положительно определены, и матрица $B(\omega)^{-1}A$ диагонализируема. Тогда асимптотическая скорость сходимости предобусловленного метода GMRES с использованием ДКМ-предобусловителя для решения СЛАУ (1) определяется величиной

$$\rho\left(\Upsilon\left(B(\omega)^{-1}A\right)\right) = \begin{cases} \left(\frac{\beta_h}{2\alpha_s} - \frac{1}{\omega}\right) / \left(\frac{\beta_h}{2\alpha_s} + \frac{1}{\omega}\right), & \text{если } \frac{\alpha_h}{\beta_s} \geq \frac{2}{\omega}, \\ \left(\frac{1}{\omega} - \frac{\alpha_h}{2\beta_s}\right) / \left(\frac{1}{\omega} + \frac{\alpha_h}{2\beta_s}\right), & \text{если } \frac{\beta_h}{\alpha_s} \leq \frac{2}{\omega}, \\ \left(\frac{\beta_h}{\alpha_s} - \frac{\alpha_h}{\beta_s}\right) / \left(\frac{\beta_h}{\alpha_s} + \frac{\alpha_h}{\beta_s}\right), & \text{если } \frac{\alpha_h}{\beta_s} \leq \frac{2}{\omega} \leq \frac{\beta_h}{\alpha_s}. \end{cases} \quad (7)$$

Доказательство. Используем ДКМ для ускорения GMRES. Тогда p -я невязка предобусловленного GMRES выражается как:

$$r^{(p)} = B(\omega)^{-1}(b - Av^{(p)}) = \mathcal{P}_p(B(\omega)^{-1}A)r^{(0)}, \quad \mathcal{P}_p \in \Pi_p, \quad \mathcal{P}_p(0) = 1,$$

где Π_p – множество полиномов степени не выше, чем p . На каждом итерационном шаге GMRES вычисления осуществляются так, что

$$\|r^{(p)}\|_2 = \min_{\mathcal{P}_p \in \Pi_p, \mathcal{P}_p(0)=1} \left\{ \|\mathcal{P}_p(B(\omega)^{-1}A)r^{(0)}\|_2 \right\}.$$

Сходимость метода GMRES определяется величиной [5]

$$\varrho_p(\Upsilon(B(\omega)^{-1}A)) = \min_{\mathcal{P}_p \in \Pi_p, \mathcal{P}_p(0)=1} \max_{\lambda \in \Upsilon(B(\omega)^{-1}A)} |\mathcal{P}_p(\lambda)|,$$

где $\Upsilon(B(\omega)^{-1}A)$ множество, содержащее спектр матрицы $B(\omega)^{-1}A$, а асимптотическая скорость сходимости предобусловленного метода GMRES:

$$\varrho_p(\Upsilon(B(\omega)^{-1}A)) = \lim_{p \rightarrow \infty} \varrho_p(\Upsilon(B(\omega)^{-1}A))^{\frac{1}{p}}.$$

Пусть $\mathbb{E}(a, b, c, d)$ – эллипс с центром в точке d , фокусами $d \pm c$ и полуосями a и b , где $c^2 = a^2 - b^2$. Если известно, что $\Upsilon(B(\omega)^{-1}A)$ содержится в эллипсе $\mathbb{E}(a, b, c, d)$, который расположен в правой полуплоскости и не включает начало координат, то асимптотическая скорость сходимости предобусловленного метода GMRES определяется величиной [5]:

$$\varrho(\Upsilon(B(\omega)^{-1}A)) = \frac{a + b}{d + \sqrt{d^2 - c^2}}. \tag{8}$$

Тогда эллипс $\mathbb{E}(a, b, c, d)$, имеющий наименьшую площадь из всех эллипсов, содержащих $\sigma(B(\omega)^{-1}A)$, описывается следующими группами параметров ($c = 0$):

$$\begin{cases} a = \frac{\beta_h}{2\alpha_s} - \frac{1}{\omega}, & b = \frac{\beta_h}{2\alpha_s} - \frac{1}{\omega}, & d = \frac{\beta_h}{2\alpha_s} + \frac{1}{\omega}, & \text{если } \frac{\alpha_h}{\beta_s} \geq \frac{2}{\omega}, \\ a = \frac{1}{\omega} - \frac{\alpha_h}{2\beta_s}, & b = \frac{1}{\omega} - \frac{\alpha_h}{2\beta_s}, & d = \frac{\alpha_h}{2\beta_s} + \frac{1}{\omega}, & \text{если } \frac{\beta_h}{\alpha_s} \leq \frac{2}{\omega}, \\ a = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_h}{\alpha_s} - \frac{\alpha_h}{\beta_s} \right), & b = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_h}{\alpha_s} - \frac{\alpha_h}{\beta_s} \right), & d = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_h}{\alpha_s} + \frac{\alpha_h}{\beta_s} \right), & \text{если } \frac{\alpha_h}{\beta_s} \leq \frac{2}{\omega} \leq \frac{\beta_h}{\alpha_s}. \end{cases}$$

Подставляя значения a, b, d в (8), получаем (7). Теорема доказана.

II Предобусловливание СЛАУ с седловой матрицей

Характерной задачей, приводящей к решению СЛАУ с седловой матрицей, является следующая задача квадратичного программирования: необходимо найти минимум u целевого функционала $J(u) \equiv \frac{1}{2}u^*Mu - u^*f$ при наличии $q \leq p$ линейных ограничений $Eu = g$:

$$\begin{pmatrix} M & E^* \\ E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где $M = M^* \in \mathbb{C}^{p \times p}$ – положительно полуопределенная матрица, $E \in \mathbb{C}^{q \times p}$ – прямоугольная матрица полного ранга, $q \leq p$, $u, f \in \mathbb{C}^p$, $\mu, g \in \mathbb{C}^q$. Данной задаче соответствует функционал Лагранжа $\mathcal{L}(u, \mu) = J(u) + \mu^*(Eu - g)$, где μ – вектор Лагранжевых множителей.

Преобразуем (9) к эквивалентной неэрмитовой СЛАУ, матрица которой имеет спектр, лежащий в правой полуплоскости [6]:

$$\begin{pmatrix} M & E^* \\ -E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ -g \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Рассмотрим случай, когда (1,1) матричный блок полуопределен или вырожден. Будем использовать метод расширенного Лагранжиана, который состоит в замене (10) на СЛАУ

$$\mathcal{A}\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \widetilde{M} & E^* \\ -E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f + \gamma E^* g \\ -g \end{pmatrix} = \mathbf{F}, \quad (11)$$

в которой M заменяется на матрицу $\widetilde{M} \equiv M + \gamma E^* E$, являющуюся положительно определенной для всех $\gamma > 0$, если E имеет полный ранг [6]. Очевидно, что (11) имеет то же самое решение, что и (10).

Представим матрицу \mathcal{A} из (11), аналогично (2), в виде суммы ее эрмитовой и косэрмитовой составляющих:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1, \quad \mathcal{A}_0 = \begin{bmatrix} \widetilde{M} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & E^* \\ -E & 0 \end{bmatrix}.$$

Косэрмитову матрицу \mathcal{A}_1 , в свою очередь, представим в виде:

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{K}_L + \mathcal{K}_U = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -E & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & E^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где 0 – нулевая матрица подходящей размерности, \mathcal{K}_L и \mathcal{K}_U – строго нижне- и строго верхнетреугольные матрицы, $\mathcal{K}_L = -\mathcal{K}_U^*$.

Пусть $\mathcal{B}_C = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$, где B_1, B_2 – эрмитовы невырожденные матрицы.

Метод GSTS [4]. Пусть задано начальное приближение $\mathbf{w}^{(0)} = (u^{(0)}, \mu^{(0)}) \in \mathbb{C}^{(p+q)}$ и положительный итерационный параметр τ . Для $k = 0, 1, 2, \dots$ до достижения сходимости последовательности итерационных приближений $\{\mathbf{w}^{(k)}\}$, вычислять

$$\begin{cases} B_2 \mu^{(k+1)} = B_2 \mu^{(k)} + \tau [\omega_1 E B_1^{-1} (f - M u^{(k)} - E^* \mu^{(k)}) + E u^{(k)} - g], \\ B_1 u^{(k+1)} = B_1 u^{(k)} - \tau M u^{(k)} + E^* [(\omega_2 - \tau) \mu^{(k)} - \omega_2 \mu^{(k+1)}] + \tau f, \end{cases}$$

где ω_1 и ω_2 неотрицательные параметры, не равные нулю одновременно.

GSTS – предобуславливатель определяется следующим образом [4]:

$$\mathcal{B}(\omega_1, \omega_2) = (\mathcal{B}_C + \omega_1 \mathcal{K}_L) \mathcal{B}_C^{-1} (\mathcal{B}_C + \omega_2 \mathcal{K}_U) \quad (12)$$

или, в блочной форме,

$$\mathcal{B}(\omega_1, \omega_2) = \begin{bmatrix} B_1 & \omega_2 E^* \\ -\omega_1 E & B_2 - \omega_1 \omega_2 E B_1^{-1} E^* \end{bmatrix}.$$

Возьмем в качестве матрицы $B_1 = \widetilde{M}$. Тогда

$$\mathcal{B}(\omega_1, \omega_2) = \begin{bmatrix} \widetilde{M} & \omega_2 E^* \\ -\omega_1 E & B_2 - \omega_1 \omega_2 E \widetilde{M}^{-1} E^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{M} & \omega_2 E^* \\ -\omega_1 E & B_2 - \omega_1 \omega_2 \widetilde{S} \end{bmatrix},$$

где $\widetilde{S} = E \widetilde{M}^{-1} E^*$ – дополнение Шура для \widetilde{M} .

Предобусловленная (слева) блочная СЛАУ имеет вид:

$$\mathcal{B}^{-1}(\omega_1, \omega_2) \mathcal{A} \mathbf{w} = \mathcal{B}^{-1}(\omega_1, \omega_2) \mathbf{F}. \quad (13)$$

Исследуем спектр предобусловленной матрицы из (13).

Теорема 2. Пусть матрицы \mathcal{A} и $\mathcal{B}(\omega_1, \omega_2)$ определяются (11) и (12), соответственно, и $B_1 = \widetilde{M}$. Пусть $\lambda \in \sigma(\mathcal{B}^{-1}(\omega_1, \omega_2) \mathcal{A})$. Тогда для собственных чисел предобусловленной матрицы имеет место выражение

$$\lambda = \frac{\nu - \tilde{\omega} \xi \pm \sqrt{(\nu - \tilde{\omega} \xi)^2 - 4 \xi \nu}}{2 \nu},$$

где $\xi = \frac{z^* \widetilde{S} z}{z^* z}$, $\nu = \frac{z^* B_2 z}{z^* z}$, а параметр $\tilde{\omega} = \omega_1 \omega_2 - \omega_1 - \omega_2$.

Доказательство. Пусть $\lambda \in \sigma(\mathcal{B}^{-1}(\omega_1, \omega_2) \mathcal{A})$ и $(y^*, z^*)^* \in \mathbb{C}^{p+q}$ – соответствующий собственный вектор, где $y \in \mathbb{C}^p$, $z \in \mathbb{C}^q$. Тогда имеем

$$\begin{bmatrix} \widetilde{M} & E^* \\ -E & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \widetilde{M} & \omega_2 E^* \\ -\omega_1 E & B_2 - \omega_1 \omega_2 \widetilde{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

или, эквивалентно,

$$\begin{cases} (1 - \lambda) \widetilde{M} y = (\lambda \omega_2 - 1) E^* z, \\ (\lambda \omega_1 - 1) E y = \lambda B_2 z - \lambda \omega_1 \omega_2 \widetilde{S} z. \end{cases} \quad (14)$$

Пусть $\lambda \neq 1$. Иначе, если $\lambda = 1$, уравнения (14) сводятся к

$$\begin{cases} (\omega_2 - 1) E^* z = 0, \\ (\omega_1 - 1) E y = B_2 z - \omega_1 \omega_2 \widetilde{S} z, \end{cases} \quad (15)$$

и существует ненулевой вектор $(y_1^*, 0)^* \in \mathbb{C}^{p+q} \setminus \{0\}$ такой, что уравнения (15) справедливы для $y_1 \in \mathbb{C}^p \setminus \{0\}$. Если $\lambda \neq 1$, то из первого уравнения (14) имеем:

$$y = \frac{\lambda \omega_2 - 1}{1 - \lambda} \widetilde{M}^{-1} E^* z.$$

Подставляя это соотношение во второе уравнение в (14), получаем

$$\left(\frac{(\lambda\omega_1 - 1)(\lambda\omega_2 - 1)}{1 - \lambda} + \lambda\omega_1\omega_2 \right) \tilde{S}z = \lambda B_2 z,$$

или

$$(\lambda\tilde{\omega} + 1)\tilde{S}z = \lambda(1 - \lambda)B_2 z, \quad (16)$$

где $\tilde{\omega} = \omega_1\omega_2 - \omega_1 - \omega_2$. Для удобства введем величины $\xi = \frac{z^*\tilde{S}z}{z^*z}$, $\nu = \frac{z^*B_2 z}{z^*z}$, тогда, после умножения (16) слева на z^* и деления на z^*z обеих частей этого выражения, получаем:

$$(\lambda\tilde{\omega} + 1)\xi = \lambda(1 - \lambda)\nu,$$

т.е. λ является корнем квадратного уравнения

$$\nu\lambda^2 - (\nu - \tilde{\omega}\xi)\lambda + \xi = 0. \quad (17)$$

Из (17) непосредственно следует утверждение Теоремы 2.

Заметим, что когда $\tilde{\omega} = -1$, корнями (17) являются $\lambda = 1$ и $\lambda = \xi/\nu$.

Практический вывод, который следует из доказанной теоремы, следующий. Если $\tilde{\omega} = -1$ и $\xi = \nu$, то все собственные числа предобусловленной матрицы $\mathcal{B}^{-1}(\omega_1, \omega_2)\mathcal{A}$ равны 1, а это означает, что для эффективности рассмотренного предобусловливателя матрица B_2 должна максимально удачно аппроксимировать дополнение Шура \tilde{S} .

Литература

1. *Krukier L.A.* Convergence acceleration of triangular iterative methods based on the skew-symmetric part of the matrix // Appl. Numer. Math. 1999. Vol. 30. P. 281–290.
2. *Бочев М.А., Крукер Л.А.* Об итерационном решении сильно несимметричных систем линейных алгебраических уравнений // ЖВМ и МФ. 1997. Т. 37. № 11. С. 1283–1293.
3. *Krukier L.A., Martinova T.S., Bai Z.-Z.* Product-Type Skew-Hermitian Triangular Splitting Iteration Methods for Strongly Non-Hermitian Positive Definite Linear Systems // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2009. Vol. 232. N 1. P. 3–16.
4. *Krukier L.A., Krukier B.L., Ren Z.-R.* Generalized skew-Hermitian triangular splitting iteration methods for saddle-point linear systems // Numer. Linear Algebra Appl. 2014. Vol. 21. P. 152–170.
5. *Saad Y.* Iterative methods for Sparse Linear Systems. PWS Publishing Company, 1995.
6. *Benzi M., Golub G.H.* A preconditioner for generalized saddle point problems // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2004. Vol. 26. P. 20–41.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫБОРА ПОЗИЦИЙ ИНДИВИДАМИ ПРИ ИНФОРМАЦИОННОМ ПРОТИБОВОРСТВЕ В СЛУЧАЕ ДВУХКОМПОНЕНТНОГО СОЦИУМА¹

Михайлов А.П. *, Петров А.П. *, Прончева О.Г. *,**

* *Институт Прикладной Математики им. М.В. Келдыша
РАН, Москва*

** *Московский Физико-Технический Институт (ГУ), Москва*

I Описание модели

Настоящая работа посвящена развитию модели выбора позиций индивидами при информационном противоборстве, предложенной в [1]. Изучаемый процесс состоит в следующем. В социуме происходит соперничество двух партий, распространяющих свои информационные сообщения через аффилированные СМИ. Эти сообщения распространяются также индивидами (членами социума) путем межличностной коммуникации. Таким образом, каждый индивид получает информационные потоки каждой из партий как от СМИ, так и от других индивидов. В каждый момент времени, каждый член социума является сторонником либо левой, либо правой партии (и распространяет сообщение лишь «своей» партии); с течением времени он может менять партий принадлежность произвольное количество раз.

Механизм принятия индивидом решений о том, какую партию поддерживать в настоящий момент, основан на нейробиологической схеме Рашевского (см., напр., [2, 3]). В соответствии с данным подходом, поступающая индивиду информация рассматривается как стимул, а поддержка той или иной партии – как реакция. Решение принимается на основе не только стимула, но и установки индивида на поддержку той или иной партии, которая предполагается постоянной на протяжении всего времени противоборства скалярной величиной и обозначается через φ ($\varphi > 0$ соответствует поддержке правой партии, $\varphi < 0$ – поддержке левой партии, большие по модулю значения соответствуют большей поддержке). В настоящей работе рассматривается модель выбора позиций индивидами при информационном противоборстве в одном из случаев, когда имеются две группы индивидов, каждая из которых характеризуется своим распределением $n_1(\varphi)$, $n_2(\varphi)$, при этом индивиды общаются больше внутри своей группы, чем с представителями другой группы. Выраженность данной характеристика описывается параметром γ : в частности, $\gamma = 1$ означает, что каждый индивид общается только с членами своей группы; $\gamma = 0,5$ соответствует однородному обществу в том

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 17-01-00390

смысле, что индивид общается с другими индивидами, независимо от того, к какой группе они принадлежат. Модель в данном случае имеет вид

$$\frac{d\psi_1}{dt} = A\alpha C \left[\gamma \left(2 \int_{-\psi_1(t)}^{+\infty} n_1(\varphi) d\varphi - N_1 \right) + \right. \\ \left. + (1 - \gamma) \left(2 \int_{-\psi_2(t)}^{+\infty} n_2(\varphi) d\varphi - N_2 \right) \right] + A\alpha (b_x - b_y) - a\psi_1; \quad (1)$$

$$\frac{d\psi_1}{dt} = A\alpha C \left[(1 - \gamma) \left(2 \int_{-\psi_1(t)}^{+\infty} n_1(\varphi) d\varphi - N_1 \right) + \right. \\ \left. + \gamma \left(2 \int_{-\psi_2(t)}^{+\infty} n_2(\varphi) d\varphi - N_2 \right) \right] + A\alpha (b_x - b_y) - a\psi_2. \quad (2)$$

Здесь N_1 – это численность первой группы, N_2 – численность второй группы. Параметры A , α , C , a описывают психологические характеристик индивидов, и вводятся в работе [2, 3].

Функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ связаны с численностями сторонников той и другой партии в обеих группах формулами

$$X_1(t) = \int_{-\psi_1(t)}^{+\infty} n_1(\varphi) d\varphi, Y_1(t) = \int_{-\infty}^{-\varphi_1(t)} n_1(\varphi) d\varphi; \quad (3)$$

$$X_2(t) = \int_{-\psi_2(t)}^{+\infty} n_2(\varphi) d\varphi, Y_2(t) = \int_{-\infty}^{-\varphi_2(t)} n_2(\varphi) d\varphi. \quad (4)$$

II Вычислительные эксперименты

В настоящей работе принимается стандартное для таких моделей [1, 2, 3] нормальное распределение индивидов по переменной φ . При этом, первая группа имеет распределение, смещенное влево (склонна к поддержке источника информации X), а вторая группа – смещенная вправо (склонна к поддержке источника информации Y). Таким образом,

$$n_1(\varphi) = \frac{N_1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\varphi + m)^2}{2} \right], \quad (5)$$

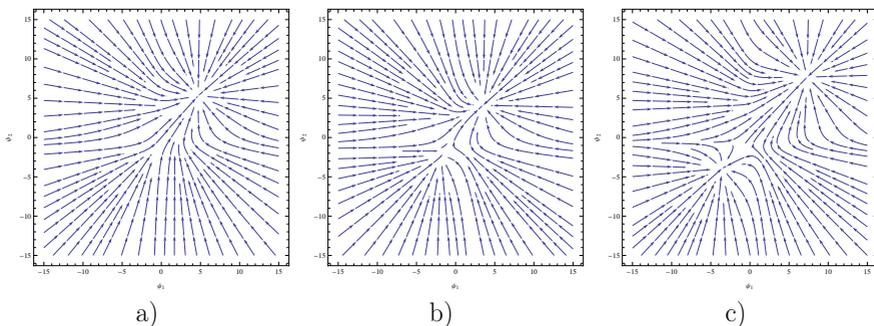


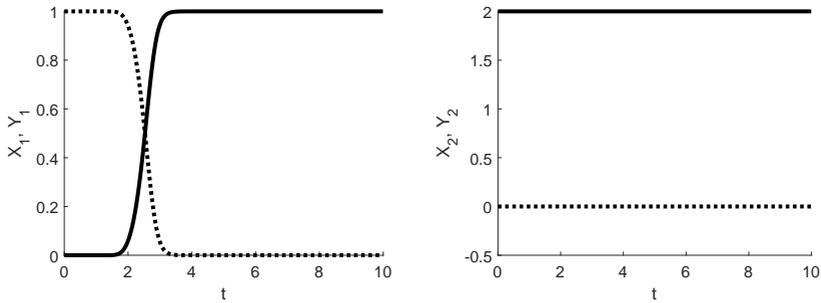
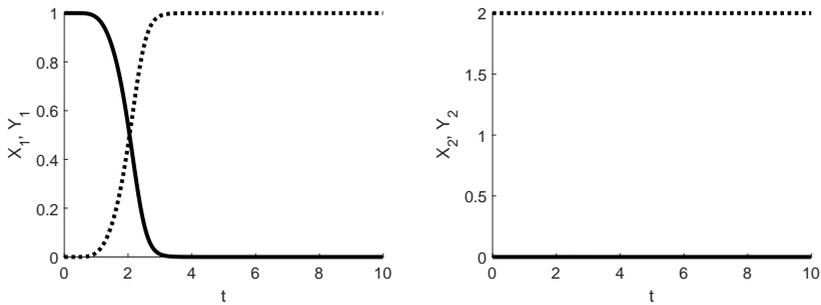
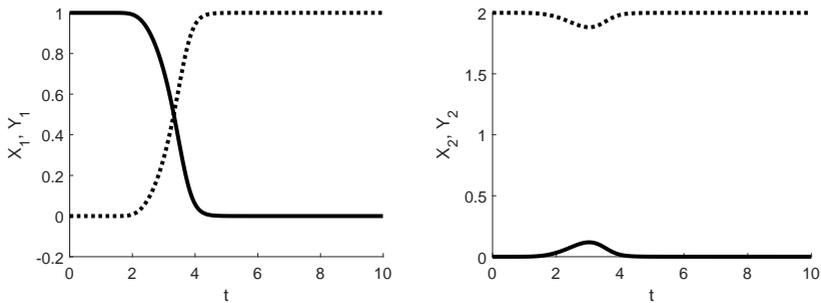
Рис. 1. Фазовые плоскости для трёх различных наборов параметров: а) $\gamma = 0,65$; $m = 0.2$; $N_1 = 1$; $N_2 = 2$; $A = 2$; $\alpha = 1$; $C = 1$; $a = 1$; $b_x = 2$; $b_y = 1$, б) $\gamma = 0,65$; $m = 0.69$; $N_1 = 1$; $N_2 = 2$; $A = 2$; $\alpha = 1$; $C = 1$; $a = 1$; $b_x = 1.4$; $b_y = 1$, в) $\gamma = 0,55$; $m = 0.4$; $N_1 = 1$; $N_2 = 2$; $A = 1,5$; $\alpha = 2$; $C = 1$; $a = 0,8$; $b_x = 1,5$; $b_y = 1$

$$n_2(\varphi) = \frac{N_2}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\varphi - m)^2}{2} \right]. \tag{6}$$

Здесь параметр $m > 0$ характеризует степень поляризации общества. При различных значениях параметров, система может иметь различное количество устойчивых стационарных решений. Некоторые из этих стационарных решений соответствуют победе (т.е. большему количеству сторонников при $t \rightarrow \infty$ первой партии, другие – второй. Ряд возникающих ситуаций представлен на фазовых плоскостях (Рис. 1).

Рассмотрим более подробно случай, представленный на Рис. 1с.

На Рис. 2, 3, 4 показан графики зависимости численностей сторонников партий от времени при постоянном наборе параметров, но различных начальных условиях (т.е. численно решались уравнения (1, 2) и функции $X(t), Y(t)$ находятся по формулам (3), (4). Сплошные линии соответствуют партии, имеющей преимущество в интенсивности пропаганды, пунктирные линии – противоположной партии. Графики показывают, что при некоторых начальных условиях численности сторонников в одной из групп могут быть немонотонными.

Рис. 2. Начальные условия: $\psi_1 = -15$, $\psi_2 = 10$ Рис. 3. Начальные условия: $\psi_1 = 6$, $\psi_2 = -15$ Рис. 4. Начальные условия: $\psi_1 = 15$, $\psi_2 = -7$

Заключение

Приведенные выше примеры иллюстрируют многообразие ситуаций, возникающих в данной модели. Содержательный смысл этого многообразия состоит в том, что распределение сторонников партий зависит не только от таких параметров, как например, интенсивность пропаганды или соотношение численностей групп, но также от начальных условий.

Литература

1. *А.П.Петров, А.И.Маслов, Н.А.Цаплин* Моделирование выбора позиций индивидами при информационном противоборстве в социуме // Математическое моделирование, 2015. Т. 27, N 12. С. 137–148.
2. *Rashevsky N.* Outline of a Physico-mathematical Theory of Excitation and Inhibition // *Protoplasma*. 1933.
3. *Rashevsky N.* Mathematical Biophysics: Physico-Mathematical Foundations of Biology. Univ. of Chicago: Chicago Press, 1938.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЖИМОВ РАБОТЫ МОЗГА НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ ИЖИКЕВИЧА¹

Муратова Г.В., Пичугина О.А., Бавин В.В.

*Институт математики, механики и компьютерных наук
им. И.И. Воровича, Южный федеральный университет,
Ростов-на-Дону*

Моделирование работы мозга – одна из самых интересных, но одновременно и самых сложных научных проблем современности. Неудивительно, что она вызывает огромный интерес у специалистов во всем мире [4, 5, 6]. Выделяют два основных подхода к исследованию и моделированию высшей нервной деятельности: моделирование биологически правдоподобных нейронных сетей и создание искусственных нейронных сетей. Как правило в основе последних лежат алгоритмы, созданные на основе архитектуры мозга, но упрощенные для определенных практических целей. В настоящей работе представлена модель биологической нейронной сети в которой происходят процессы создания и распространения нервных импульсов.

Когда моделируется поведение биологического нейрона используются модели физических процессов. Вход нейрона может быть описан, как течение ионов, ток сквозь клеточную мембрану, возникающий при активации ионных каналов. В модели входные данные представлены функцией величины силы тока I в зависимости от времени t . Клетка изолирована клеточной мембраной, как диэлектриком, внутри и извне которой сконцентрированы заряженные ионы. Этот факт позволяет рассматривать мембрану как конденсатор и ввести значение емкости C . Также нейрон реагирует на входной сигнал изменениями напряжения, или разности потенциалов между клеткой и окружением, наблюдаемыми как периодические скачки (или спайки). Величина напряжения представлена как v и является искомым выходом нейрона.

В работе мы будем использовать модель нейрона Ижикевича [2, 3], которая описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} C \frac{dv}{dt} = k(v - V_r)(v - v_t) - u + I_{syn} + I_{ext} \\ \frac{du}{dt} = a(b(v - v_r)u) \\ \text{если } v \geq v_{peak}, \quad v \leftarrow c, \quad u \leftarrow u + d \end{cases} \quad (1)$$

где переменная v представляет собой мембранный потенциал нейрона, u является переменной, ответственной за восстановление мембранного потенциала, в физиологическом смысле отвечает за активацию K^+ ионных каналов и инактивацию Na^+ ионных каналов и обеспечивает отрицательную обратную

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 15-01-00441-а

связь к переменной v . C – мембранная емкость, k – обратный мембранному сопротивлению коэффициент, v_r – потенциал покоя, v_t – минимальный потенциал генерации потенциала действия, v_{peak} – пиковый потенциал спайка. I_{syn} – входящий синаптический ток, считается как сумма входящих по синаптическим связям токов, I_{ext} – внешний постоянный ток. Параметр a описывает временной масштаб изменения переменной u таким образом, что большие значения переменной a ускоряют процесс восстановления мембранного потенциала. Параметр b описывает чувствительность переменной u к подпороговым колебаниям мембранного потенциала v . Большие значения b соответствуют большему подпороговому втеканию тока. Параметры c и d определяют действие потенциалозависимых токов, активирующихся в течение потенциала действия (спайка), и воздействуют на поведение после спайка. c – значения потенциала после спайка, d – величина увеличения u после спайка.

При различных комбинациях параметров a , b , c , d данная модель способна воспроизвести все двадцать типов активности реальных биологических нейронов [2].

Модель нейронной сети состоит из элементов двух типов: нейронов и синаптических связей, соединяющих нейроны. Одна синаптическая связь соединяет два нейрона, причем нейрон, выход (аксон) которого соединен с входом (дендритом) другого, является пресинаптическим, а второй нейрон, соответственно, – постсинаптическим. Связь между нейронами характеризуется величиной веса связи W , эквивалентной количеству и типу нейромедиаторов, выделяемых в синаптической щели при прохождении электрического сигнала. В зависимости от величины веса связь может быть возбуждающей или тормозящей потенциал постсинаптического нейрона. Также связь характеризуется величиной синаптического тока – Y , проходящего в связи в данный момент времени, и, экспоненциально убывающего после генерации электрического сигнала пресинаптическим нейроном. Нейроны характеризуются величиной потенциала, которая зависит от входящего синаптического тока. Каждый нейрон может иметь много входов и один выход, соединенный со многими нейронами [1].

Математическая модель электрической активности нейронов (1) была реализована с использованием параллельных вычислений на графическом адаптере общего назначения.

Были проведены исследования, в ходе которых получены следующие результаты. При моделировании нейронной сети с десятью тысячами нейронов с вероятностью возникновения связи между соседними нейронами $p = 0.3$ образуется около тридцати тысяч связей, что при проведение моделирования с помощью CPU не позволяет рассмотреть систему в режиме реального времени. Использование алгоритма GPU позволяет моделировать в реальном времени даже при наличии трех сотен тысяч связей в сети, с частотой итераций до десяти герц, что, в свою очередь, дает возможность моделировать более сложные структуры сети. При моделировании работы сети каждая

итерация состоит из трех последовательных этапов (Рис. 1, Рис. 10).

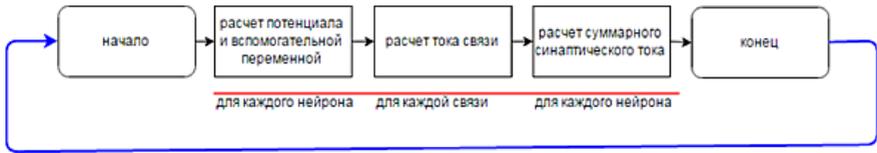


Рис. 1. Итерация одного шага моделирования

На первом этапе проводится расчет текущего значения величин потенциала v и вспомогательной переменной u для каждого нейрона (Рис. 2). Если значение потенциала нейрона выше порогового, значит, нейрон возбужден и генерирует нервный импульс, а величины u , v принимают значения сброса.

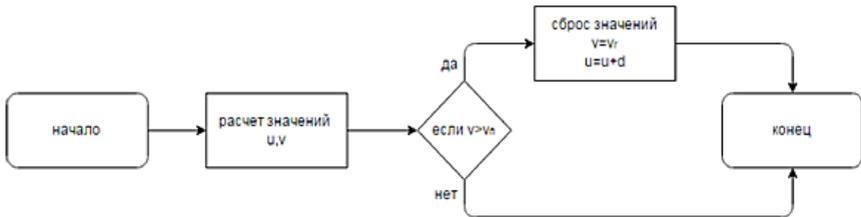


Рис. 2. Первый этап моделирования

Второй этап – расчет величины синаптического тока каждой связи (Рис. 3). После генерации нервного импульса пресинаптическим нейроном ток связи экспоненциально затухает. Если величина потенциала пресинаптического нейрона выше порога, то величина синаптического тока принимает значение равное единице, что соответствует генерированному нервному импульсу на пресинаптическом входе связи.

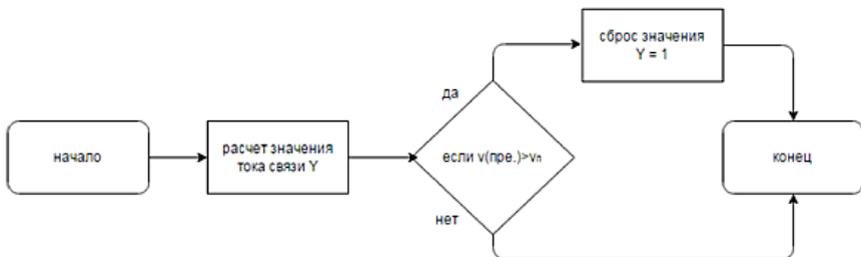


Рис. 3. Второй этап моделирования

Третий этап – расчет суммарного входного синаптического тока для каждого нейрона, который равен сумме входящих синаптических токов связей, у которых нейрон на постсинаптическом входе. Технология GPGPU работает с большими объемами данных в параллельном потоке. Её применение позволяет сократить время расчета модели. Для хранения данных использованы графические текстуры, каждая из которых является двумерным массивом, каждый элемент которого имеет четыре действительные переменные (rgba). Код программы для выполнения на видеокарте описан в шейдерной программе, где одна командная инструкция выполняется для каждого элемента текстуры. Для хранения данных о нейронах использована структура «текстура нейрона», где каждый элемент описывает величину вспомогательной переменной (u), потенциала (v) и суммарного синаптического тока (I) нейрона (Рис. 4).

V	U	I	-
---	---	---	---

Рис. 4. Элемент «текстуры нейрона»

Текстура связей содержит данные об индексе пресинаптического нейрона, постсинаптического нейрона, синаптическом токе (Y), весе (w) для каждой связи (Рис. 5).

индекс пре.	индекс пост.	Y	w
----------------	-----------------	---	---

Рис. 5. Элемент «текстуры связи»

Структура "текстура номера связей содержит значения об индексах первой и последней связи в текстуре связей, у которых текущей нейрон на постсинапсе, «текстура связи» упорядочена по постсинаптическим нейронам (Рис. 6).

индекс первой	индекс последней	-	-
------------------	---------------------	---	---

Рис. 6. Элемент «текстуры номера связи»

Первый этап – расчет значений U , V каждого нейрона происходит в первой шейдерной программе, входными переменными является «текстура

нейронов 1», входными константами являются параметры модели Ижикевича, результат выполнения программы записан в «текстура нейронов 2» (Рис. 7).

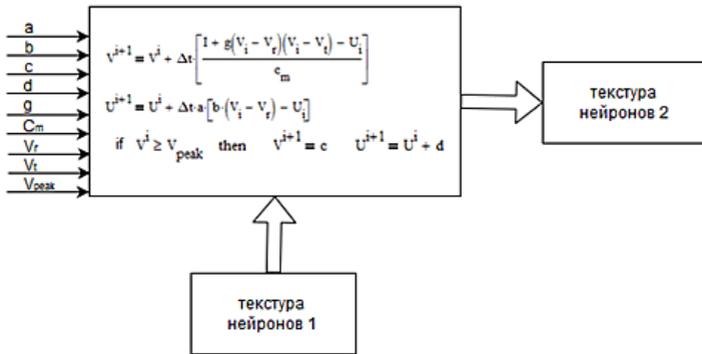


Рис. 7. Шейдерная программа 1

Второй этап – расчет величин синаптического тока каждой связи, реализован во второй шейдерной программе. Входными переменными являются текстура нейронов 1 и текстура связей четная (нечетная), где четность зависит от четности номера итерации. В результате получается текстура связей нечетная (четная) (Рис. 8). По индексу пресинаптической связи в текстуре связей определяется значение V в блоке «текстура нейронов 1», если эта величина больше порога, это означает, что сгенерирован нервный импульс.



Рис. 8. Шейдерная программа 2

На третьем этапе рассчитывается величина входящего суммарного синаптического тока для каждого нейрона (Рис. 9). На входе текстура нейронов 2, текстура связей четная (нечетная), текстура номера связей.

Разработаны модель электрической активности нейронной сети на основе модели Ижикевича и алгоритм ее реализации с использованием технологии GPGPU. Технология GPGPU позволила максимально использовать

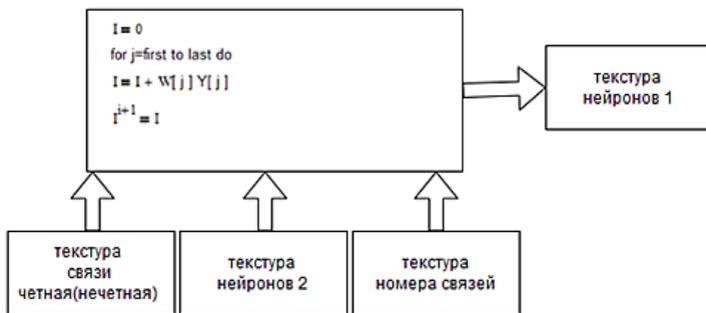


Рис. 9. Шейдерная программа 3

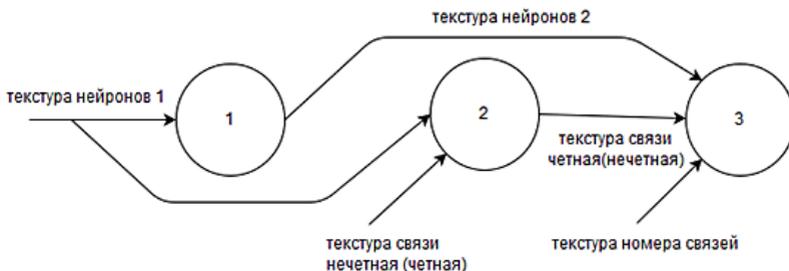


Рис. 10. Общая схема выполнения этапов итерации

вычислительные мощности компьютера путем разделения исходного потока данных модели нейронной сети на множество параллельно обрабатываемых потоков в графическом процессоре. Проведен ряд вычислительных экспериментов, анализ результатов которых показал необходимость модификации используемой модели и усложнения вычислительного алгоритма. Это определило направления дальнейших исследований – разработку алгоритма биологически правдоподобного образования связей между нейронами внутри сети.

Литература

1. Научная сессия НИЯУ МИФИ-2010. XII Всероссийская научно-техническая конференция «Нейроинформатика-2010»: Лекции по нейроинформатике. М.: МИФИ. 2010. 328 с.
2. *Izhikevich E.M.* Dynamical systems in neuroscience: the geometry of excitability and bursting. Cambridge: MIT Press. 2007. 464 p.

3. *Izhikevich E.M.* Neural excitability, spiking and bursting. International Journal of Bifurcation and Chaos. 2000. V. 10. N. 6. P. 1171–1266.
4. *Hale J., Koçak H.* Dynamics and Bifurcations . New York: Springer, 1991. 567 p.
5. *Keener J., Sneyd J.* Mathematical Physiology. Volume 8. 1998. P. 249–257.
6. *Shlizerman E., Holmes P.* Neural dynamics, bifurcations and firing rates in a quadratic integrate-and-fire model with a recovery variable . 2011. P. 3–5.

ВАЛИДАЦИЯ РЕДУЦИРОВАННОЙ МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ В МЕЛКОМ ПРОТЯЖЕННОМ РУСЛОВОМ ПОТОКЕ¹

Надолин К.А. *, Жилияев И.В. **

* Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

** Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону

В докладе рассматривается перенос пассивной примеси турбулентным русловым течением. Предполагается, что поток является мелким протяженным и слабо искривленным, а его русло твердое неразмываемое. Результаты численного моделирования, полученные на основе предложенной редуцированной математической модели, сравниваются с данными гидрологических измерений, проведенных на участке реки Северн (Британия).

Результаты исследования используются в спецкурсе, подготовленном в рамках проекта «Разработка англоязычной магистерской программы "Computational Mechanics and Informational Technologies" когерентной программ европейскиx университетов-партнеров». Проект стал победителем Грантового конкурса Стипендиальной программы Владимира Потанина 2016/2017 г. для преподаватели магистерских программ вузов и реализуется на средства гранта Благотворительного фонда В. Потанина. Набор студентов на программу состоится в 2018 году.

Введение

Для расчетов основных характеристик водотоков таких, как скорость течения и концентрация взвешенных загрязняющих веществ, применяются математические модели разных типов, среди которых наиболее точными являются трехмерные модели, основанные на полных уравнениях гидродинамики турбулентных течений [1, 2]. Однако на практике получить высокую точность моделирования, которую могут обеспечить такие 3D модели, не удается, поскольку данные реальных гидрологических измерений не имеют требуемой точности значений гидрофизических параметров, начальных и граничных условий для трехмерных уравнений в частных производных. Кроме того, сложность и трудоемкость вычислительных экспериментов на основе полных 3D моделей усугубляется геометрией расчетной области, сильно вытянутой в продольном направлении. Вышесказанное объясняет интерес к 2D и редуцированным 3D моделям русловых потоков, сложность которых адекватна точности имеющихся гидрологических данных [3].

¹Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Благотворительного фонда Владимира Потанина

Особенностью естественных водотоков является значительная протяженность и малая глубина потока по сравнению с его шириной: отношение между характерной глубиной и характерной шириной речного русла равнинных рек колеблется в пределах от 0.1 до 0.005. Это используется в [4] для получения на основе метода малого параметра упрощенных математических моделей гидродинамики и пассивного массопереноса в спокойных и слабо искривленных потоках.

В данной работе представлены результаты численного моделирования пассивного переноса примеси на основе редуцированной математической модели мелкого протяженного потока, предложенной в [4] и верифицированной в [5]. В качестве объекта моделирования выбран четырнадцатикилометровый участок реки Северн, протекающей по территории Уэльса (Великобритания). Основанием такого выбора послужили опубликованные данные наблюдений британских ученых-гидрологов, изучавших распространение в потоке красящего трассера родомита ВТ [6]. По утверждению британских исследователей, их целью был сбор и публикация исчерпывающих экспериментальных данных о процессе диффузионного переноса вещества русловым потоком для валидации предлагаемых разными авторами математических моделей. Сравнение наших результатов моделирования и данных натурных наблюдений британских коллег позволяет утверждать, что уравнения математической модели мелкого протяженного потока адекватно описывают процесс переноса пассивной примеси русловым потоком.

I Постановка задачи. Уравнения модели

Пусть пассивная неконсервативная примесь распространяется в русловом потоке, движущемся под действием силы тяжести. Обозначим среднюю глубину и ширину потока H и W соответственно и рассмотрим участок течения протяженностью L , такой, что выполнено условие мелкого протяженного потока [4]

$$\frac{H}{W} \approx \frac{W}{L} = \varepsilon \sim o(1)$$

Введем прямоугольные декартовы координаты (x, y, z) как показано на Рис.1

Свободная поверхность и дно потока задаются уравнениями $z = \xi(x, y, t)$ и $z = h(x, y)$, причем выполнено условие слабой искривленности русла [4]

$$\frac{\partial h}{\partial y} \sim \varepsilon, \quad \frac{\partial h}{\partial x} \sim \varepsilon^2$$

Уравнения математической модели переноса пассивной неконсервативной примеси спокойным мелким протяженным русловым потоком в безраз-

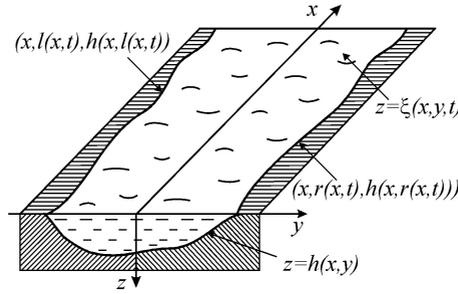


Рис. 1. Геометрия потока и система координат

мерных переменных имеют вид [4]

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial cu}{\partial x} + \frac{\partial cv}{\partial y} + \frac{\partial cw}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(d \frac{\partial c}{\partial z} \right) - \lambda c, \quad (1)$$

$$c|_{t=0} = c_0, \quad \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=0} = q_0, \quad \frac{\partial c}{\partial z} \Big|_{z=h} = \frac{\partial c}{\partial z} \Big|_{z=\xi} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -GI, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial z} \right) = Re \frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial p}{\partial z} = GRe^{-1}, \quad (2)$$

$$p|_{z=\xi} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=\xi} = \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=\xi} = 0,$$

$$u = v = w \Big|_{z=h} = 0,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} - w \Big|_{z=\xi} = 0. \quad (3)$$

Здесь c – концентрация примеси; (u, v, w) – скорость потока; p – давление; d и λ – параметры диффузии и распада вещества, соответственно; ν – параметр турбулентной вязкости; Re – число Рейлея; G – гравитационный параметр; I – уклон потока; c_0 и q_0 – известные функции.

Система (1)–(3) является базовой математической моделью распространения пассивной неконсервативной примеси в спокойном мелком и слабоискривленном русловом потоке. Уравнения (1) образуют *концентрационную* подсистему, а (2), (3) – *гидродинамическую* подсистему модели.

Отметим, что гидродинамическая подсистема решается независимо от концентрационной подсистемы, при этом они согласованы по точности приближения. В этом состоит важное отличие от тех исследований, где рассматривается лишь задача для концентрации вещества, а скорость потока считается заданной и вопрос о точности ее моделирования не обсуждается.

II Гидродинамическая подсистема модели

Решение уравнений (2) гидродинамической подсистемы (2),(3) может быть записано явно

$$\begin{aligned} u &= GI (J_2 - \xi J_1), & v &= G \frac{\partial \xi}{\partial y} (J_2 - \xi J_1), \\ w &= G \left(I \frac{\partial}{\partial x} (J_4 - \xi J_3) + \frac{\partial}{\partial y} \left((J_4 - \xi J_3) \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \right) \end{aligned} \quad (4)$$

где использованы обозначения

$$\begin{aligned} J_1(x, y, z) &= \int_z^{h(x,y)} \frac{d\tau}{\nu(x, y, \tau)}, & J_2(x, y, z) &= \int_z^{h(x,y)} \frac{\tau d\tau}{\nu(x, y, \tau)}, \\ J_3(x, y, z) &= \int_z^{h(x,y)} J_1(x, y, \tau) d\tau, & J_4(x, y, z) &= \int_z^{h(x,y)} J_2(x, y, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Заметим, что в рассматриваемом приближении давление распределено по гидростатическому закону

$$p = GRe^{-1}(z - \xi),$$

а возникновение поперечной скорости связано с изменением свободной поверхности в поперечном направлении y .

Компоненты скорости (4) и давление выражены через возвышение свободной поверхности ξ , которое определяется из кинематического краевого условия (3).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} &= G \left[I \left(\frac{\partial}{\partial x} (J_4 - \xi J_3) - (J_2 - \xi J_1) \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \right. \\ &\left. + (J_4 - \xi J_3) \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (J_4 - \xi J_3) - (J_2 - \xi J_1) \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial y} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Здесь функции $J_i, i = 1, 2, 3, 4$ и их производные вычислены на свободной границе при $z = \xi$.

Важным параметром решения (4) гидродинамической подсистемы (2),(3) математической модели (1)-(3) является функция $\nu(x, y, z)$, определяющая турбулентную вязкость течения. В статье [5] показано, что для широкого класса потоков можно использовать зависимость вида

$$\nu = h^2 - \left(h - \mu \left(\frac{S_x}{S_0} \right)^\alpha \right) z,$$

где μ – множитель, обеспечивающий близость значения вязкости турбулентного течения в придонном погранслое к молекулярной вязкости воды; S_0 и S_x – площадь живого сечения в начальном створе $x = 0$ и в текущей точке x водотока; α – свободный параметр, который можно считать целочисленным и значение которого лежит в интервале от 3 до 6 в зависимости от изменчивости живого сечения вдоль потока.

III Наблюдения на реке Северн

В статье [6] представлены данные наблюдений за распространением трасера — красящего вещества родомит ВТ — на участке реки Северн, протекающей по территории Уэльса (Великобритания) между населенными пунктами Ланидлос (Llanidloes) и Каерсвс (Caerws). Коэффициент диффузии данного вещества составляет 10^{-6} см/с. Концентрация примеси отслеживалась на участке реки длиной около 14 километров на 6 станциях наблюдения, расположенных ниже по течению. Было вылито ровно 1000 граммов красителя предварительно разведенного в 5 литрах дистиллированной воды. Сброс осуществлялся между двумя опорами моста, расстояние между которыми составляет около 6 метров, на глубине около 10 сантиметров от поверхности потока.

Авторы [6] приводят не только результаты наблюдения за концентрацией частиц примеси на различных станциях наблюдения, расположенных ниже по течению от места сброса, но также детально описывают геометрию и скоростные характеристики рассматриваемого участка реки. В таблице 1 представлены гидрологические характеристики водотока, полученные в результате измерений, которые продолжались более 10 часов.

Ширина русла на рассматриваемом участке была измерена в 86 точках и варьируется от 13 до 48 метров со средним значением 20 метров. Согласно измерениям, проведенным авторами эксперимента, ширина потока имеет тенденцию к увеличению от места вброса примеси до последней станции наблюдения и может быть аппроксимирована линейной зависимостью следующего вида

$$W(x) = 19.12 + 7.42 \cdot 10^{-4}x$$

Глубина потока измерялась в каждом из 86 сечений с интервалом 1 метр. Средняя глубина участка составляет 0.6 метра и не имеет тенденции к изменению на рассматриваемом участке. Авторами [6] была установлена зависимость средней глубины потока от ширины вида

$$H(x) = 0.81 - 0.0012 \cdot W(x)$$

Площадь поперечного сечения, также измеренная в 86 точках, имеет тенденцию к увеличению вниз по течению и может быть аппроксимирована формулой

$$S(x) = 10.27 + 1.68 \cdot 10^{-4}x$$

Таблица 1. Данные измерений водотока р.Северн

Станция	А	В	С	Д	Е	Г	Г
Расстояние от точки сброса (м)	210	1175	2875	5275	7775	10275	13775
Площадь живого сечения (м ²)	10.62	9.13	10.81	10.58	22.56	13.80	-
Локальный расход воды (м ³ /сек)	7.33	7.03	7.24	7.51	9.25	9.80	-
Локальная скорость (м/сек)	0.69	0.77	0.67	0.71	0.41	0.71	-
Средняя площадь живого сечения (м ²)	10.54	9.85	10.07	10.20	11.76	12.12	12.04
Средняя скорость (м/сек)	0.69	0.73	0.71	0.71	0.65	0.66	0.66
Эффективный расход воды (м ³ /сек)	7.27	7.19	7.15	7.24	7.64	7.99	8.30

Расход воды в реке Северн практически не зависит от времени суток, что позволяет не менять при моделировании скоростные характеристики потока, его глубину и ширину.

Таким образом, авторами работы [6] предоставлены все данные, необходимые для постановки задачи математического моделирования и проведения вычислительных экспериментов, симулирующих массоперенос пассивной примеси в естественном водотоке, например, на основе редуцированной математической модели мелкого протяженного потока.

IV Вычислительный эксперимент

Авторы [6] измеряли расход жидкости по живому сечению на наблюдательных станциях, что позволяет оценить средние скорости на каждой из станций (см. Таблицу 1. В работе [6] описываются 7 станций наблюдения (А-Г). Однако, продолжительность наблюдений ограничивалась световым днем, и за это время примесь не успевала пройти до станции Г. Поэтому в рамках верификации базовой модели мелкого протяженного руслового потока ограничимся расчетом массопереноса на участке реки Северн от места сброса до станции F. Характерную скорость для всего рассматриваемого участка А-Г примем равной 0.7. Характерная глубина (0.6 м) и характерная ширина (20 м) потока определяют значение параметра $\varepsilon \approx 0.03$, что соответствует условию применимости модели. Уклон потока может быть определен с помощью средств интернет-сервиса Google Maps [7]. Примем его равным $1.7 \cdot 10^{-3}$.

На Рис.2 представлена восстановленная по данным работы [6] геометрия

участка реки Северн и конечно-элементное разбиение расчетной области.

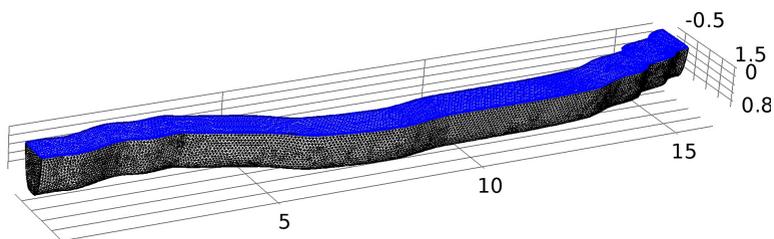


Рис. 2. Область водотока и ее конечно-элементное разбиение

На Рис.3 изображена форма рассматриваемого участка в плане и компонента продольной скорости на поверхности потока.

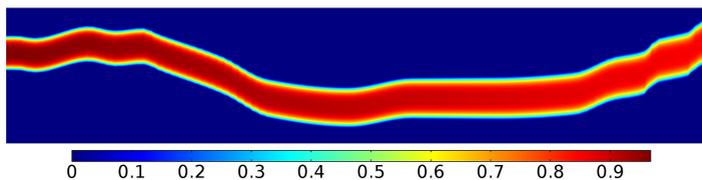


Рис. 3. Форма участка в плане и компонента продольной скорости на поверхности

На Рис.4 изображена пространственное поле скорости потока.

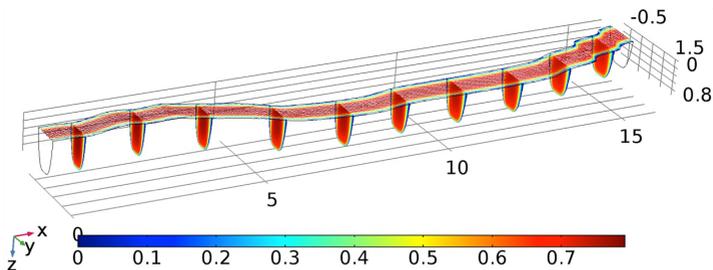


Рис. 4. Продольная скорость

На Рис.5 представлены данные вычислительного эксперимента по определению концентрации примеси (сплошная линия) и данные наблюдений [6] (окружности).

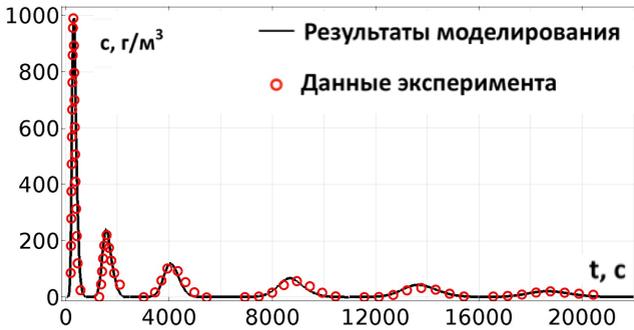


Рис. 5. Концентрация трассера

Заключение

В работе представлены данные вычислительных экспериментов, демонстрирующие валидность редуцированной трехмерной математической модели мелкого протяженного и слабоискривленного руслового потока, предложенной в работе [4], для моделирования переноса пассивной примеси.

Литература

1. *Abraham G., van Os A. G., Verboom G. K.* Mathematical Modeling of Flows and Transport of Conservative Substances: Requirements for Predictive Ability // Fischer, H. B., ed., *Transport Models for Inland and Coastal Waters: Proceedings of the Symposium on Predictive Ability.*— Berkeley: University of California Academic Press, 1980.— P. 1–38.
2. *Rodi W., Pavlovic R. N., Srivatsa S. K.* Prediction of flow and pollutant spreading in rivers // Там же.— P. 63–111.
3. *Knight D. W.* River hydraulics — a view from midstream // *Journal of Hydraulic Research.* 2013. Vol. 51, No. 1. P. 2–18.
4. *Надолин К. А.* Об одном подходе к моделированию пассивного массопереноса в русловых потоках // *Математическое моделирование.* 2009. Т. 21, N. 2. С. 14–28.
5. *Надолин К. А., Жиляев И. В.* Редуцированная 3D модель гидродинамики мелкого протяженного и слабо искривленного водотока // *Водные ресурсы.* 2017. Т. 44. N. 2. С. 158–167.
6. *Atkinson T.C., Davis P.M.* Longitudinal dispersion in natural channels: 1. Experimental results from the River Severn, U.K. // *Hydrol Earth Syst Sci.* 2000. Vol. 4, No. 3. P. 345–353.
7. *Интернет-ресурс* <https://developers.google.com/maps/>

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИ РАЗНОРОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЕДИНОМ ЧИСЛЕННОМ КОДЕ¹

Острик А.В.

Институт проблем химической физики РАН, г. Черноголовка

Введение

На современном этапе развития вычислительной техники и численных методов моделирования открывается возможность разработки расчетных кодов для исследования набора физических процессов с различной физикой в едином численном коде. Наличие таких кодов принципиально важно, поскольку практически любое явление природы или работа любого технического устройства, создаваемого человеком, есть результат протекания комплекса взаимосвязанных и физически разнородных процессов. Явления в природе и технике не подразделяется на традиционные разделы физики (механику, термодинамику, электродинамику и т.д.) и, более того, эти разделы, ограниченные определенными рамками их применимости и используемыми методами, не могут адекватно описывать реализующиеся на практике сочетания физических процессов.

Поэтому необходим синтез подходов и методов различных разделов физики. Этот синтез не прост и, как правило, приводит к возникновению пограничных областей физических знаний со своими подходами, методами, моделями и численными алгоритмами их реализации.

В настоящей работе рассматриваются некоторые общие принципы создания междисциплинарных численных кодов и приводятся примеры единых численных моделей (ЧМ) физически разнородных процессов, реализующихся в конкретных технических устройствах.

I Общие принципы создания междисциплинарных кодов

Прежде всего, необходим детальный анализ набора протекающих физических процессов и выбор доминирующих, т. е. определяющих исследуемое явление в целом. Это задача, конечно, не однозначна, и результат её решения зависит от целей исследования, требуемой точности и располагаемых средств (возможностей имеющейся в распоряжении вычислительной техники, набора физико-математических моделей доминирующих процессов и алгоритмов для их численной реализации, людских и временных ресурсов и

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 15-08-08615-а, 16-08-01065-а)

т. д.). Понятно, что чем более общие цели формулируются и больше требуемая точность описания явления, тем шире набор доминирующих физических процессов.

Также следует отметить, что междисциплинарные численные коды по необходимости не могут строиться, исходя из самых общих предположений для каждого из доминирующих процессов. В частности, всегда необходим компромисс между мерностью используемых моделей процессов и детальностью описания их физики. Поэтому в междисциплинарных численных кодах имеют успех квазиодномерные или квазистационарные модели с богатой физикой (во многих случаях неравновесной и с учетом взаимовлияния различных процессов).

Одной из причин, затрудняющих разработку междисциплинарных численных кодов, является тот очевидный факт, что математическое моделирование физически разнородных процессов требует и существенно различных наборов исходных данных о свойствах материалов, параметрах воздействующих факторов и исследуемых технических устройств. Поиск и упорядочение этих данных для каждого конкретного устройства затруднителен и требует определенной квалификации, которая может оказаться не достаточной у пользователя кодом в соответствующей области физики. Поэтому междисциплинарный код не мыслим без адаптации с ним проблемно-ориентированной реляционной базы данных (БД) [1].

Для управления взаимодействием ЧМ различных процессов друг с другом (в том числе, и при их взаимном влиянии) и с базой данных необходима общая сервисная оболочка. Она должна быть разработана с учетом возможности того, что частные ЧМ реализованы на различных языках программирования, поскольку в большинстве случаев трудно представить себе возможность создания междисциплинарного кода одним человеком.

Далее будут кратко рассмотрены примеры междисциплинарных численных кодов для исследования действия потоков излучений и частиц (ПИЧ) на преграды и элементы конструкций. Эти коды используют проблемно-ориентированную БД «БАРС» (База – Реляционная, Специализированная) [1, 2], образуя с ней единый расчетный комплекс.

II Принципы и средства реализации БД «БАРС»

Как известно [3], разработка композитной конструкции летательного аппарата (ЛА) и определение требуемых свойств ее материалов реализуются в едином расчетно-экспериментальном процессе при заданном наборе эксплуатационных нагрузок и внешних воздействующих факторов, в число которых входят и потоки излучений и частиц (ПИЧ) [2]. Если расчет конструкций к теплосиловым эксплуатационным нагрузками (в большинстве случаев квазистационарных и осесимметричных) и поиск необходимых для него данных

не вызывает, как правило, принципиальных затруднений, то оценка параметров теплового и механического действий ПИЧ, а также зарядовых эффектов, требуют использования физико-математических моделей и исходных данных из различных областей прикладной физики. Даже при наличии комплекса численных кодов исследования последствий воздействия ПИЧ поиск и извлечение требующихся для расчетов данных из имеющихся обширных баз по дифференциальным сечениям взаимодействия излучений и частиц, а также оптическим, термодинамическим, теплофизическим и механическим свойствам конструкционных материалов является кропотливой и длительной работой, неизбежно сопровождающейся ошибками. Поэтому наличие проблемно-ориентированной реляционной базы данных для прогнозирования последствий теплового и механического действий ПИЧ, а также зарядовых эффектов, на многослойные композитные конструкции ЛА существенно облегчает и ускоряет их проектирование. Конечно, удобная в использовании база данных нуждается и в собственном интерфейсе [4].

Реляционные модели баз данных предполагают организацию и управления данными в виде простых структур (связанных двумерных таблиц), что оказывается весьма удобным для пользователя при пополнении и извлечении данных в требуемом для проведения расчетов формате. Современные системы управления базами данных (СУБД) поставляются вместе со встроенными в них языками, эффективно обеспечивающими запрос данных, их обработку и пополнение с разделением прав пользователей и ограничениями, гарантирующими качество вводимых и корректируемых данных. Рассматриваемая база данных использует свободно распространяемую (в урезанном варианте с соответствующим набором ограничений) реляционную СУБД «Oracle 10g XE» [5] с языком запросов SQL [6].

Ввод новых данных в базу сопровождается дополнительными сведениями (по терминологии теории реляционных БД, атрибутами, размещаемыми в соответствующих столбцах двумерных таблиц): датами ввода или изменения (определяется и фиксируется средствами СУБД автоматически); литературными источниками данных; единицами измерения вводимых физических величин (вводится переводной коэффициент в СИ); точностями измерения величин, идентификаторами блоков данных (основные блоки данных кратко рассмотрены ниже). Вполне понятно и общепринято, что ввод данных в базу сопровождается контролем со стороны СУБД. В частности, для каждой из вводимых физических величин средствами СУБД задаются интервалы её изменения с учётом текущей системы единиц измерения (ввод данной возможен лишь после предварительного ввода переводного коэффициента ее в СИ). Поиск и связывание данных из различных таблиц для требуемого материала осуществляется по уникальному идентификатору записей ID, которым, в частности, определяется и название материала в сокращенном до 10 символов виде.

Наличие табличных баз данных само по себе не обеспечивает эффективности проведения расчетов, так как поиски требуемых значений для ин-

терполяции и её реализация в ряде случаев приводят к необоснованно большим затратам времени и оперативной памяти ЭВМ. В рассматриваемую БД внедрена сервисная оболочка, производящая расчет, запись в базу и считывание из нее коэффициентов аппроксимации и достигнутый уровень погрешности. Таблично заданные функциональные зависимости (от температуры, угла рассеяния и энергии квантов и т.д.) разбиваются на характерные области, в каждой из которых они аппроксимируются соответствующими для этих зависимостей и выбранных областей аналитическими функциями (во многих случаях выбор аппроксимирующих функций основывается на физических соображениях). Коэффициенты аппроксимации определяются методом наименьших квадратов численно с помощью ЭВМ-программы поиска минимума функции многих переменных, входящей в известную библиотеку FORTRAN-программ "NAG". Использование лишь коэффициентов аппроксимации существенно сокращает объем оперативной памяти ЭВМ при расчетах. Особенно это касается задач переноса и поглощения ПИЧ, где хранение в оперативной памяти многомерных табличных зависимостей дифференциальных сечений взаимодействия излучений и частиц от углов рассеяния, энергий квантов и частиц, а также типа вещества представляется явно нецелесообразным.

Поскольку данные в базе находятся под управлением СУБД, то для каждой из использующих их расчетных программ достаточно задать на языке запросов SQL соответствующие программе требования к необходимым данным. При этом результатом работы СУБД является набор файлов данных (в том числе, и коэффициентов аппроксимаций необходимых для расчетов зависимостей) в электронном виде с расширением `dat`, требуемыми структурой и единицами измерения физических величин.

База данных «Барс» состоит из следующих основных блоков [1]: блока характеристик ПИЧ и материалов объекта облучения; блока взаимодействия излучений и частиц с веществом; блока электрофизики; блока теплофизики; блока термодинамики (уравнений состояния); блока характеристик высокоскоростного деформирования и прочности; блока механических характеристик динамического нагружения.

III Механическое действие ПИЧ на тонкостенные конструкции с защитными гетерогенными покрытиями

Доминирующими процессами являются: перенос ПИЧ в материалах конструкции и формирование неравновесного профиля энерговыделения в отдельных компонентах гетерогенных покрытий; выравнивание давления в этих компонентах; газодинамический разлет части преграды и формирование импульса давления на ней; волновые процессы в преграде и формирование оболочечной стадии деформирования; нестационарное деформирование

и разрушение многослойной оболочки конструкции [2]. Для упрощения кода используется возможность независимого рассмотрения переноса излучения и газодинамического разлета в квазиодномерном приближении, а также предположение о квазистатическом выравнивании давления между компонентами гетерогенных покрытий [7].

IV Импульсное тепловое действие ПИЧ на предварительно напряженные конструкции

В [8] предложен новый механизм разрушения конструкций из углеродных материалов при импульсном тепловом действии ПИЧ. Предполагается, что нарушение работоспособности конструкции наступает вследствие развития в ней нестационарных процессов деформирования и разрушения под действием квазистационарных эксплуатационных нагрузок при практически мгновенном изменении жесткости конструкции в результате импульсного нагрева материала. Доминирующими процессами являются: перенос ПИЧ в углеродных материалах и формирование профиля энерговыделения; тепломассоперенос в конструкции, сопровождающийся физико-химическими превращениями; газодинамика излучающего высокотемпературного потока; деформирование и разрушение предварительно напряженной конструкции (например, нагруженного внутренним давлением соплового насадка работающего реактивного двигателя). Упрощение ЧМ достигается предположением о квазиодномерности слоистости тонкостенной конструкции и использованием возможности рассмотрения нестационарной деформации и разрушения неравномерно нагретой оболочки независимо от динамики её прогрева и изменения толщины.

V Тепловое излучение переохлажденной паро-капельной среды при облучении металлических фольг потоком тяжелых ионов

При удельном энерговыделении в поглощающей ионы фольге порядка нескольких кДж/г источником теплового излучения являются капельки, образующиеся при разлете и конденсации переохлажденного пара металла. Доминирующими процессами являются: перенос тяжелых ионов и формирование профиля энерговыделения в фольге; газодинамика разлета фольги с учетом фазовых переходов; нуклеация и рост капель; перенос теплового излучения в паро-капельной среде [9]. Упрощение ЧМ достигается предположением об одномерности процесса разлета паро-капельной среды, гомонизацией этой среды при расчете переноса теплового излучения в ней, а также использованием уравнения Фоккера-Планка при расчете распределения

крупных капель по размерам (для мелких капель – системы кинетических уравнений).

Литература

1. *Острик А.В.* Проблемно-ориентированная реляционная база данных «Барс» // Вопросы оборонной техники, серия 15, 2014. Вып. 3(174). С. 17–23.
2. *Бакулин В.Н., Острик А.В.* Комплексное действие излучений и частиц на тонкостенные конструкции с гетерогенными покрытиями. М.: Физматлит, 2015. 288 с.
3. Механика конструкций из композиционных материалов: Сборник статей. Под. ред. *В.Д. Протасова*. М.: Машиностроение, 1992. 240 с.
4. *Дейт К.Дж.* Введение в системы баз данных. 8-е изд. М.: Вильямс, 2006. 1328 с.
5. *Фейерштейн С., Прибыл Б.* Oracle PL/SQL для профессионалов. СПб.: Питер, 2003. 941 с.
6. *Мартин Грабер* Введение в SQL. М.: Лори, 2010. 228 с.
7. *Острик А.В., Острик Е.А.* Квазистатическая модель установления давления в многокомпонентном пористом гетерогенном материале при воздействии на него излучения // Химическая физика. 2001. Том 20, № 8. С. 90–93.
8. *Острик А.В.* Метод расчета нестационарного деформирования предварительно напряженных композитных многослойных оболочек переменной толщины при импульсном энерговыделении // Конструкции из композиционных материалов. 2016. Вып. 3. С. 3–10.
9. *Ostrik A.V., Lomonosov I.V., Sultanov V.G., Tahir N.A.* Kinetics and optics of droplets induced in lead foils by intense heavy ion beams // Physics of Extreme states of matter–2010, IPCP RAS, Chernogolovka, 2010. P. 166–170.

О ВЕСОВОМ ВЕКТОРНОМ МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА С УГЛОВОЙ СИНГУЛЯРНОСТЬЮ

Рукавишников В.А., Мосолапов А.О.

Вычислительный центр ДВО РАН, Хабаровск

Введение

Слабое решение системы уравнений Максвелла с сингулярностью, вызванной геометрическими особенностями расчетной области, принадлежит пространству $H(\text{rot}, \Omega)$ и не принадлежит $H^1(\Omega)^2$.

Для численного решения таких задач к настоящему времени разработаны различные методики, основанные на декомпозиции решения на регулярную и сингулярную составляющие [1, 2, 3, 4], или предполагающие регуляризацию исходных уравнений путем введения дополнительного слагаемого с весом [5, 6].

В работах [7, 8] нами было предложено определить решение системы уравнений Максвелла с сингулярностью как R_ν -обобщенное, а для его нахождения был построен весовой векторный метод конечных элементов. Численный анализ серии модельных задач позволил установить скорость сходимости приближенного R_ν -обобщенного решения к точному $O(h)$ в норме весового пространства, что в полтора раза по порядку степени h выше по сравнению с результатами перечисленных выше подходов (см. [3, 5, 9]).

В настоящей работе установлено существование и единственность R_ν -обобщенного решения поставленной задачи в весовом множестве Соболева-Монка, получена оценка скорости сходимости $O(h)$ приближенного решения по весовому векторному методу конечных элементов к R_ν -обобщенному решению в норме весового пространства $H_\nu(\text{rot}, \Omega)$, приведены численные эксперименты модельных задач, подтверждающие теоретические оценки скорости сходимости.

I Основные обозначения

Пусть R^2 – двумерное евклидово пространства с элементами $x = (x_1, x_2)$. Пусть $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1) \setminus [0, 1] \times [-1, 0] \subset R^2$ – L-образная область с границей $\partial\Omega$, содержащая тупой внутренний угол величиной $3\pi/2$ с вершиной в точке $O(0, 0)$, τ – единичный касательный вектор к $\partial\Omega$.

Введем в рассмотрение весовую функцию $\rho(x)$, в некоторой δ -окрестности $B_\delta(O)$ точки $O(0, 0)$ совпадающую с расстоянием до нее, а вне этой окрестности равную постоянной δ , $\Omega' = \bar{\Omega} \cap B_\delta(O)$.

Определим весовые пространства $L_{2,\alpha}(\Omega)$, $H_\alpha(\text{rot}, \Omega)$ и $H_\alpha^1(\text{rot}, \Omega)$ с нормами:

$$\|u\|_{L_{2,\alpha}(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \rho^{2\alpha} u^2 dx,$$

$$\|\mathbf{u}\|_{H_\alpha(\text{rot}, \Omega)}^2 = \|\mathbf{u}\|_{L_{2,\alpha}(\Omega)^2}^2 + \|\text{rot } \mathbf{u}\|_{L_{2,\alpha}(\Omega)}^2,$$

$$\|\mathbf{u}\|_{H_{2,\alpha}^1(\text{rot}, \Omega)}^2 = \|\mathbf{u}\|_{H_{2,\alpha}^1(\Omega)^2}^2 + \|\text{rot } \mathbf{u}\|_{H_{2,\alpha}^1(\Omega)}^2,$$

где $\text{rot } \mathbf{u} = \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)$, α – неотрицательное действительное число, $L_{2,0}(\Omega) = L_2(\Omega)$, $H_{2,0}^1(\Omega) = H_2^1(\Omega)$ и

$$\|u\|_{H_{2,\alpha}^1(\Omega)} = \left(\sum_{|\lambda| \leq 1} \int_{\Omega} \rho^{2(\alpha+|\lambda|-1)}(x) |D^\lambda u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

В пространстве $H_\alpha(\text{rot}, \Omega)$ введем весовое множество $H_\alpha(\text{rot}, \Omega, \delta)$ вектор-функций, удовлетворяющих условиям:

$$\text{a) } \text{rot } \mathbf{u} \leq C_1 \left(\frac{\delta}{\rho(x)} \right)^{\alpha+1}, \quad u_i \leq C_1 \left(\frac{\delta}{\rho(x)} \right)^\alpha, \quad i = 1, 2,$$

$$\text{b) } \|\text{rot } \mathbf{u}\|_{L_{2,\alpha}(\Omega \setminus \Omega')} \geq C_2, \quad \|\mathbf{u}\|_{L_{2,\alpha}(\Omega \setminus \Omega')^2} \geq C_2.$$

Здесь C_1, C_2 – положительные константы, не зависящие от \mathbf{u} .

Во множестве $H_\alpha(\text{rot}, \Omega, \delta)$ рассмотрим подмножества

$$\overset{\circ}{H}_\alpha(\text{rot}, \Omega, \delta) = \{\mathbf{u} \in H_\alpha(\text{rot}, \Omega, \delta) | \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0, x \in \partial\Omega\},$$

$$V_\alpha(\Omega, \delta) = \{\mathbf{u} \in \overset{\circ}{H}_\alpha(\text{rot}, \Omega, \delta) | \text{div } \mathbf{u} = 0\}.$$

Справедливы следующие леммы.

Лемма 1. Для любой вектор-функции $\mathbf{u} \in H_\alpha(\text{rot}, \Omega, \delta)$ и любого $\alpha^* > \alpha$ справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}\|_{L_{2,\alpha^*-1}(\Omega)^2} \leq C_3 \|\mathbf{u}\|_{L_{2,\alpha^*}(\Omega)^2},$$

где $C_3 = C_4 \frac{\delta^\alpha}{\sqrt{\alpha^* - \alpha}}$, $C_4 = \text{const}$.

Для любой функции $\mathbf{u} \in H_\alpha(\text{rot}, \Omega, \delta)$ и любого $\alpha^* > \alpha + 1$ справедлива оценка

$$\|\text{rot } \mathbf{u}\|_{L_{2,\alpha^*-1}(\Omega')} \leq \tilde{C}_3 \|\text{rot } \mathbf{u}\|_{L_{2,\alpha^*}(\Omega)},$$

где $\tilde{C}_3 = \tilde{C}_4 \frac{\delta^\alpha}{\sqrt{\alpha^* - \alpha}}$, $\tilde{C}_4 = \text{const}$.

Лемма 1 доказывается по аналогии с леммой 2 из работы [10].

Лемма 2. Пусть $\mathbf{u} \in H_\alpha(\text{rot}, \Omega, \delta)$. Тогда $\rho^\alpha \mathbf{u} \in H(\text{rot}, \Omega)$ и справедлива оценка

$$\|\rho^\alpha \mathbf{u}\|_{H(\text{rot}, \Omega)} \leq C_6 \|\mathbf{u}\|_{H_\alpha(\text{rot}, \Omega)}.$$

Пусть $\rho^\alpha \mathbf{u} \in H(\text{rot}, \Omega)$. Тогда $\mathbf{u} \in H_\alpha(\text{rot}, \Omega, \delta)$ и справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}\|_{H_\alpha(\text{rot}, \Omega)} \leq \tilde{C}_6 \|\rho^\alpha \mathbf{u}\|_{H(\text{rot}, \Omega)}.$$

Здесь C_6, \tilde{C}_6 – положительные константы, не зависящие от \mathbf{u} .

Доказательство Леммы 2 опирается на Лемму 1.

II Постановка задачи

Рассмотрим следующую преобразованную систему уравнений Максвелла для гармонических колебаний в вакууме (см. [1, 5]):

$$\mathbf{rot} \text{rot } \mathbf{E} - k^2 \mathbf{E} = \mathbf{f}, \tag{1}$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 0, \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{3}$$

Здесь k – волновое число, правая часть $\mathbf{f} \in L_2(\Omega)^2$.

Поскольку область невыпуклая, то, как известно, решение задачи (1)-(3) не принадлежит пространству $H^1(\Omega)^2$ (см., например, [1, 6, 5]).

Введем для задачи (1)-(3) понятие R_ν -обобщенного решения (см. [11, 12, 13, 14, 15]). Для этого определим билинейную и линейную формы:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\text{rot } \mathbf{u}, \text{rot}(\rho^{2\nu} \mathbf{v})) - k^2(\mathbf{u}, \rho^{2\nu} \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \left[\rho^{2\nu} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) - \left(\frac{\partial \rho^{2\nu}}{\partial x_2} v_1 - \frac{\partial \rho^{2\nu}}{\partial x_1} v_2 \right) \right] dx - k^2 \int_{\Omega} \rho^{2\nu} (u_1 v_1 + u_2 v_2) dx,$$

$$b(\mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \rho^{2\nu} \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \rho^{2\nu} (f_1 v_1 + f_2 v_2) dx.$$

Определение 1. Вектор-функцию \mathbf{E}_ν из множества $V_\alpha(\Omega, \delta)$ назовем R_ν -обобщенным решением задачи (1)-(3), если для каждой вектор-функции $\mathbf{v} \in V_\alpha(\Omega, \delta)$ справедливо интегральное тождество:

$$a(\mathbf{E}_\nu, \mathbf{v}) = b(\mathbf{v}),$$

где ν – любое, но фиксированное число, удовлетворяющее неравенству:

$$\nu \geq 0. \tag{4}$$

Теорема 1. Пусть $\mathbf{f} \in L_2(\Omega)^2$ и выполняется условие (4). Тогда найдется такой параметр δ , что для любого ν R_ν -обобщенное решение задачи (1)–(3) существует и единственно во множестве $V_\alpha(\Omega, \delta)$. При этом справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}\|_{H_\alpha(\text{rot}, \Omega)} \leq C_7 \|\mathbf{f}\|_{L_{2,\alpha}(\Omega)^2},$$

где C_7 – положительная постоянная, не зависящая от \mathbf{u} и \mathbf{f} .

Доказательство теоремы опирается на теорему о существовании и единственности слабого решения задачи (1)–(3) в пространстве $V_0(\Omega, \delta)$ (см., напр, [16]) и теоремы вложения весовых и невесовых пространств Соболева.

III Схема метода конечных элементов

Построим схему весового векторного метода конечных элементов для нахождения приближенного R_ν -обобщенного решения задачи (1)–(3). Выполним триангуляцию T_h области Ω . Для этого вертикальными и горизонтальными прямыми $x_1 = -1 + ih$, $x_2 = -1 + ih$, где $h = \frac{2}{N}$, N – положительное четное число, $i, j = \overline{0, N}$, разобьем $\overline{\Omega}$ на совокупность квадратов K_i со сторонами длины h . Квадраты K_i будем называть конечными элементами, $T_h = \{K_i\}_{i=1}^{N_h}$, число h – шагом сетки, $N_h = \frac{3N^2}{4}$. Через S_1, \dots, S_{N_S} обозначим множество сторон конечных элементов, не принадлежащих $\partial\Omega$: $S = \{S_i, i = \overline{1, N_S}, S_i \not\subset \partial\Omega, N_S = \frac{3N^2}{2} - 2N\}$. Середину каждой стороны S_i обозначим $M_i, i = \overline{1, N_S}$.

Для каждого конечного элемента K_i обозначим $O^{K_i} = (o_1^{K_i}, o_2^{K_i})$ его центр, $S_i^{K_i}$ – стороны, $M_j^{K_i} = (m_{j1}^{K_i}, m_{j2}^{K_i})$ – их середины, $j = \overline{1, 4}$.

Введем сингулярные функции формы элемента K_i , ассоциированные с его сторонами:

$$\begin{aligned} \psi_1^{K_i} &= \frac{1}{h} \rho^{-\gamma}(m_{11}^{K_i}, x_2) \left(\frac{h}{2} + o_2^{K_i} - x_2 \right) \mathbf{i}, \quad \psi_2^{K_i} = \frac{1}{h} \rho^{-\gamma}(m_{21}^{K_i}, x_2) \left(\frac{h}{2} + x_2 - o_2^{K_i} \right) \mathbf{i}, \\ \psi_3^{K_i} &= \frac{1}{h} \rho^{-\gamma}(x_1, m_{32}^{K_i}) \left(\frac{h}{2} + o_1^{K_i} - x_1 \right) \mathbf{j}, \quad \psi_4^{K_i} = \frac{1}{h} \rho^{-\gamma}(x_1, m_{42}^{K_i}) \left(\frac{h}{2} + x_1 - o_1^{K_i} \right) \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{i}, \mathbf{j} – стандартные базисные векторы, γ – неотрицательное действительное число.

Для каждой стороны $S_i \in S$ введем весовую базисную функцию ψ_i . Пусть K_m и K_n – конечные элементы с общей стороной S_i , $\psi_j^{K_m}$ и $\psi_l^{K_n}$ – их функции формы, ассоциированные со стороной S_i , соответственно. Тогда соответствующая базисная функция ψ_i определяется следующим образом:

$$\psi_i = \begin{cases} \psi_j^{K_m}, & x \in K_m, \\ \psi_l^{K_n}, & x \in K_n, \\ 0, & x \in \Omega \setminus (K_m \cup K_n). \end{cases}$$

Линейную оболочку множества базисных функций $\{\psi_i\}_{i=1}^{N_S}$ обозначим \tilde{V}^h . Пересечение линейной оболочки \tilde{V}^h с множеством $V_\alpha^h(\Omega, \delta)$ обозначим через $V_\alpha^h(\Omega, \delta)$. В этом множестве будем искать приближенное R_ν -обобщенное решение задачи (1)-(3).

Определение 2. Приближенным R_ν -обобщенным решением задачи (1)-(3) по весовому векторному методу конечных элементов будем называть вектор-функцию $\mathbf{E}_\nu^h \in V_\alpha^h(\Omega, \delta)$, которая для любой вектор-функции $\mathbf{v}_h \in V_\alpha^h(\Omega, \delta)$ удовлетворяет интегральному тождеству:

$$a(\mathbf{E}_\nu^h, \mathbf{v}_h) = b(\mathbf{v}_h).$$

Приближенное R_ν -обобщенное решение будем искать в виде $\mathbf{E}_\nu^h = \sum_{i=1}^{N_S} d_i \psi_i$, где $d_i = \rho^\nu(M_i)g_i$, $g_i = \text{const}$. Неизвестные d_i найдем из системы линейных алгебраических уравнений:

$$a(\mathbf{E}_\nu^h, \psi_i) = b(\psi_i), \quad i = \overline{1, N_S}. \tag{5}$$

Замечание 1. В отличие от невесового векторного МКЭ (см., напр, [17, 16]), базисные функции построенного метода содержат в качестве множителя весовую функцию в степени, определяемой пространством, которому принадлежит R_ν -обобщенное решение. Это позволяет лучше аппроксимировать его поведение вблизи точки сингулярности и добиться сходимости приближенного решения к точному со скоростью $O(h)$.

Теорема 2. Пусть $\rho^\nu \mathbf{E}_\nu \in H^1(\Omega)^2$, $\text{rot}(\rho^\nu \mathbf{E}_\nu) \in H^1(\Omega)$ и $\nu > \frac{7}{2} + 1$. Тогда существует такая положительная константа C_7 , не зависящая от h , что справедлива оценка

$$\|\mathbf{E}_\nu - \mathbf{E}_\nu^h\|_{H_\nu(\text{rot}, \Omega)} \leq C_7 h \|\mathbf{E}_\nu\|_{H_\nu^1(\text{rot}, \Omega)}$$

для построенной триангуляции T_h .

IV Результаты численного анализа

Для проведения численного анализа серии модельных задач системы уравнений Максвелла с сильной сингулярностью нами была разработана программа «Проба-III» на основе весового векторного МКЭ, изложенного в п. 4, и GMRES-метода для решения СЛАУ (5).

Здесь мы приведем результаты численного анализа для двух модельных задач. Для этого для каждой задачи введем вспомогательную функцию φ и положим $\mathbf{E} = \text{rot } \varphi$. Подставляя \mathbf{E} в уравнение (1), найдем правую часть \mathbf{f} для двух значений коэффициента $k_1 = 300$ и $k_2 = 220$ (соответствующие частоты 14.314 и 10.497 ГГц соответственно).

Вычисления проводились на сетках с различным числом разбиений N . Оптимальные значения параметров ν и δ были определены экспериментально. Для найденного приближенного R_ν -обобщенного решения величина ошибки вычислялась в норме пространства $L_{2,\nu}(\Omega)^2$.

Модельная задача 1. Для модельной задачи 1,

$$\varphi = (x_1 x_2 (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1))^2 \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right)^{-3.3}.$$

Результаты для этой задачи представлены в Таблице 1 и наглядно изображены на Рисунке 1.

Таблица 1. Зависимость погрешности $\|\mathbf{E} - \mathbf{E}_\nu^h\|_{L_{2,\nu}(\Omega)^2}$ от количества отрезков разбиения N для модельной задачи 1, R_ν -обобщенное решение, $\nu = 2.0$, $\delta = 0.084$ ($k = k_1$); $\nu = 1.9$, $\delta = 0.078$ ($k = k_2$).

N	32	64	128
$\ \mathbf{E} - \mathbf{E}_\nu^h\ _{L_{2,\nu}(\Omega)^2}, k = k_1$	0.0006091	0.0002369	0.0001133
$\ \mathbf{E} - \mathbf{E}_\nu^h\ _{L_{2,\nu}(\Omega)^2}, k = k_2$	0.0007130	0.0002825	0.0001411

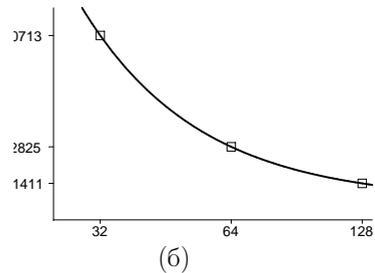
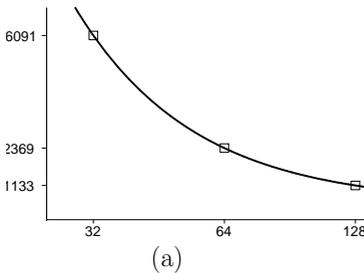


Рис. 1. Зависимость погрешности $\|\mathbf{E} - \mathbf{E}_\nu^h\|_{L_{2,\nu}(\Omega)^2}$ от количества отрезков разбиения N , R_ν -обобщенное решение, модельная задача 1, $k = k_1$ (а); $k = k_2$ (б).

Таблица 2. Зависимость погрешности $\|\mathbf{E} - \mathbf{E}_\nu^h\|_{L_{2,\nu}(\Omega)^2}$ от количества отрезков разбиения N для модельной задачи 2, R_ν -обобщенное решение $\nu = 2.0$, $\delta = 0.063$ ($k = k_1$); $\nu = 1.9$, $\delta = 0.055$ ($k = k_2$).

N	32	64	128
$\ \mathbf{E} - \mathbf{E}_\nu^h\ _{L_{2,\nu}(\Omega)^2}, k = k_1$	0.0039190	0.0016088	0.0007193
$\ \mathbf{E} - \mathbf{E}_\nu^h\ _{L_{2,\nu}(\Omega)^2}, k = k_2$	0.0031597	0.0013818	0.0006643

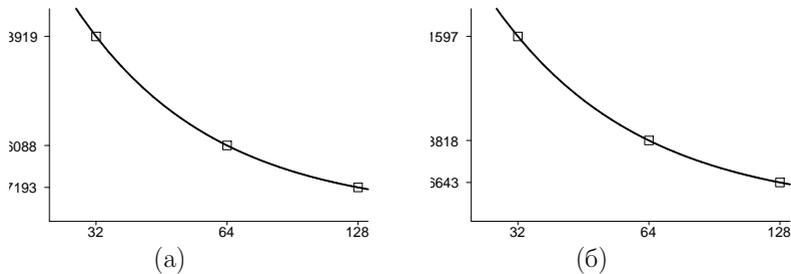


Рис. 2. Зависимость погрешности $\|\mathbf{E} - \mathbf{E}_{\nu}^h\|_{L_{2,\nu}(\Omega)^2}$ от количества отрезков разбиения N , R_{ν} -обобщенное решение, модельная задача 2, $k = k_1$ (а); $k = k_2$ (б).

Модельная задача 2. Для модельной задачи 2,

$$\varphi = x_1 x_2 \sin(\pi x_1) \cos(0.5\pi x_1) \sin(\pi x_2) \cos(0.5\pi x_2) \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right)^{-3.3}.$$

Результаты для этой задачи представлены в Таблице 2 и на Рисунке 2.

Литература

1. Assous F., Ciarlet P., Jr, Segré J. Numerical solution to the time-dependent Maxwell equations in two-dimensional domain: the singular complement method // J. Comput. Phys. 2000. V. 161. N 1. P. 218–249.
2. Assous F., Ciarlet P., Jr., Garcia E. Singular electromagnetic fields: inductive approach // C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. 2005. V. 341. N 10. P. 605–610.
3. Assous F., Ciarlet P., Jr., Garcia G., Segré J. Time-dependent Maxwell's equations with charges in singular geometries // Comput. Methods in Appl. Mech. Engrg. 2006. V. 196. N 1-3. P. 665–681.
4. Buffa A., Ciarlet P., Jr., Jamelot E. Solving electromagnetic eigenvalue problems in polyhedral domains // Numer. Math. 2009. V. 113. N 4. P. 497–518.
5. Costabel M., Daug M. Weighted regularization of Maxwell equations in polyhedral domains // Numer. Math. 2002. V. 93. N 2. P. 239–277.
6. Costabel M., Daug M., Schwab C. Exponential convergence of hp-FEM for Maxwell's equations with weighted regularization in polygonal domains // Math. Model. Meth. Appl. Sci. 2005. V. 15. N 4. P. 575–622.
7. Rukavishnikov V.A., Mosolapov A.O. New numerical method for solving time-harmonic Maxwell equations with strong singularity // Journal of Computational Physics. 2012. V.0 231. P. 2438–2448

8. *Рукавишников В.А., Мосолопов А.О.* Весовой векторный метод конечных элементов для одной задачи электромагнетизма с сильной сингулярностью // ДАН. 2013. Т. 449. С. 144–148.
9. *Jamelot E.* A nodal finite element method for Maxwell's equations // C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. 2004. V. 339. N 11. P. 809–814.
10. *Рукавишников В.А.* О существовании и единственности R_ν -обобщенного решения для краевой задачи с несогласованным вырождением исходных данных // ДАН. 2014. Т. 458. С. 261–263.
11. *Рукавишников В.А.* О весовой оценке сходимости разностных схем // ДАН. 1986. Т. 288. С. 1058–1060.
12. *Рукавишников В.А.* О дифференциальных свойствах R_ν -обобщенного решения задачи Дирихле // ДАН. 1989. Т. 309. С. 1318–1320.
13. *Рукавишников В.А., Рукавишникова Е.И.* Метод конечных элементов для первой краевой задачи с согласованным вырождением исходных данных // ДАН. 1994. Т. 338. С. 731–733
14. *Rukavishnikov V.A.* Methods of numerical analysis for boundary value problem with strong singularity // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2009. V. 24. N 6. P. 565–590.
15. *Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova H.I.* The finite element method for a boundary value problem with strong singularity // J. Comput. Appl. Math. 2010. V. 234. P. 2870–2882.
16. *Monk P.* Finite element methods for Maxwell's equations. Clarendon Press, Oxford. 2003. 450.
17. *Jin J. M.* The finite element method in electromagnetics. N.Y.: John Wiley & Sons, Inc., 2002. 753.

НОВЫЙ ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СТОКСА В ОБЛАСТИ С ТУПЫМ УГЛОМ

Рукавишников В.А. *, Рукавишников А.В. **

* *Вычислительный центр ДВО РАН, Хабаровск*

** *Хабаровское отделение Института прикладной
математики ДВО РАН, Хабаровск*

Введение

Для системы уравнений Максвелла в 2-мерной многоугольной области Ω с входящим тупым углом на границе известно, что ее обобщенное решение не принадлежит пространству Соболева $W_2^1(\Omega)$. Такая задача называется краевой задачей с сильной сингулярностью. Для системы Ламе, например, в области с тупым углом на границе можно определить обобщенное решение в пространстве $W_2^1(\Omega)$, но оно не будет принадлежать пространству $W_2^2(\Omega)$. Такая задача называется краевой задачей со слабой сингулярностью. В [1], для эллиптических краевых задач, было предложено определять решение как R_ν -обобщенное в весовом пространстве Соболева. Предложенный метод позволил построить весовой метод конечных элементов и получить лучший (большой) порядок сходимости приближенного R_ν -обобщенного решения к точному решению задачи по отношению к классическим конечно-разностным и конечно-элементным подходам.

В данной работе предложен численный метод решения задачи Стокса в области с тупым углом. Отметим, что решение задачи имеет особенность в угле φ , $\varphi \in (\pi, 2\pi)$, даже если входные данные задачи гладкие. Двумерное течение вязкой несжимаемой жидкости в невыпуклой области впервые изучено в [2]. Хорошо известно, что обобщенное решение задачи Стокса: компоненты вектора скоростей и функция давления в области Ω с тупым углом на границе не принадлежат пространствам $W_2^2(\Omega)$ и $W_2^1(\Omega)$ соответственно (см. [3]), и приближенное решение, полученное с помощью стандартных конечно-разностных и конечно-элементных схем, сходится к точному решению задачи со скоростью не превосходящей $\mathcal{O}(h^\alpha)$, $\alpha < 1$ в норме пространства $W_2^1(\Omega)$ (для компонент вектора скоростей). Такой эффект загрязнения (см. [4]) наблюдается не только в норме классического пространства Соболева, но и в норме весового.

В статье построен весовой метод конечных элементов [5]-[10] (М К Э), основанный на определении R_ν -обобщенного решения [1], [11]-[14] в L -образной области и использовании inf-sup-устойчивой Скотт-Вогелиус элементной пары [15] (эффективной с точки зрения закона сохранения массы на ячейке). Численные эксперименты модельной задачи показали, что приближенное R_ν -обобщенное решение (вектор скоростей) сходится к точному

решению задачи со скоростью $\mathcal{O}(h)$ в норме пространства $\mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega, \delta)$, что почти в два раза лучше по порядку, чем в классических подходах [4].

I Постановка задачи

Пусть \mathbf{R}^2 – двумерное евклидово пространство, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ – ее элемент с нормой $\|\mathbf{x}\| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ и мерой $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2$. Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ ограниченная, невыпуклая многоугольная область с границей Γ . Вершина тупого угла находится в начале координат, $\bar{\Omega}$ замыкание области Ω , т.е. $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Обозначим через $\Omega'_\delta = \{\mathbf{x} \in \bar{\Omega} : \|\mathbf{x}\| \leq \delta < 1, \delta > 0\}$ часть δ -окрестности точки $(0, 0)$, принадлежащей $\bar{\Omega}$. Определим весовую функцию

$$\rho(\mathbf{x}) = \begin{cases} \|\mathbf{x}\|, & \mathbf{x} \in \Omega'_\delta, \\ \delta, & \mathbf{x} \in \bar{\Omega} \setminus \Omega'_\delta. \end{cases}$$

Пусть $W_{2,\alpha}^k(\Omega)$ – пространство функций с ограниченной нормой

$$\|u\|_{W_{2,\alpha}^k(\Omega)} = \left(\sum_{|m| \leq k} \|\rho^\alpha(\mathbf{x}) |D^m u(\mathbf{x})|\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}, \quad (1)$$

$D^m u(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{|m|} u}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2}}, |m| = m_1 + m_2, m_i \geq 0$ – целые.

Через $W_{2,\alpha}^1(\Omega, \delta)$ для $\alpha > 0$ обозначим множество функций из пространства $W_{2,\alpha}^1(\Omega)$, удовлетворяющих условиям

$$\int_{\Omega \setminus \Omega'_\delta} \rho^{2\alpha}(\mathbf{x}) u^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \geq C_1, \quad |D^m u(\mathbf{x})| \leq C_2 \frac{\gamma^m m!}{\rho^{\alpha+m}(\mathbf{x})} \quad \mathbf{x} \in \Omega'_\delta, \quad (2)$$

где $m = 0, 1$ и $C_1, C_2 > 0, \gamma \geq 1$ константы, не зависящие от m , с ограниченной нормой (1).

Через $L_{2,\alpha}(\Omega, \delta)$ обозначим множество функций из пространства $W_{2,\alpha}^0(\Omega)$, которые подчиняются требованиям (2) с нормой $\|u\|_{L_{2,\alpha}(\Omega, \delta)} = \left(\int_{\Omega} \rho^{2\alpha} u^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2}$. Пусть $L_{2,\alpha}^0(\Omega, \delta) = \{q \in L_{2,\alpha}(\Omega, \delta) : \int_{\Omega} \rho^\alpha q d\mathbf{x} = 0\}$.

Через $W_{2,\alpha}^0(\Omega, \delta) (W_{2,\alpha}^1(\Omega, \delta) \subset W_{2,\alpha}^1(\Omega, \delta))$ обозначим замыкание по норме (1) множества бесконечно дифференцируемых, ограниченных в Ω , функций, удовлетворяющих условиям (2). Будем говорить, что $\varphi(\mathbf{x}) \in W_{2,\alpha}^{1/2}(\Gamma, \delta)$, если существует $\Phi(\mathbf{x})$ из $W_{2,\alpha}^1(\Omega, \delta)$ такая, что $\Phi(\mathbf{x})|_\Gamma = \varphi(\mathbf{x})$ и $\|\varphi\|_{W_{2,\alpha}^{1/2}(\Gamma, \delta)} = \inf_{\Phi|_\Gamma = \varphi} \|\Phi\|_{W_{2,\alpha}^1(\Omega, \delta)}$. Аналогично вводятся пространства:

$$\mathbf{W}_{2,\alpha}^1(\Omega, \delta) = W_{2,\alpha}^1(\Omega, \delta) \times W_{2,\alpha}^1(\Omega, \delta), \quad \mathbf{L}_{2,\alpha}(\Omega, \delta) = L_{2,\alpha}(\Omega, \delta) \times L_{2,\alpha}(\Omega, \delta),$$

$$\mathbf{W}_{2,\alpha}^1(\Omega, \delta) = W_{2,\alpha}^1(\Omega, \delta) \times W_{2,\alpha}^1(\Omega, \delta), \quad \mathbf{W}_{2,\alpha}^{1/2}(\Gamma, \delta) = W_{2,\alpha}^{1/2}(\Gamma, \delta) \times W_{2,\alpha}^{1/2}(\Gamma, \delta).$$

Задача Стокса состоит в том, чтобы найти поле скоростей $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ и функцию давления p , удовлетворяющие системе уравнений и граничным условиям:

$$-\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad (3)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{на} \quad \Gamma. \quad (4)$$

Здесь \mathbf{f} и \mathbf{g} – заданные функции в Ω и на Γ соответственно.

Введем для задачи (3)-(4) понятие R_ν -обобщенного решения. Для этого определим билинейные и линейную формы

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla (\rho^{2\nu} \mathbf{v}) d\mathbf{x}, \quad b(\mathbf{v}, p) = - \int_{\Omega} p \operatorname{div} (\rho^{2\nu} \mathbf{v}) d\mathbf{x},$$

$$c(\mathbf{u}, q) = - \int_{\Omega} (\rho^{2\nu} q) \operatorname{div} \mathbf{u} d\mathbf{x}, \quad l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \rho^{2\nu} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}.$$

Определение 1. Пару функций $(\mathbf{u}_\nu, p_\nu) \in \mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega, \delta) \times L_{2,\nu}^0(\Omega, \delta)$ назовем R_ν -обобщенным решением задачи (3)-(4), если $\mathbf{u}_\nu(\mathbf{x})$ удовлетворяет граничному условию (4) на Γ , для любой пары $(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{W}_{2,\nu}^0(\Omega, \delta) \times L_{2,\nu}^0(\Omega, \delta)$ и $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_{2,\beta}(\Omega, \delta)$, $\mathbf{g} \in \mathbf{W}_{2,\beta}^{1/2}(\Gamma, \delta)$, $\nu \geq \beta$ справедливы интегральные тождества

$$a(\mathbf{u}_\nu, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p_\nu) = l(\mathbf{v}), \quad c(\mathbf{u}_\nu, q) = 0.$$

II Схема весового метода конечных элементов

Выполним триангуляцию Υ_h , основанную на барицентрическом разбиении элементов квазиравномерной триангуляции T_h of $\bar{\Omega}$ (см. [16]). Таким образом, разобьем $\bar{\Omega}$ на конечное число треугольников L_i , $L_i \in T_h$ (макроэлемент). Затем каждый L_i поделим на три треугольника K_{i_j} (конечный элемент), $K_{i_j} \in \Upsilon_h$ (общая вершина которых находится в барицентре макроэлемента L_i). Обозначим через R_l и S_k вершины и середины сторон K_s соответственно. Тогда

- 1) $R^{vel} = R_\Omega^{vel} \cup R_\Gamma^{vel} = \{R_l \cup S_k\}$, где R_Ω^{vel} и R_Γ^{vel} – множества узлов триангуляции для компонент вектора скоростей в Ω и на Γ соответственно;
- 2) $R^{pres} = \{Q_l\}$ – множество узлов триангуляции для давления, где Q_l совпадает с узлом R_k на соответствующем K_{i_j} .

Обозначим через $\Omega_h = \bigcup_{K_s \in \Upsilon_h} K_s$ совокупность конечных элементов со стороны порядка h . Далее, опишем Скотт-Вогелиус (SV) элементную пару

(см. [15], случай $k = 2$). Для компонент вектора скоростей используем полиномы 2-й степени (X^h), а для давления — 1-й степени (Z^h):

$$\begin{aligned} X^h &= \{v^h \in C(\Omega) : v^h|_K \in P_2(K), \forall K \in \Upsilon_h\}; \\ Z^h &= \{z^h \in L_2(\Omega) : z^h|_K \in P_1(K), \forall K \in \Upsilon_h, \int_{\Omega} z^h d\mathbf{x} = 0\}. \end{aligned}$$

Далее, представим специальные базисные функции и построим схему весового метода конечных элементов для задачи Стокса (3)-(4). Каждому узлу $M_k \in R_{\Omega}^{vel}(N_l \in R^{pres})$ соответствует базисная функция

$$\theta_k(\mathbf{x}) = \rho^{\nu^*}(\mathbf{x}) \cdot \varphi_k(\mathbf{x}), \quad \left(\chi_l(\mathbf{x}) = \rho^{\mu^*}(\mathbf{x}) \cdot \psi_l(\mathbf{x}) \right), \quad k = 0, 1, \dots, (l = 0, 1, \dots),$$

где $\varphi_k \in X^h$, $\varphi_k(M_j) = \delta_{kj}$, $k, j = 0, 1, \dots$ ($\psi_l \in Z^h$, $\psi_l(N_j) = \delta_{lj}$, $l, j = 0, 1, \dots$); δ_{ij} символ Кронекера, ν^* и μ^* действительные числа.

Пространства V^h и Q^h для компонент вектора скоростей и давления определяются как линейные оболочки систем базисных функций $\{\theta_k\}_k$ и $\{\chi_l\}_l$ соответственно. Пусть V_0^h подпространство $V^h : V_0^h = \{v^h \in V^h : v^h(M_k)|_{M_k \in R_{\Gamma}^{vel}} = 0\}$. Приближенные компоненты вектора скоростей и функции давления будем искать в виде

$$u_{\nu,1}^h(\mathbf{x}) = \sum_k d_{2k} \theta_k(\mathbf{x}), \quad u_{\nu,2}^h(\mathbf{x}) = \sum_k d_{2k+1} \theta_k(\mathbf{x}), \quad p_{\nu}^h(\mathbf{x}) = \sum_l e_l \chi_l(\mathbf{x}), \quad (5)$$

где $d_j = \rho^{-\nu^*}(M_{[j/2]}) \tilde{d}_j$, $e_i = \rho^{-\mu^*}(N_i) \tilde{e}_i$. Коэффициенты d_j и e_i в (5) находим в результате решения системы (6) (см. ниже). Пусть $\mathbf{V}^h = V^h \times V^h$, $\mathbf{V}_0^h = V_0^h \times V_0^h$ и $\mathbf{V}^h \subset \mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega_h, \delta)$, $\mathbf{V}_0^h \subset \mathbf{W}_{2,\nu}^0(\Omega_h, \delta)$, $Q^h \subset L_{2,\nu}^0(\Omega_h, \delta)$.

Определение 2. Приближенным R_{ν} -обобщенным решением задачи Стокса (3)-(4), полученного с помощью весового МКЭ, назовем пару функций $(\mathbf{u}_{\nu}^h, p_{\nu}^h) \in \mathbf{V}^h \times Q^h$ такую, что $\mathbf{u}_{\nu}^h = (u_{\nu,1}^h, u_{\nu,2}^h)$ в узлах множества R_{Γ}^{vel} удовлетворяет условию (4) и, для произвольных пар $(\mathbf{v}^h, q^h) \in \mathbf{V}_0^h \times Q^h$ и $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_{2,\beta}(\Omega, \delta)$, $\mathbf{g} \in \mathbf{W}_{2,\beta}^{1/2}(\Gamma, \delta)$, $\nu \geq \beta$ выполняются тождества

$$a(\mathbf{u}_{\nu}^h, \mathbf{v}^h) + b(\mathbf{v}^h, p_{\nu}^h) = l(\mathbf{v}^h), \quad c(\mathbf{u}_{\nu}^h, q^h) = 0. \quad (6)$$

III Результаты численных экспериментов

Пусть $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1) \setminus [0, 1] \times [-1, 0]$. Тогда разобьем $\bar{\Omega}$ горизонтальными и вертикальными отрезками $x_1^{(j)} = -1 + jh$, $x_2^{(i)} = -1 + ih$, $j, i = 0, \dots, N$, на элементарные квадраты S_l , $\{S_l\}_{l=1}^{G_h}$, $h = \frac{2}{N}$, N — четное число, $G_h = \frac{3N^2}{4}$. Затем, каждый S_l диагональю делим на два треугольника L_m ,

их множество (макроэлементов) обозначим через $\{L_m\}_{m=1}^{\frac{3N^2}{2}}$. Далее, каждый L_m разбиваем на три треугольника K_s (барицентрическое разбиение), их множество обозначим через $\{K_s\}_{s=1}^{\frac{9N^2}{2}}$.

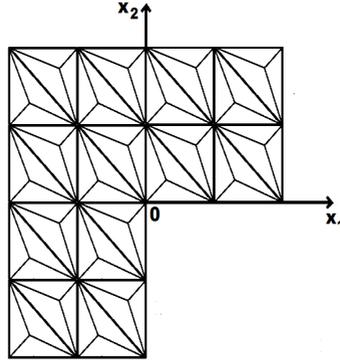


Рис. 1. Триангуляция Υ_h области $\bar{\Omega}$.

Рассмотрим (\mathbf{u}, p) решение задачи Стокса (3)-(4), имеющее особенность в окрестности входящего тупого угла величины $\frac{3\pi}{2}$ с вершиной в начале координат. В полярных координатах (r, φ) решение (см. [17]) имеет вид:

$$u_1(r, \varphi) = r^\lambda \cdot ((1 + \lambda) \Psi(\varphi) \cdot \sin(\varphi) + \Psi'(\varphi) \cdot \cos(\varphi)),$$

$$u_2(r, \varphi) = r^\lambda \cdot (\Psi'(\varphi) \cdot \sin(\varphi) - (1 + \lambda) \Psi(\varphi) \cdot \cos(\varphi)),$$

$$p(r, \varphi) = -r^{\lambda-1} \cdot \frac{(1 + \lambda)^2 \Psi'(\varphi) + \Psi'''(\varphi)}{1 - \lambda}, \Psi(\varphi) = \frac{\sin((1 + \lambda) \varphi) \cdot \cos(\frac{3\pi}{2} \lambda)}{1 + \lambda} - \cos((1 + \lambda) \varphi) - \frac{\sin((1 - \lambda) \varphi) \cdot \cos(\frac{3\pi}{2} \lambda)}{1 - \lambda} + \cos((1 - \lambda) \varphi).$$

Число λ ($\lambda \approx 0.544483$) является наименьшим положительным решением

$$\sin(\lambda \omega) + \lambda \sin(\omega) = 0, \quad \omega = \frac{3\pi}{2}.$$

Пара функций (\mathbf{u}, p) аналитична в $\bar{\Omega} \setminus (0, 0)$, но $\nabla \mathbf{u}$ и p имеют особенность в начале координат, при этом $\mathbf{u} \notin \mathbf{W}_2^2(\Omega)$ и $p \notin W_2^1(\Omega)$ – типичное поведение решения задачи Стокса в многоугольной области с входящим тупым углом на границе Γ .

Численные эксперименты проведены на сетках с различным шагом h . Величины погрешности R_ν -обобщенного и обобщенного ($\nu = 0, \rho \equiv 1, \nu^* = \mu^* = 0$) решений определили с помощью модуля разности между точным

Таблица 1. Величины $\|\mathbf{u}^h - \mathbf{u}\|_{\mathbf{W}_2^1(\Omega)}$ обобщенного решения, при $\nu = 0$, $\delta = 1$, $\nu^* = \mu^* = 0$.

N	80	160	320
$\ \mathbf{u}^h - \mathbf{u}\ _{\mathbf{W}_2^1(\Omega)}$	4.606e-1	3.156e-1	2.163e-1

Таблица 2. Величины $\|\mathbf{u}_\nu^h - \mathbf{u}\|_{\mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega,\delta)}$ R_ν -обобщенного решения для различных ν и δ , при $\nu^* = \mu^* = \lambda - 1$.

$(\nu, \delta), N =$	80	160	320
(1.1, 0.01)	2.186e-3	1.077e-3	5.341e-4
(1.1, 0.0125)	2.279e-3	1.120e-3	5.494e-4
(1.1, 0.015)	2.881e-3	1.408e-3	6.842e-4
(1.8, 0.01)	1.079e-4	5.314e-5	2.597e-5
(1.8, 0.0125)	1.374e-4	6.797e-5	3.360e-5
(1.8, 0.015)	1.865e-4	9.213e-5	4.568e-5

и приближенным решениями в узлах M_k , а также в нормах $W_{2,\nu}^1(\Omega, \delta)$ и $W_2^1(\Omega)$ соответственно. В каждом узле M_i вычислили погрешности $\delta_{ji} = |u_j(M_i) - u_{\nu,j}^h(M_i)|$ (для R_ν -обобщенного) и $\delta'_{ji} = |u_j(M_i) - u_j^h(M_i)|$ (для обобщенного) решений, $M_i \in R_\Omega^{vel}, j = 1, 2$. В табл. 1-3 и на рис. 2-3 представлены результаты численных экспериментов.

Таблица 3. Число вершин (в процентах от общего числа), где δ_{1i} (δ_{2i}) и δ'_{1i} (δ'_{2i}) меньше заданных величин $\bar{\Delta}_k$, для R_ν -обобщенного решения $\nu = 1.1, \delta = 0.01, \nu^* = \mu^* = \lambda - 1$.

$\bar{\Delta}_k, N =$	R_ν -обобщенное			обобщенное		
	80	160	320	80	160	320
$5 \cdot 10^{-4}$	61.4 %	75.0 %	97.6 %	52.7 %	66.8 %	83.4 %
10^{-4}	35.9 %	46.1 %	63.9 %	30.2 %	39.6 %	51.0 %
10^{-5}	15.0 %	18.7 %	28.8 %	13.5 %	16.9 %	22.6 %

IV Заключение

Результаты серии численных экспериментов показали:

- Приближенное R_ν -обобщенное решение задачи Стокса (3)-(4) (вектор-скоростей) сходится к точному решению со скоростью $\mathcal{O}(h)$ в норме $\mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega, \delta)$, в то время как приближенное обобщенное решение — со скоростью $\mathcal{O}(h^\lambda)$ ($\lambda \approx 0.55$ так называемый эффект загрязнения [4]) в норме $\mathbf{W}_2^1(\Omega)$.

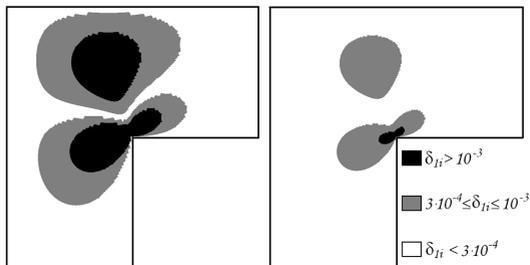


Рис. 2. Распределение точек M_k с погрешностью δ_{1i} для $u_{\nu,1}^h$, $\nu = 1.1$, $\delta = 0.01$, $\nu^* = \mu^* = \lambda - 1$, (левая) $N = 160$, (правая) $N = 320$.

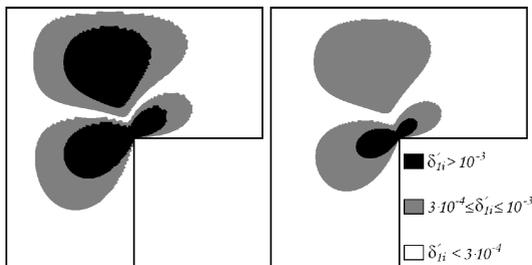


Рис. 3. Распределение точек M_k с погрешностью δ'_{1i} для u_1^h , $\nu = 0$, $\delta = 1$, $\nu^* = \mu^* = 0$, (левая) $N = 160$, (правая) $N = 320$.

- Для всех значений δ , близких к оптимальному, приближенное R_ν -обобщенное решение сходится к точному со скоростью $\mathcal{O}(h)$, при оптимальных значениях ν и δ величина погрешности наименьшая.
- Количество и процент узлов M_i , с ошибкой превосходящей заданные $\bar{\Delta}_k$, уменьшаются с убыванием величины h .

Литература

1. Рукавишников В.А. О дифференциальных свойствах R_ν -обобщенного решения задачи Дирихле // Докл. АН СССР. 1989. Т. 309, № 6. С. 1318-1320.
2. Moffatt H.K. Viscous and resistive eddies near a sharp corner // Journal of Fluid Mechanics. 1964. V. 18. P. 1-18.
3. Dauge M. Stationary Stokes and Navier-Stokes system on two- or three-dimensional domains with corners. I. Linearized equation // SIAM Journal on Mathematics. 1989. V. 20. P. 74-97.

4. *Blum H.* The influence of reentrant corners // Vol. 30 of Numerical treatment of the Navier-Stokes equations. Springer, 1990.
5. *Рукавишников В.А., Рукавишникова Е.И.* Метод конечных элементов для первой краевой задачи с согласованным вырождением исходных данных // ДАН. 1994. Т. 338. № 6. С. 731-733.
6. *Рукавишников В.А., Кузнецова Е.В.* Схема метода конечных элементов для краевой задачи с несогласованным вырождением исходных данных // Сиб. журн. вычисл. матем. 2009. Т. 12. № 3. С. 313-324.
7. *Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova H.I.* The finite element method for a boundary value problem with strong singularity // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2010. V. 234. P. 2870-2882.
8. *Rukavishnikov V.A., Mosolapov A.O.* New numerical method for solving time-harmonic Maxwell equations with strong singularity // Journal of Computational Physics. 2012. V. 231. P. 2438-2448.
9. *Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova H.I.* On the error estimation of the finite element method for the boundary value problems with singularity in the Lebesgue weighted space // Numerical Functional Analysis and Optimization. 2013. V. 34. P. 1328-1347.
10. *Рукавишников В.А., Николаев С.Г.* Весовой метод конечных элементов для задачи теории упругости с сингулярностью // ДАН. 2013. Т. 453. № 4. С. 378-382.
11. *Рукавишников В.А.* О единственности R_ν -обобщенного решения для краевых задач с несогласованным вырождением исходных данных // ДАН. 2001. Т. 376. № 4. С. 451-453.
12. *Рукавишников В.А., Кузнецова Е.В.* О принадлежности R_ν -обобщенного решения краевой задачи с сингулярностью пространству $W_{2,\nu+\beta/2+k+1}^{k+2}(\Omega, \delta)$ // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 6. С. 894-898.
13. *Рукавишников В.А.* О существовании и единственности R_ν -обобщенного решения для краевой задачи с несогласованным вырождением исходных данных // ДАН. 2014. Т. 458. № 3. С. 261-263.
14. *Рукавишников В.А., Николаев С.Г.* Об R_ν -обобщенном решении системы Ламе с угловой сингулярностью // ДАН. 2015. Т. 463 № 2. С. 137-139.
15. *Scott L.R., Vogelius M.* Norm estimates for a maximal right inverse of the divergence operator in spaces of piecewise polynomials // Mathematical Modelling and Numerical Analysis. 1985. V. 19. P. 111-143.
16. *Ciarlet P.* The Finite element method for elliptic problems // Studies in Mathematics and its Applications. Amsterdam: North-Holland, 1978.
17. *Verfürth R.* A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. Chichester-Stuttgart: Wiley-Teubner, 1996.

ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ МЕТОДОВ ТИПА РУНГЕ-КУТТЫ ДЛЯ ЗАДАЧ ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ НА ПРИМЕРЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГИБКИХ БАЛОК¹

Салтыкова О.А.^{*,**}, Папкова И.В.^{*}, Крысько В.А.^{*}

^{*} *Саратовский государственный технический университет
имени Гагарина Ю.А., Саратов*

^{**} *Томский политехнический университет, Томск*

Проведено исследование нелинейной динамики и контактного взаимодействия двухслойного балочного пакета, верхняя балка – описывается моделью Эйлера-Бернулли, нижняя балка – моделью Пелеха-Шереметьева. Геометрическая нелинейность балок учтена по модели Т. фон Кармана. Между балками есть малый зазор. Контактное взаимодействие балок учтено по модели Кантора Б.Я. На верхнюю балку действует поперечная распределенная знакопеременная нагрузка. Исследуется сходимость результатов для хаотических колебаний в зависимости от применяемого численного метода и от шага по пространственной координате и времени. Анализ полученных результатов осуществляется методами нелинейной динамики и качественной теории дифференциальных уравнений.

Введение.

Балки и балочные структуры широко применяются в современной промышленности, машиностроении, ракетостроении и т.д. Часто такие структуры подвергаются различным внешним динамическим воздействиям. Исследование нелинейной динамики и контактного взаимодействия балочных структур является очень важным вопросом на современном этапе развития науки.

Хорошо известны такие теории изгиба балок, как теория Эйлера-Бернулли [1] (первого приближения), Тимошенко С.П. [2] (второго приближения), Пелеха-Шереметьева [3] (третьего приближения). В российской и зарубежной научной литературе можно найти большое количество работ, посвященных исследованию балок, пластин и оболочек, подчиняющихся модели Эйлера-Бернулли, Тимошенко, Пелеха-Шереметьева. Но что касается исследования контактного взаимодействия балок, подчиняющихся разным моделям, то таких работ нами не найдено.

В работе построена математическая модель контактного взаимодействия двух балок, с малым зазором между ними (Рисунок 1). При построении

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда 16-11-10138

математической модели учтено, что балки описываются разными кинематическими гипотезами (первого и третьего приближений). На верхнюю балку (балка 1), описываемой гипотезой первого приближения, действует поперечная знакопеременная нагрузка, а вторая балка (описываемая гипотезой третьего приближения) приходит в движение благодаря контакту с первой.

I Постановка задачи

Рассматриваемая структура из двух балок представляет собой двумерную область пространства R^2 с декартовой системой координат, введенной следующим образом: в теле балки 2 фиксируется линия приведения, называемая срединной линией $z = 0$, ось OX направлена слева направо вдоль срединной линии, ось OZ – вниз, перпендикулярно OX . В указанной системе координат структура из двух балок, как двумерная область Ω определяется следующим образом (Рис. 1):

$$\Omega = \{x \in [0; a]; h \leq z \leq h_k + 3h\}, 0 \leq t \leq \infty.$$

Уравнение движения балок, а также граничные и начальные условия получены из энергетического принципа Гамильтона-Остроградского. В рамках гипотезы для модели Эйлера-Бернулли считаем, что поперечные сечения, перпендикулярные оси балки до изгиба, остаются плоскими и перпендикулярными изогнутой оси и не деформируются в своей плоскости.

При построении математической модели балки третьего приближения предполагается, что поперечные сечения не остаются плоскими, и не перпендикулярны деформированной оси балки, учитываются инерционные составляющие, связанные с поворотом сечений. Уравнения движения изучаемой балочной структуры в перемещениях с учетом диссипации энергии запишутся в следующем виде:

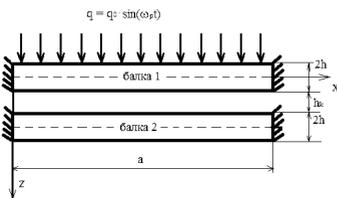


Рис. 1. Расчётная схема

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\lambda^2} \left\{ L_2(w_1, w_1) + L_1(u_1, w_1) - \frac{1}{12} \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} \right\} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - \\ - \varepsilon_1 \frac{\partial w_1}{\partial t} - (-1)^i K(w_1 - w_2 - h_k) \Psi + q(t) = 0, \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + L_3(w_1, w_1) - \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{1}{\lambda^2 63} \left[4 \frac{\partial^3 \gamma_{x_2}}{\partial x^3} - \frac{1}{4} \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} \right] + k^2 \frac{G_{13}}{E_1} \left[\frac{\partial \gamma_{x_2}}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right] + \\ \frac{1}{\lambda^2} \left[F_3(w_2, u_2) + F_1(w_2, u_2) + \frac{3}{2} F_2(w_2, w_2) \right] + \\ (-1)^i K(w_1 - w_2 - h_k) - \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} - \varepsilon_1 \frac{\partial w_2}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + F_4(w_2, w_2) - \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{204}{315} \frac{\partial^2 \gamma_{x_2}}{\partial x^2} - \frac{48}{315} \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} - 12 \lambda^2 k^2 \frac{G_{13}}{E_1} \left[\gamma_{x_2} + \frac{\partial w_2}{\partial x} \right] - \frac{\partial^2 \gamma_{x_2}}{\partial t^2} = 0, \end{array} \right. \quad i = 1, 2. \quad (1)$$

здесь $L_1(u_1, w_1) = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}$, $L_2(w_1, w_1) = \frac{3}{2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2$, $L_3(w_1, w_1) = \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \frac{\partial w_1}{\partial x}$, $F_1(w_2, u_2) = \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \frac{\partial u_2}{\partial x}$, $F_2(w_2, w_2) = \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} \right)^2$, $F_3(w_2, u_2) = \frac{\partial w_2}{\partial x} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}$, $F_4(w_2, w_2) = \frac{\partial w_2}{\partial x} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}$, – нелинейные операторы, w_i , u_i – функции прогибов и перемещений верхней и нижней балок соответственно, γ_{x_2} – функция поперечного сдвига. Отметим, что если заменить γ_{x_2} на угол поворота $-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ мы приходим к гипотезам Эйлера-Бернулли. K – коэффициент жесткости трансверсального обжатия структуры в зоне контакта, h_k – зазор между балками, G_{13} – модуль сдвига, $k^2 = 8/9$. Функция Ψ определена формулой $\Psi = \frac{1}{2} [1 + \text{sign}(w_1 - h_k - w_2)]$, то есть $\Psi = 1$, если есть контакт между балками ($w_1 > h_k + w_2$), иначе контакта нет [4]. К уравнениям (1) следует присоединить краевые и начальные условия. Оба конца балок жестко защемлены. Для балки 1 граничные условия (2), начальные (3).

$$w_1(0, t) = w_1(1, t) = u_1(0, t) = u_1(1, t) = \frac{\partial w_1(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial w_1(1, t)}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Начальные условия для балки 1:

$$w_1(x)|_{t=0} = 0, u_1(x)|_{t=0} = 0, \frac{\partial w_1(x)}{\partial t}|_{t=0} = 0, \frac{\partial u_1(x)}{\partial t}|_{t=0} = 0. \quad (3)$$

Граничные условия для заделки обоих концов балки 2:

$$\begin{aligned} w_2(0, t) = w_2(1, t) = 0; u_2(0, t) = u_2(1, t) = 0; \gamma_{x_2}(0, t) = \gamma_{x_2}(1, t) = 0; \\ \frac{\partial w_2(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial w_2(1, t)}{\partial x} = 0; \frac{\partial u_2(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial u_2(1, t)}{\partial x} = 0; \\ \frac{16}{5} \frac{\partial^2 \gamma_{x_2}(0, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 w_2(0, t)}{\partial x^3} = 0; \frac{16}{5} \frac{\partial^2 \gamma_{x_2}(1, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 w_2(1, t)}{\partial x^3} = 0; \\ \frac{136}{315} \frac{\partial \gamma_{x_2}(0, t)}{\partial x} - 0.038 \frac{\partial^2 w_2(0, t)}{\partial x^2} = 0; \frac{136}{315} \frac{\partial \gamma_{x_2}(1, t)}{\partial x} - 0.038 \frac{\partial^2 w_2(1, t)}{\partial x^2} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Начальные условия для балки 2:

$$\begin{aligned} w_2(x, t)|_{t=0} = u_2(x, t)|_{t=0} = \gamma_{x_2}(x, t)|_{t=0} = 0, \\ \frac{\partial w_2(x, t)}{\partial t}|_{t=0} = \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t}|_{t=0} = \frac{\partial \gamma_{x_2}(x, t)}{\partial t}|_{t=0} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Система уравнений (1)-(5) приведена к безразмерному виду с помощью переменных (6).

$$\begin{aligned} \bar{w} = \frac{w}{2h}, \bar{u} = \frac{ua}{(2h)^2}, \bar{x} = \frac{x}{a}, \lambda = \frac{a}{(2h)}, \bar{q} = q \frac{a^4(1-\nu^2)}{(2h)^4 E}, \\ \bar{t} = \frac{t}{\tau}, \tau = \frac{a}{c}, c = \sqrt{\frac{Eg}{(1-\nu^2)\rho}}, \bar{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 \frac{a}{c}, \bar{\gamma}_x = \frac{\gamma_x a}{2h} \end{aligned} \quad (6)$$

На балку 1 действует поперечная распределенная по поверхности знакопеременная нагрузка вида:

$$q = q_0 \sin(\omega_p t) \quad (7)$$

где q_0 – амплитуда, ω_p – частота вынуждающих колебаний.

Полученная система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (1)-(5) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений методом конечных разностей с аппроксимацией $O(c^2)$, где c – шаг по пространственной координате. Полученная задача Коши по времени решается методами типа Рунге-Кутты. На основании описанного алгоритма создан программный комплекс, позволяющий решать поставленную задачу в зависимости от управляющих параметров $\{q_0, \omega_p\}$. Большое внимание в работе уделялось вопросу о непротиворечивости элементов структуры друг в друга. Изучаемая задача является нелинейной, поэтому встает вопрос о достоверности получаемых результатов.

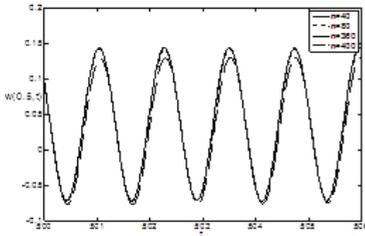
Система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений методом конечных разностей второго порядка точности. Задача Коши решается численными методами, решение существенно зависит от метода и шага решения по времени. Поэтому предлагается решать задачу Коши несколькими методами. Метод Рунге-Кутты 4-го (RK4), 2-го (RK2) порядков, метод

Рунге-Кутта-Фелберга 4-го порядка (rkf45), метод Кеш-Карпа 4-го порядка (RKCK), Рунге-Кутта Принса-Дорманда восьмого порядка (rk8pd), неявный метод Рунге-Кутта 2-го (rk2imp) порядка и 4-го (rk4imp) порядка. Явный метод характерен тем, что матрица коэффициентов имеет нижний треугольный вид (включая и нулевую главную диагональ) – в отличие от неявного метода, где матрица имеет произвольный вид. Методы RKf45, RKCK, RK8PD предусматривают автоматическое изменение шага, а также возможность контроля погрешности интегрирования.

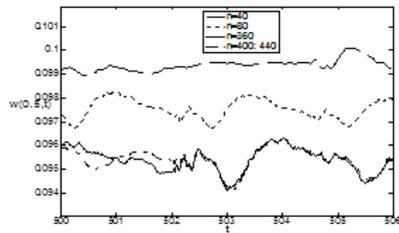
II Численный эксперимент

На балку 1 действует нагрузка (7). Амплитуда вынуждающих колебаний $q_0 = 5000$, частота – $\omega_p = 5.1$, величина зазора $h_k = 0.1$.

Исследуем сходимости численных результатов, в зависимости от количества интервалов по длине балок. На Рисунке 2 приведем графики сигналов балки 1 – модель первого приближения и балки 2 – модель третьего приближения при $n = 40; 80; 360; 400; t \in [500; 506]$. Для решения задачи Коши применялся метод Рунге-Кутты 8-го порядка в модификации Принса-Дорманда – Rk8pd.



а) балка 1 модели первого приближения



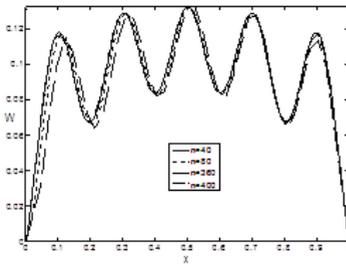
б) балка 2 модели третьего приближения

Рис. 2. Сигналы $w(0.5; t)$ балок; $n = 40; 80; 360; 400; t \in [500; 506]$

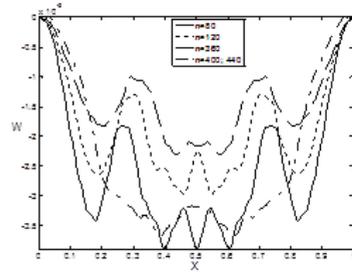
Сигналы балки 1 совпадают, начиная с $n = 80$. Сигналы балки 2 обладают худшей сходимостью. Сигналы начинают совпадать с $n = 360$, но не на всем временном интервале, при $n = 400$ и $n = 440$ сигналы совпадают. Далее исследуем сходимость эпюр прогибов балок при $t = 502$ (Рисунок 3) в зависимости от n .

Эпюры балки 1 совпадают, начиная с $n = 80$, но сходимость по эпюрам балки 2 достигается при $n = 440$. Следовательно, при проведении численного эксперимента необходимо брать разбиение по пространственной координате $n = 400$.

Исследуем сходимость сигналов и эпюр прогибов при использовании для решения задачи Коши методов типа Рунге-Кутты (Rk2, Rk2imp, Rk4,



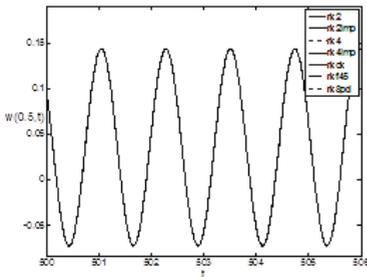
а) балка 1 модели первого приближения



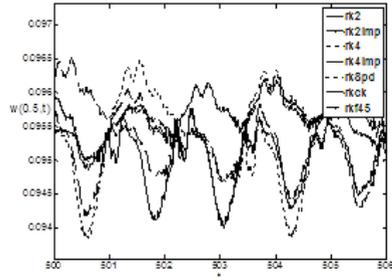
б) балка 2 модели третьего приближения

Рис. 3. Эпюры прогибов балок при $n = 40; 80; 360; 400$.

Rk4imp, Rkck, Rkf45, Rk8pd), при $n = 400$. На Рисунке 4 приведем сигналы $w(0.5; t)$ балок при $t \in [500; 506]$ для обеих балок.



а) балка 1 модели первого приближения



б) балка 2 модели третьего приближения

Рис. 4. Сигналы $w(0.5; t)$ балок полученных методами типа Рунге-Кутты, $t \in [500; 506]$.

Сигналы балки 1 полностью совпадают при любых используемых методах. Сходимость по сигналам балки 2 хуже, но близки сигналы, полученные методами rk8pd, rkf45, rk4.

На Рисунке 5 приведем эпюры прогибов балок, полученных с использованием методов rk2, rk2imp, rk4, rk4imp, rkck, rkf45, rk8pd.

Эпюры прогибов балки 1 полностью идентичны, не зависимо от применяемого метода, а для балки 2 эпюры прогибов различны. Полное совпадение по эпюрам прогиба балки 2 достигается методами rk4 и rkf45.

Для исследования сходимости результатов в зависимости от разбиений по пространственной координате и в зависимости от применяемого метода решения задачи Коши было проведено сравнение спектров мощности, фазовых

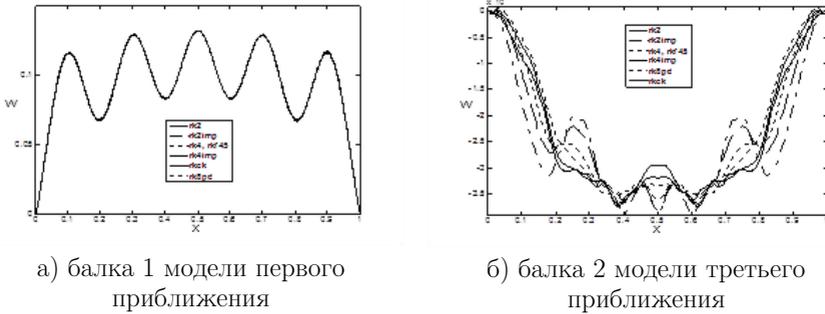


Рис. 5. Эпюры прогибов балок полученных методами типа Рунге-Кутты при $t = 502$.

портретов 2D и 3D, вейвлет спектров, псевдо отображений Пуанкаре.

Выводы

В результате проведенного исследования обнаружено, что сходимость численных результатов для поставленной задачи достигается при числе разбиений по пространственной координате $n = 120$ для балки 1 и $n = 400$ для балки 2. Сходимость доказана как для частотных характеристик (спектр мощности Фурье, вейвлет спектр Гаусса 32), так для сигналов и эпюр прогиба обеих балок.

Проведено сравнение результатов в зависимости от применяемого метода решения задачи Коши, таких как методы класса Рунге-Кутты различных порядков в явном и неявном виде. Обнаружено, что для достижения сходимости численных результатов для балки 1 достаточно использования Рунге-Кутта второго порядка, тогда как для балки 2 сходимость результатов характерна для метода восьмого порядка (rk8pd) и четвертого порядка (rk4 и rkf45).

В работе доказана истинность получаемых результатов для хаотических колебаний двухслойной балочной структуры с учетом контактного взаимодействия балок, описываемых кинематическими гипотезами первого и третьего приближения.

Литература

1. A.V. Krysko, J. Awrejcewicz, I.E. Kutepov, N.A. Zagniboroda, V. Dobriyan, V.A. Krysko Chaotic dynamics of flexible Euler-Bernoulli beams // Chaos. 2013. V. 23. N. 4.

2. *Тимошенко С.П.* Устойчивость стержней, пластин и оболочек / С.П.Тимошенко // Избранные работы / под ред. Э.И.Григолока. – М.: Физматгиз, 1971. 808 с. // Nuclear Enging and Design. 1987. Vol. 102. N 1. P. 313–317.
3. *Шереметьев М.П., Пелех Б.Л.* К построению уточненной теории пластин // Инж.журн. 1964. Т. 4, Вып. 3. С. 34–41.
4. *Кантор Б.Я., Богатыренко Т.Л.* Метод решения контактных задач нелинейной теории оболочек // Докл. АН УССР. сер. А. 1986. № 1. С.18–21.

ВЫСОКОТОЧНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗМУЩЁННОГО ДВИЖЕНИЯ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ В ЗАДАЧЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО СУЩЕСТВОВАНИЯ

Сергеев С.И.

*Московский авиационный институт (национальный
исследовательский университет), Москва*

Введение

В настоящее время заселённость околоземного пространства достаточно высока и постоянно растёт. На низкой орбите уже находится около двухсот тысяч объектов, в области геостационарной орбиты более пятидесяти тысяч объектов размером более двух сантиметров. Только несколько процентов из них – функционирующие аппараты, это означает, что все остальные объекты имеют только пассивное движение, определяемое внешними возмущающими силами. Различные орбиты имеют различное влияние действующих сил, таких как состояние атмосферы и приливных сил для низких орбит и учёт влияния лунно-солнечных связей и планет Солнечной системы для высоких и геостационарных орбит. Учёт влияния релятивистских эффектов, солнечной радиации на длительном интервале прогнозирования требует использования специальных методов численного интегрирования высоких порядков. Модели движения постоянно уточняются и усложняются, в результате, вместе с увеличением количества объектов, моделирование возмущённого движения предъявляет высокие требования к вычислительным средствам. В работе представлена реализация высокоточной численной модели движения искусственных спутников Земли (ИСЗ) с учётом влияния значимых возмущающих сил на низкой орбите, где состояние атмосферы сильно зависит от солнечной активности. Особенностью реализации является применение гетерогенных вычислительных структур. Параллельная реализация численного моделирования позволяет одновременно вычислять параметры орбиты нескольких тысяч объектов. Реализация на гетерогенной вычислительной структуре, позволяет получить увеличение производительности на один-два порядка по сравнению с классическими вычислительными структурами.

I Модель возмущённого движения

В космической геодинاميке используются две системы отсчёта, земная и небесная. Земная система отсчёта (TRS, Terrestrial Reference System) жёст-

ко связана с телом Земли. В этой системе заданы прямоугольные координаты наблюдательных пунктов и разложение гравитационного поля Земли в ряд по сферическим гармоникам. Небесная система отсчёта (CRS, Celestial Reference System) является инерциальной и задана совокупностью положений звёзд и удалённых радиоисточников [1].

Уравнение движения ИСЗ в инерциальной системе координат может быть описано следующим образом:

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{a}_g + \vec{a}_{ng} + \vec{a}_{emp} \quad (1)$$

где \vec{r} – вектор положения центра массы спутника,

\vec{a}_g – сумма гравитационных сил, действующих на спутник,

\vec{a}_{ng} – сумма негравитационных сил, действующие на поверхность спутника,

\vec{a}_{emp} – немоделируемые силы, которые действуют на спутник из-за неверного или неполного описания различных сил или по причине неточных параметров, которые описывают моделируемые силы.

II Гравитационные возмущения

Гравитационные силы могут быть представлены как:

$$\vec{a}_g = \vec{P}_{geo} + \vec{P}_{st} + \vec{P}_{ot} + \vec{P}_{rd} + \vec{P}_n + \vec{P}_{rel}, \quad (2)$$

где

\vec{P}_{geo} – возмущения, вызванные геопотенциалом Земли

\vec{P}_{st} – возмущения, вызванные приливными силами упругой Земли

\vec{P}_{ot} – возмущения, вызванные океаническими приливами

\vec{P}_{rd} – возмущения, вызванные деформацией вращения Земли

\vec{P}_n – возмущения, вызванные влиянием Солнца, Луны и планет

\vec{P}_{rel} – возмущения, вызванные Общей теорией относительности

Возмущения, действующие на ИСЗ, вызванные несферичностью геопотенциала Земли можно представить как градиент потенциала U , который удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2 U = 0$:

$$\nabla U = \nabla(U_s + \Delta U_{st} + \Delta U_{ot} + \Delta U_{rd}) = \vec{P}_{geo} + \vec{P}_{st} + \vec{P}_{ot} + \vec{P}_{rd}, \quad (3)$$

где, U_s – потенциал, определяющий распределение массы твёрдого тела, ΔU_{st} – изменение потенциала вызванного приливами твёрдого тела, ΔU_{ot} – изменение потенциала, вызванного приливами океана и ΔU_{rd} – изменение потенциала вызванного деформацией вращения.

Возмущающая функция потенциала в земной системе отсчёта для распределения массы Земли вычисляется при разложении в ряд по сферическим гармоникам:

$$U(r, \varphi, \lambda) = \frac{GM_e}{r} + \frac{GM_e}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{r_e}{r}\right)^n \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \times [(\bar{C}_{nm} + \Delta \bar{C}_{nm}) \cos m\lambda + (\bar{S}_{nm} + \Delta \bar{S}_{nm}) \sin m\lambda] \quad (4)$$

где

GM_e – геоцентрическая гравитационная постоянная,

r_0 – средний экваториальный радиус Земли,

\bar{P}_{nm} – нормированные присоединённые функции Лежандра порядка n и степени m ,

$\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ – нормированные сферические коэффициенты при тессеральных и секторальных гармониках, порядка n и степени m , причём $\bar{C}_{11} = \bar{C}_{11} = \bar{S}_{11} = 0$,

$\Delta \bar{C}_{nm}$ и $\Delta \bar{S}_{nm}$ – периодические изменения коэффициентов, вызванные упругой Землёй и океанами,

r, φ, λ – модуль расстояния, широта и долгота объекта в земной системе координат.

Так как Земля является упругим телом, то форма и распределение массы будут изменяться под действием гравитационных сил возмущающих тел, Солнца, Луны и крупных планет.

Возмущения от приливных деформаций Земли вводятся как поправки в свободные от приливов коэффициенты $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ разложения при тессеральных и секторальных гармониках Земли.

В рамках модели Лява вычисления проводятся в несколько этапов. На первом шаге, вычисляются поправки, используя частотно независимые величины k_{nm} , сначала для упругой Земли, потом для неупругой Земли.

Возмущения океанических приливов, возникающие при гравитационном взаимодействии Солнца и Луны могут быть представлены как вариации сферических коэффициентов геопотенциала.

Существует несколько глобальных приливных океанических моделей, но наиболее широкую известность приобрела модель CSR, основанная на данных полученных по наблюдениям спутника TOPEX/Poseidon.

Так как Земля упругое тело и включает в себя достаточно значительную жидкую компоненту, изменения в угловом векторе скорости создаст переменную центробежную силу, которая, соответственно, деформирует Землю. Деформация, которая называется «деформация вращения», может быть выражена как изменение центробежного потенциала

Гравитационные возмущения от Солнца, Луны и других планет, как объектов точечной массы, могут быть выражены в инерциальной геоцентрической системе координат как:

$$\bar{P}_n = \sum_i GM \left[\frac{\bar{r}_i}{r_i^3} - \frac{\bar{\Delta}_i}{\Delta_i^3} \right] \quad (5)$$

где

G – универсальная гравитационная постоянная,

M_i – масса i -го возмущающего тела,

\vec{r}_i – вектор положения i -го возмущающего тела в геоцентрической системе координат,

$\vec{\Delta}_i$ – вектор положения i -го возмущающего тела относительно ИСЗ

Значения \vec{r}_i больших планет и Луны вычисляются из Эфемерид.

Точность лучших современных наблюдений составляет 1-2 м для планет и несколько мм для Луны. Все современные эфемериды основаны на релятивистских уравнениях движения небесных тел и релятивистских шкалах времени.

В соглашении IERS 2010¹ года рекомендуется использовать эфемериды из DE421/LE421. Ошибка в представлении координат больших планет и Луны имеет порядок одной миллисекунды дуги.

III Негравитационные возмущения

Влияние на ИСЗ от негравитационных сил можно представить следующим выражением:

$$\vec{a}_{ng} = \vec{P}_{drag} + \vec{P}_{solar} + \vec{P}_{earth} + \vec{P}_{thermal} \quad (6)$$

где

\vec{P}_{drag} – возмущения от сопротивления атмосферы

\vec{P}_{solar} – возмущения от давления солнечной радиации

\vec{P}_{earth} – возмущения от давления земной радиации

$\vec{P}_{thermal}$ – возмущения от тепловых потоков

В общем случае, возмущения вызванные силами негравитационной природы, зависят от формы и ориентации ИСЗ в пространстве. Однако, можно представить наиболее общие модели. Искусственный спутник Земли, совершающий орбитальное движение с некоторой скоростью ν в атмосфере с плотностью ρ испытывает как подъёмную силу, так и силу торможения атмосферой. Подъёмные силы слишком малы, по сравнению с силой торможения атмосферой Земли, которую можно представить следующим образом:

$$\vec{P}_{drag} = -\frac{1}{2}\rho \left(\frac{C_d A}{m} \right) \nu_r \vec{\nu}_r \quad (7)$$

где

ρ – плотность атмосферы

$\vec{\nu}_r$ – скорость спутника относительно атмосферы

ν_r – модуль вектора скорости спутника

m – масса спутника

C_d – коэффициент торможения для спутника

A – площадь мишени спутника

Параметр $\frac{C_d A}{m}$ называется баллистическим коэффициентом спутника.

Когда необходимо более детальное моделирование, сила сопротивления на

¹International Earth Rotation and Reference Systems Service

произвольной поверхности космического аппарата, например солнечной батареи, может быть определена как:

$$\bar{P}_{panel d} = -\frac{1}{2}\rho \left(\frac{C_{dp} |A_p \cos \gamma|}{m} \right) v_r \bar{v}_r \quad (8)$$

где

C_{dp} – коэффициент сопротивления солнечной панели

A_p – площадь солнечной панели

γ – угол между нормалью плоскости солнечной панели, определяемый единичным вектором $\hat{\eta}$ и вектором скорости спутника \bar{v}_r : $\cos \gamma = \hat{\eta} \left(\frac{\bar{v}_r}{v} \right)$

$|A_p \cos \gamma|$ – эффективная площадь солнечной панели, перпендикулярная вектору скорости \bar{v}_r

Существует множество эмпирических моделей плотности атмосферы, используемых для вычисления плотности на определённой высоте. Такие модели были ранее представлены в работах Jacchia 71, Jacchia 77, Drag Temperature Model (DTM), DTM-2000, MSIS-90 и NRLMSISE-00. Разработана отечественная модель ГОСТ Р 25645.166-2004, которая по своим параметрам близка к модели NASA NRLMSISE-00. Обе модели получены по обширному наблюдательному материалу и рассчитаны на диапазон высот от 120 до 1500 км над поверхностью Земли. Ошибки в определении плотности, вычисленной при помощи этих моделей, могут составлять от 10% до более чем 200% в зависимости от солнечной активности.

В данной работе используется модель атмосферы JB2008, рекомендованная к использованию CIRA². Особенностью модели является использование дополнительных индексов солнечной активности, получаемых с космических аппаратов наблюдения за Солнцем.

Дополнительные возмущения создаются давлением света, излучением Земли и тепловым излучением КА. В среднем, за единицу времени, Солнце излучает постоянно количество фотонов. На расстоянии 1 а.е. от Солнца, поток солнечной энергии составляет около 1,4 кВт/м², при этом давление света можно представить как поток импульса в среднем равный 4,56 мкПа.

Не только прямое давление от солнечного излучения необходимо учитывать для точного прогнозирования движения ИСЗ, но и отражённое излучение от Земли, определяемое диффузной отражательной способностью – альбедо Земли.

Так как температуры поверхности спутника не однородны из-за внутренних и внешних тепловых потоков, то существуют силы, связанные с неустойчивостью теплового излучения. Эти возмущения зависят от формы, тепловых параметров спутника, особенностей орбиты и тепловой среды спутника в целом. Моделирование таких возмущений может быть довольно сложным. Например, если у спутника есть активные радиаторы для теплоотдачи, то у теплового излучения могут быть зеркальные особенности, тогда как тепловое излучение от плоских панелей как правило диффузное.

²Committee on Space Research international reference atmosphere

Как видно, из представленных уравнений движения и дополнительных возмущений, с точки зрения распараллеливания вычислительных процессов и реализации на гетерогенных вычислительных структурах, возможно разделить процесс интегрирования и вычисления возмущающих сил. Возмущающие силы складываются на каждом шаге интегрирования и следовательно, могут выполняться одновременно на параллельной вычислительной архитектуре.

Более подробно с гравитационными возмущениями и их вычислением на гетерогенной вычислительной структуре можно ознакомиться в работе [2].

IV Моделирование параметров орбиты ИСЗ

В качестве примера моделирования продолжительности баллистического существования ИСЗ использован космический аппарат (КА) «Фобос-Грун». Запуск состоялся 8 ноября 2011 года в 20:16:02.871 UTC (9 ноября в 00:16:02.871 ДМВ), однако в результате нештатной ситуации, когда не произошло расчётного срабатывания маршевой двигательной установки перелётного модуля, межпланетная станция не смогла покинуть окрестности Земли, оставшись на низкой околоземной орбите. 15 января 2012 года АМС сгорела в плотных слоях земной атмосферы. Параметрами орбиты: наклонение – 51.48° ; минимальная высота – 206.5 км ; максимальная высота – 345.2 км ; период обращения – 89.88 мин. КА имеет следующие характеристики: масса $M = 13505$ кг, площадь миделя $A = 12.3$ m^2 , $C_x = 2.183$ m/c^2 , $C_b = 9,941e-4$ $m^3 kg^{-1} c^{-1}$

На 15 ноября 2011 года некоторые источники сообщали о свидетельствах работы двигателей межпланетной станции. Это подтверждалось параметрами изменения орбиты станции – перигей орбиты повышается, а апогей снижается. Согласно публикации [3], на 15 ноября 2011 года высота перигея АМС составила 209,2 километра, в то время как после запуска 9 ноября – 206,6 километра. При этом высота самой дальней точки орбиты – апогея – уменьшилась, с 342 до 331,8 километра.

Как показало моделирование, такое изменение орбиты вызвано только возмущающими силами. Два основных фактора изменяют орбиту ИСЗ. Первый – это влияние второй зональной гармоники геопотенциала, вызванный несферичностью планеты. Вторым фактором является сопротивление атмосферы Земли. Первая фактор вызывает возмущения восходящего узла, в следствии чего высота апогея и перигея на 15 ноября увеличилась. Вторая причина вызывает уменьшение большой полуоси и изменение формы орбиты. Поскольку плотность атмосферы быстро падает с высотой, основное сопротивление и уменьшение скорости спутник испытывает вблизи перигея. Вследствие этого высота апогея орбиты спутника с каждым оборотом заметно уменьшается, а высота перигея уменьшается гораздо медленнее. В

результате уменьшается большая полуось и эксцентриситет орбиты. Наложение этих двух факторов привело к тому, что высота перигея немного увеличилась, а апогея продолжала снижаться, что и привело к такому эффекту.

При определении времени баллистического существования ИСЗ необходимо учитывать влияние солнечной активности, которое может в несколько раз изменять плотность атмосферы на больших высотах. Так как точно предсказать солнечную активность невозможно, то вычисления проводят исходя из предположения, что активность будет увеличиваться, уменьшаться или останется средней. Результаты моделирования для КА «Фобос-Грунт» представлены в таблице:

Таблица 1. Результат баллистических расчётов

Sun Flux/Сб	Min	Nom	Max
Min	19.01.2012		
Nom		15.01.2012	
Max			11.01.2012

Результат моделирования параметров орбиты КА «Фобос-Грунт» для средней солнечной активности представлены на рисунке:

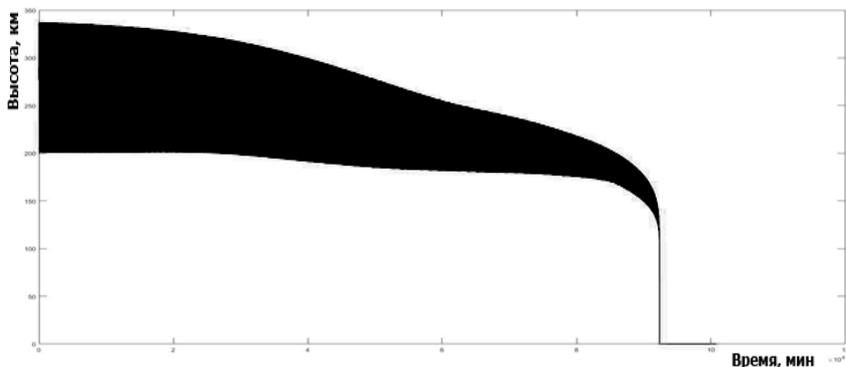


Рис. 1. Орбита КА Фобос-Грунт

V Заключение

Кроме постоянного уточнения и усложнения моделей возмущённого движения, имеется тенденция к увеличению частоты обновления индексов солнечной активности до нескольких раз в сутки. В результате, для прогнозирования возмущённого движения необходимо каждый раз пересчитывать прогноз орбитального движения КА. Таким образом, моделирование большого

количества объектов на орбите, которое может составлять несколько сотен объектов, представляющих угрозу только для пилотируемой космонавтики, может представлять серьезную вычислительную задачу, для решения которой необходимо привлекать высокопроизводительные вычислительные кластеры. Однако, применение гетерогенной вычислительной структуры позволяет сравнительно дешево решить такую задачу.

Литература

1. *Дубошин Г.Н.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. Москва: Наука, 1976. 864 с.
2. *Сергеев, С.И., Казакевич Ю.В., Ефанов А.В.* Оптимизация высокоточной модели движения искусственных спутников Земли для гетерогенных вычислительных структур. // Актуальные вопросы проектирования автоматических космических аппаратов для фундаментальных и прикладных научных исследований (выпуск 2): Сборник научных трудов конференции. Химки: Издатель АО «НПО Лавочкина», 2017. С. 586–591.
3. «Фобос-Грунт» увеличил перигей своей орбиты еще на 1 км – наблюдатели // РИА Новости. [Электронный ресурс] 2011. Дата обновления: 15.11.2011. URL <https://ria.ru/science/20111115/489200400.html> (дата обращения: 15.08.2017).

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ СОПРЯЖЕННО-ОПЕРАТОРНОЙ МОДЕЛИ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ¹

Сорокин С.Б.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск

Введение

Как правило, при численной реализации модели задачи теплопроводности

$$\mathbf{R}^* \mathbf{w} \equiv \operatorname{div} \mathbf{w} = f, \quad \mathbf{w} = \mathbf{K}\mathbf{q}, \quad \mathbf{q} = \mathbf{R}u \equiv -\operatorname{grad} u \quad (1)$$

в криволинейной системе координат исходят из записи ее в декартовой системе координат

$$\operatorname{div} \mathbf{w} \equiv \frac{\partial w^1}{\partial x_1} + \frac{\partial w^2}{\partial x_2} + \frac{\partial w^3}{\partial x_3} = f, \quad \mathbf{w} = \mathbf{K}\mathbf{q}, \quad \mathbf{q} = -\operatorname{grad} u \equiv - \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} \end{bmatrix}.$$

Далее исключают неизвестные \mathbf{w}, \mathbf{q} и получают уравнение для u :

$$- \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (K_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta}) = f.$$

После этого производят в нем замену переменных. Так в цилиндрической системе координат предыдущему уравнению соответствует уравнение

$$\begin{aligned} -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r(\bar{k}_{11} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\bar{k}_{12}}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \bar{k}_{13} \frac{\partial u}{\partial z})] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\bar{k}_{21} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\bar{k}_{22}}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \bar{k}_{23} \frac{\partial u}{\partial z}) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{k}_{31} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\bar{k}_{32}}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \bar{k}_{33} \frac{\partial u}{\partial z}) = f, \end{aligned} \quad (2)$$

где коэффициенты $\bar{k}_{\alpha\beta}$ выражаются через $K_{\alpha\beta}$.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке программы № 1.3 Фундаментальные исследования ОМН РАН Современные вычислительные и информационные технологии решения больших задач, программы президиума РАН Интеллектуальные информационные технологии, математическое моделирование, системный анализ и автоматизация.

Аппроксимация столь сложного дифференциального оператора на неравномерной сетке с сохранением свойств, присущих исходному дифференциальному оператору (симметричность и положительная определенность), представляет определенные трудности.

В случае, когда расчетная область, в которой требуется решить (2), является круговым цилиндром, на его оси $r = 0$ необходимо ставить дополнительное условие для выделения ограниченного решения. В результате аппроксимация оператора в окрестности $r = 0$ требует специального рассмотрения [1]-[3].

В настоящей работе в полярной системе координат строится дискретный аналог **исходной** сопряженно-операторной модели задачи теплопроводности (1).

В качестве расчетной области выбирается круг или кольцо, являющиеся прямоугольниками в полярной системе координат.

Построение осуществляется для двумерного случая лишь в целях компактности изложения. Обобщение на трехмерный случай (цилиндрическая система координат) не представляет труда.

Аппроксимация (1) производится методом опорных операторов [4]-[9] (в англоязычной литературе - Mimetic finite difference methods [10]-[11]): 1. В качестве опорного выбирается оператор \mathbf{R} ; 2. Строится его аппроксимация \mathbf{R}_h ; 3. Аппроксимация \mathbf{R}_h^* сопряженного оператора \mathbf{R}^* строится как оператор, сопряженный к построенному в предыдущем пункте: $\mathbf{R}_h^* = (\mathbf{R}_h)^*$; 4. Производится аппроксимация $\mathbf{w}_h = \mathbf{K}_h \mathbf{q}_h$ второго из уравнений (1) - $\mathbf{w} = \mathbf{K} \mathbf{q}$.

В результате, для сопряженно-операторной модели задачи теплопроводности (1) получаем дискретный аналог сохраняющий ее структуру:

$$\mathbf{R}_h^* \mathbf{w}_h = f_h, \quad \mathbf{w}_h = \mathbf{K}_h \mathbf{q}_h, \quad \mathbf{q}_h = \mathbf{R}_h u_h. \quad (3)$$

Из (3), в частности, легко получаем постановку «в температурах», на дискретном уровне - аппроксимацию (2):

$$\mathbf{R}_h^* \mathbf{K}_h \mathbf{R}_h u_h = f_h,$$

в которой оператор $\mathbf{R}_h^* \mathbf{K}_h \mathbf{R}_h$, очевидно, симметричен и, по крайней мере, положительно полуопределен.

Выбор в качестве опорного оператора \mathbf{R} обусловлен двумя причинами.

Во-первых, тем, что в любой криволинейной системе координат y_1, y_2, y_3 его действие на скалярную функцию записывается в виде разложения по кобазису (взаимному базису) $\mathbf{e}^i, i = 1, 2, 3$ с помощью частных производных

$$\mathbf{R}u = -grad u \equiv - \left[\frac{\partial u}{\partial y_1} \mathbf{e}^1 + \frac{\partial u}{\partial y_2} \mathbf{e}^2 + \frac{\partial u}{\partial y_3} \mathbf{e}^3 \right]$$

и построение его аппроксимации \mathbf{R}_h на прямоугольной сетке не представляет труда.

В работе ковариантные компоненты $\mathbf{R}u$ аппроксимируется (со вторым порядком точности) в центре каждой прямоугольной ячейки неравномерной

сетки посредством полусуммы центральных разностей по соответствующему координатному направлению.

Тем самым все компоненты дискретного аналога векторной величины $\mathbf{q} = \mathbf{R}u$ задаются в одних и тех же узлах сетки. Это позволяет корректно определить действие дискретного аналога тензора теплопроводности на дискретный аналог градиента температуры и, по сути дела, наряду со способом аппроксимации градиента определяет второй порядок сходимости схемы. На неравномерной сетке для переменных (в том числе и разрывных) параметров среды со вторым порядком сходятся не только скалярные сеточные функции (приближения к температуре), но и сеточные вектор-функции (приближения к потоку тепла).

Во-вторых, это позволяет избежать непосредственной аппроксимации операции ковариантного дифференцирования (∇_i) контравариантных компонент w^α вектора потока тепла [12]-[13], содержащихся в операторе дивергенции вектора:

$$\mathbf{R}^* \mathbf{w} = \text{div } \mathbf{w} = \nabla_1 w^1 + \nabla_2 w^2.$$

I Сопряжено-операторная модель в полярной системе координат

В качестве области Ω выберем множество, описываемое в декартовой системе координат $x = (x_1, x_2)$ следующим образом:

$$\bar{\Omega} = \{x = (x_1, x_2) : l_1 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq L_1\}.$$

Для описания такой области и численной реализации модели естественно выбрать полярную систему координат: $y_1 = r$, $y_2 = \varphi$. Связь между декартовой и полярной системами координат записывается в виде

$$x_1 = y_1 \cos y_2 = r \cos \varphi, \quad x_2 = y_1 \sin y_2 = r \sin \varphi.$$

В выбранной системе координат $\bar{\Omega}$ является прямоугольником

$$\bar{\Omega} = \{l_1 \leq r \leq L_1, l_2 \leq \varphi \leq L_2\}, \quad 0 \leq l_2, L_2 \leq 2\pi.$$

При записи модели (1) в выбранной системе координат $y = (y_1, y_2)$ конкретизации подлежат первое и второе соотношения, поскольку действие оператора $grad$ на скалярную функцию u в любой криволинейной системе координат записывается с помощью частных производных:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = -grad u = - \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial y_1} \\ \frac{\partial u}{\partial y_2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Здесь q_1, q_2 ковариантные компоненты вектора \mathbf{q} .

В первом уравнении из (1) операция $div \mathbf{w}$ записывается в произвольной криволинейной системе координат с помощью ковариантных производных ∇_i от контравариантных компонент w^j вектора \mathbf{w} :

$$div \mathbf{w} = \nabla_1 w^1 + \nabla_2 w^2. \quad (5)$$

Поскольку в (5) использованы контравариантные компоненты w^1, w^2 вектора \mathbf{w} а в (4) градиент дает ковариантные компоненты q_1, q_2 вектора \mathbf{q} второе соотношение из (1) необходимо записать таким образом, чтобы в нем вектор \mathbf{w} представлялся контравариантными компонентами:

1. Из ковариантных компонент вектора \mathbf{q} с помощью операции жонглирования индексами получаем его контравариантные компоненты q^1, q^2

$$q^i = \sum_{j=1}^2 g^{ij} q_j, \quad i = 1, 2, \quad g^{11} = 1, g^{12} = g^{21} = 0, g^{22} = \frac{1}{r^2}.$$

Матрицу составленную из этих компонент $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{bmatrix}$ будем обозначать \mathbf{G}^{-1} .

Тогда имеем

$$\begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{bmatrix} = \mathbf{G}^{-1} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}.$$

2. Из контравариантных компонент вектора \mathbf{q} получаем ковариантные компоненты вектора \mathbf{w} :

$$w_i = \sum_{j=1}^2 \hat{K}_{ij} q^j \Leftrightarrow \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{K}_{11} & \hat{K}_{12} \\ \hat{K}_{21} & \hat{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{bmatrix}.$$

Здесь \hat{K}_{ij} ковариантные компоненты тензора ранга два \mathbf{K} в криволинейной системе координат $y = (y_1, y_2)$. Они связаны, в соответствии с определением тензора ранга два, с ковариантными компонентами $K_{\alpha\beta}$ этого же тензора в декартовой системе координат соотношениями:

$$\hat{K}_{ij} = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 K_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial y_j}, \quad i, j = 1, 2.$$

Для полярных координатах имеем

$$\begin{aligned} \hat{K}_{11} &= K_{11} \cos^2 \varphi + (K_{12} + K_{21}) \cos \varphi \sin \varphi + K_{22} \sin^2 \varphi, \\ \hat{K}_{12} &= (K_{22} - K_{11}) r \sin \varphi \cos \varphi + K_{12} r \cos^2 \varphi - K_{21} r \sin^2 \varphi, \\ \hat{K}_{21} &= (K_{22} - K_{11}) r \sin \varphi \cos \varphi + K_{21} r \cos^2 \varphi - K_{12} r \sin^2 \varphi, \\ \hat{K}_{22} &= K_{11} r^2 \sin^2 \varphi - (K_{12} + K_{21}) r^2 \sin \varphi \cos \varphi + K_{22} r^2 \cos^2 \varphi. \end{aligned}$$

3. Наконец, так же как в 1., из ковариантных компонент вектора \mathbf{w} получаем его контравариантные компоненты:

$$\begin{bmatrix} w^1 \\ w^2 \end{bmatrix} = \mathbf{G}^{-1} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}.$$

Окончательно

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \begin{bmatrix} w^1 \\ w^2 \end{bmatrix} = \mathbf{G}^{-1} \widehat{\mathbf{K}} \mathbf{G}^{-1} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{K}_{11} & \widehat{K}_{12} \\ \widehat{K}_{21} & \widehat{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \equiv \widetilde{\mathbf{K}} \mathbf{q} \end{aligned} \quad (6)$$

и сопряжено-операторная модель в полярной системе координат записывается в виде

$$\mathbf{R}^* \mathbf{w} \equiv \frac{\partial w^1}{\partial r} + \frac{\partial w^2}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} w^1 = f, \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} w^1 \\ w^2 \end{bmatrix} = \widetilde{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \mathbf{R} u \equiv - \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Сохранение сопряжено-операторной структуры исходной модели на дискретном уровне будет положено в основу построения ее дискретного аналога.

II Построение дискретного аналога

II.1 Сетки и конечномерные пространства

Построим произвольные неравномерные сетки:

$$\bar{\omega} = \{(r_i, \varphi_j) \in \bar{\Omega}, r_i = r_{i-1} + h_{1,i}, 1 \leq i \leq N_1 + 1, r_0 = l_1, r_{N_1+1} = L_1, \\ \varphi_j = \varphi_{j-1} + h_{2,j}, 1 \leq j \leq N_2 + 1, \varphi_0 = l_2, \varphi_{N_2+1} = L_2\},$$

$$\bar{\omega}^* = \{(r_i, \varphi_j) \in \bar{\omega}, i = \overline{0, N_1 + 1}, j = \overline{0, N_2}\},$$

$$\omega = \{(r_i, \varphi_j) \in \bar{\omega}, i = \overline{1, N_1}, j = \overline{0, N_2}\},$$

$$\omega_{\frac{1}{2}} = \{(r_{i+\frac{1}{2}}, \varphi_{j+\frac{1}{2}}) \in \bar{\Omega}, r_{i+\frac{1}{2}} = r_i + 0,5 h_{1,i+1}, 0 \leq i \leq N_1, \\ \varphi_{j+\frac{1}{2}} = \varphi_j + 0,5 h_{2,j+1}, 0 \leq j \leq N_2\}.$$

Введем дополнительно

$$\hat{h}_{1,m} = \begin{cases} 0,5 h_{1,1}, & m = 0, \\ 0,5 [h_{1,m} + h_{1,m+1}], & 1 \leq m \leq N_1, \\ 0,5 h_{1,N_1+1}, & m = N_1 + 1, \end{cases}$$

$$\hat{h}_{2,j} = \begin{cases} 0,5 [h_{2,1} + h_{2,N_2+1}], & j = 0, \\ 0,5 [h_{2,j+1} + h_{2,j}], & 1 \leq j \leq N_2. \end{cases}$$

Замечание Если $L_2 < 2\pi$, то следует положить

$$\hat{h}_{2,j} = \begin{cases} 0,5 h_{2,1}, & j = 0, \\ 0,5 [h_{2,j} + h_{2,j+1}], & 1 \leq j \leq N_2, \\ 0,5 h_{2,N_2+1}, & m = N_2 + 1. \end{cases}$$

Определим сеточные функции:

$$\rho_i = \begin{cases} l_1 + \frac{1}{4}h_{1,1} & i = 0, \\ r_i + \frac{1}{4}[h_{1,i+1} - h_{1,i}], & 1 \leq i \leq N_1, \\ L_1 - \frac{1}{4}h_{1,N_1+1} & i = N_1 + 1. \end{cases}$$

Введем гильбертовы пространства.

H_h – гильбертово пространство скалярных сеточных функций u^h , заданных на сетке $\bar{\omega}^*$, принимающих нулевое значение на $\partial\Omega$ и удовлетворяющих, если $l_1 = 0$, условию $u^h(0, \varphi_j) = const$, $0 \leq j \leq N_2$. Скалярное произведение в H_h определим формулой

$$(u^h, v^h)_{H_h} = \sum_{(r_i, \varphi_j) \in \bar{\omega}^*} u^h(r_i, \varphi_j) v^h(r_i, \varphi_j) \hat{h}_{1,i} \hat{h}_{2,j} \rho_i, \\ \forall u^h \in H_h, \quad v^h \in H_h.$$

Если область есть круг, $r_0 = l_1 = 0$, то $\sum_{j=0}^{N_2} \hat{h}_{2,j} = L_2 - l_2 = 2\pi$ и

$$(u^h, v^h)_{H_h} = 2\pi \hat{h}_{1,0} \rho_0 u_0^h v_0^h + \sum_{i=1}^{N_1+1} \sum_{j=0}^{N_2} u^h(r_i, \varphi_j) v^h(r_i, \varphi_j) \hat{h}_{1,i} \hat{h}_{2,j} \rho_i, \\ u_0^h = u^h(0, \varphi_j), \quad v_0^h = v^h(0, \varphi_j).$$

H_h^* – гильбертово пространство сеточных вектор-функций \mathbf{w}^h , заданных на сетке $\omega_{\frac{1}{2}}$ своими ковариантными $\mathbf{w}^h = \begin{bmatrix} w_1^h \\ w_2^h \end{bmatrix}$ или контравариантными $\mathbf{w}^h = \begin{bmatrix} w^{1h} \\ w^{2h} \end{bmatrix}$ компонентами со скалярным произведением

$$(\mathbf{w}^h, \sigma^h)_{H_h^*} = \sum_{(r_{i-\frac{1}{2}}, \varphi_{j-\frac{1}{2}}) \in \omega_{\frac{1}{2}}} \sum_{k=1}^2 w^{kh}(r_{i-\frac{1}{2}}, \varphi_{j-\frac{1}{2}}) \sigma_k^h(r_{i-\frac{1}{2}}, \varphi_{j-\frac{1}{2}}) h_{1,i} h_{2,j} r_{i-0,5}, \\ \forall \mathbf{w}^h \in H_h^*, \quad \sigma^h \in H_h^*.$$

II.2 Аппроксимация оператора $\mathbf{R} = -\text{grad}$

За аппроксимацию опорного оператора \mathbf{R} выберем

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_h : H_h &\rightarrow H_h^* : \\ \left[\begin{array}{c} q_1^h \\ q_2^h \end{array} \right]_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} &= (\mathbf{R}_h u^h)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} = - \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1, j}^h - u_{i, j}^h}{h_{1, i+1}} + \frac{u_{i+1, j+1}^h - u_{i, j+1}^h}{h_{1, i+1}} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i, j+1}^h - u_{i, j}^h}{h_{2, j+1}} + \frac{u_{i+1, j+1}^h - u_{i+1, j}^h}{h_{2, j+1}} \right) \end{array} \right]_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}, \\ &(r_{i+\frac{1}{2}}, \varphi_{j+\frac{1}{2}}) \in \omega_{\frac{1}{2}}, \\ u_{i, j}^h &= 0, \quad (r_i, \varphi_j) \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Здесь и далее

$$u_{i, j}^h = u^h(r_i, \varphi_j), \quad \left[\begin{array}{c} q_1^h \\ q_2^h \end{array} \right]_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} = \left[\begin{array}{c} q_1^h(r_{i+\frac{1}{2}}, \varphi_{j+\frac{1}{2}}) \\ q_2^h(r_{i+\frac{1}{2}}, \varphi_{j+\frac{1}{2}}) \end{array} \right],$$

а для компактности записи используется $u_{i, N_2+1}^h = u_{i, 0}^h$, $i = \overline{0, N_1 + 1}$.

II.3 Аппроксимация оператора $\mathbf{R}^* = \text{div}$

В качестве аппроксимации $\mathbf{R}_h^* : H_h^* \rightarrow H_h$ оператора $\mathbf{R}^* = \text{div}$ выбираем сопряженный к оператору \mathbf{R}_h :

$$(\mathbf{R}_h u^h, \mathbf{w}^h)_{H_h^*} = (u^h, \mathbf{R}_h^* \mathbf{w}^h)_{H_h}. \quad (10)$$

Действие оператора \mathbf{R}_h^* может быть получено непосредственно из (10) с использованием формул суммирования по частям ($w_{i\pm\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{kh} = w_{i\pm\frac{1}{2}, N_2+\frac{1}{2}}^{kh}$):

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_h^* \mathbf{w}^h(r_i, \varphi_j) &= \\ &= \frac{1}{\rho_i} \frac{1}{2} \left[\frac{h_{2, j+1}}{h_{2, j}} \frac{r_{i+\frac{1}{2}} w_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{1h} - r_{i-\frac{1}{2}} w_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{1h}}{h_{1, i}} + \frac{h_{2, j}}{h_{2, j}} \frac{r_{i+\frac{1}{2}} w_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^{1h} - r_{i-\frac{1}{2}} w_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^{1h}}{h_{1, i}} \right] + \\ &+ \frac{1}{\rho_i} \frac{1}{2} \left[\frac{h_{1, i+1}}{h_{1, i}} r_{i+\frac{1}{2}} \frac{w_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{2h} - w_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^{2h}}{h_{2, j}} + \frac{h_{1, i}}{h_{1, i}} r_{i-\frac{1}{2}} \frac{w_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{2h} - w_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^{2h}}{h_{2, j}} \right], \\ &(r_i, \varphi_j) \in \omega. \end{aligned} \quad (11)$$

В случае $l_1 = 0$ к (11) следует добавить аппроксимацию дивергенции в центре круга:

$$\mathbf{R}_h^* \mathbf{w}^h(r_0, \varphi_j) = \frac{1}{2\pi\rho_0 \hat{h}_{1,0}} \sum_{j=0}^{N_2} r_{0,5} w_{\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{1h} h_{2, j+1}.$$

П.4 Аппроксимация тензора \mathbf{K} и разностная схема

За аппроксимацию тензора $\tilde{\mathbf{K}}$ из соотношений (6), (8) выберем оператор $\tilde{\mathbf{K}}_h : H_h^* \rightarrow H_h^*$, действующий по правилу:

$$\begin{bmatrix} w^{1h} \\ w^{2h} \end{bmatrix}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} = [\tilde{\mathbf{K}}_h \mathbf{q}^h]_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \hat{K}_{11} & \frac{1}{r^2} \hat{K}_{12} \\ \frac{1}{r^2} \hat{K}_{21} & \frac{1}{r^4} \hat{K}_{22} \end{bmatrix}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} q_1^h \\ q_2^h \end{bmatrix}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}.$$

Окончательно, дискретная сопряженно-операторная модель задачи теплопроводности имеет вид:

$$\mathbf{R}_h^* \mathbf{w}^h = f^h, \quad \mathbf{w}^h = \tilde{\mathbf{K}}_h \mathbf{q}^h, \quad \mathbf{q}^h = \mathbf{R}_h u^h, \quad u^h \in H_h, \quad \mathbf{w}^h \in H_h^*.$$

Здесь векторнозначные сеточные функции $\mathbf{q}^h, \mathbf{w}^h$ представлены своими ковариантными и контравариантными компонентами, соответственно.

Обоснование сходимости построенной схемы со вторым порядком точности для случая, когда расчетная область является кольцом или кольцевым сектором ($l_1 > 0$), можно осуществить аналогично [9]. Обоснование сходимости для $l_1 = 0$ требует дополнительного исследования.

Отметим, что в случае, когда возможно разделение переменных, для постановки «в температурах», имеется возможность использовать экономичный метод обращения оператора задачи.

Литература

1. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука. 1976. 152 с.
2. Карчевский М.М., Ляшко А.Д. Разностные схемы для квазилинейных эллиптических уравнений на полярной сетке. В сб. Численные методы механики сплошной среды. Т. 3, № 4, 1972, С. 77–88.
3. Глушеникова В.Д., Ляшко А.Д. Разностные схемы для квазилинейных эллиптических уравнений в полярных координатах, Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. № 6. 1052–1060.
4. Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А. П., Шашков М. Ю. Операторные разностные схемы. Дифф.уравнения. 1981. Т. 17, № 7, С. 1317–1321.
5. Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А. П., Шашков М. Ю. О представлении разностных схем математической физики в операторной форме // ДАН СССР. 1981. Т. 258, № 5, С. 1092–1096.
6. Samarski A.A., Tishkin V.F., Favorskii A.P., Shashkov M. Employment of the reference-operator methods in the construction of finite difference analog of tensor operations // Differ.Equ 1983. V. 18. N. 7. P. 881–885.

7. Коновалов А.Н., Сорокин С.Б. Структура уравнений теории упругости. Статическая задача. печ. Препринт № 665 ВЦ СО АН СССР. Новосибирск. 1986. 27 с.
8. Коновалов А.Н. Сопряженно-факторизованные модели в задачах математической физики. Сиб. журн. вычисл. математики. 1998. Т. 1. № 1. С. 25–57.
9. Сорокин С.Б. Обоснование дискретного аналога сопряженно-операторной задачи теплопроводности. Сибирский журнал индустриальной математики. Т. 17, № 4(60). 2014. С. 98–110.
10. L. Beirao da Veiga, K. Lipnikov and G. Manzini The Mimetic Finite Difference Method For Elliptic Problems, vol. 11 of Modeling, Simulation and Applications. Springer-Verlag, Berlin. 2014. 392 p.
11. K. Lipnikov, G. Manziina, M. Shashkov Mimetic finite difference method. // Journal of Computational Physics. 2014. N. 257. P. 1163–1227.
12. Карчевский М.М., Волошановская С.Н. Об аппроксимации тензора деформации в криволинейных координатах. Разностная схема для задачи о равновесии упругого цилиндра. // Изв. вузов. Матем. 1977. № 10. С. 70–80.
13. Пуриков Н.В. Об аппроксимации ковариантных производных компонент векторов и тензоров в произвольной криволинейной системе координат. // Вариационные методы в задачах численного анализа. Новосибирск. 1986. С. 150–157.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КИСЛОРОДНОГО РЕЖИМА В ВОДОЕМАХ АЗОВО-ЧЕРНОМОРСКОГО РЕГИОНА¹

Шабас И.Н., Селютин В.В.

ИММиКМ им.И.И. Воровича ЮФУ, Ростов-на-Дону

Среди основных абиотических факторов, тесно связанных с биологической продуктивностью гидрозосистем, особое место принадлежит растворённому кислороду. Одной из особенностей современного экологического состояния водоемов Азово-Черноморского региона является регулярное цветение воды в июле-августе и расширение зон дефицита кислорода, что приводит к ухудшению условий водозабора и водоснабжения, а также к заморным явлениям в экосистемах. Экстремально высокая интенсивность потребления кислорода приурочена к контактной зоне "вода-донные отложения", составляя в общих расходах кислорода 10–30% в зависимости от глубины участка. Столь высокая интенсивность биохимического потребления кислорода в поверхностном слое донных отложений при высоких температурах и пониженной концентрации насыщения кислородом способна привести к значительному снижению его содержания в придонных слоях даже при кратковременном прекращении вертикального водообмена.

Основными источниками поступления кислорода в водную толщу являются газообмен с атмосферой и фотосинтетическая аэрация. К факторам, обуславливающим потребление кислорода, относятся расходование его на дыхание организмов, бактериальная деструкция органического вещества в водной толще и на дне, а также окисление органических загрязнений. Кислород также расходуется на чисто химическое окисление продуктов восстановительных процессов (сероводорода, метана, аммиака).

В работе представлены результаты одномерного моделирования изменения кислородного режима в мелководном водоеме. Для однородного района акватории можно составить следующую упрощенную систему уравнений, описывающую сезонный ход и вертикальное распределение кислорода [3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} (D(t, z) \frac{\partial q}{\partial z}) + p(t, z) - k(\theta, q)Y, \quad 0 < z < H, \\ \frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} (D(t, z) \frac{\partial Y}{\partial z}) + (1 - \eta)p(t, z) - k(\theta, q)Y, \quad 0 < z < H, \\ -D(t, 0) \frac{\partial q}{\partial z} \Big|_0 &= \alpha(t)(q_s(t) - q|_0), \quad \frac{\partial Y}{\partial z} \Big|_0 = 0, \\ -D(t, H) \frac{\partial q}{\partial z} \Big|_H &= k_B(\theta, q)B, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} \Big|_H = F(t, z), \end{aligned}$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Мин-ва обр. и науки РФ, Базовая часть гос. задания, тема: Фундаментальные и прикл. задачи мат. моделирования №1.5169.2017/8.9

где $q(t, z)$ – концентрация кислорода; $Y(t, z)$ – концентрация лабильного органического вещества (ЛОВ); $B(t)$ – количество лабильного органического вещества на единицу площади аэробного слоя донных отложений; $P(t) = \int_0^H p(t, q) dz$ – первичная продукция под одним квадратным метром поверхности (ПП); $D(t, z)$ – коэффициент вертикальной диффузии, зависящий от ветровой активности $W(t)$; $k(\theta, q)$ – скорость окисления ЛОВ, зависящая от температуры $\theta(t)$ и концентрации кислорода $q(t, z)$; $k_B(\theta, q)$ – то же на дне; η – доля первичной продукции, поступающая в донные отложения; предполагается, что скорость оседания взвешенного органического вещества на порядок больше скорости диффузии, в силу чего можно не использовать уравнение вертикального переноса; $q_s(t)$ – концентрация насыщения кислорода, зависящая от температуры воды $\theta(t)$; $\alpha(t)$ – коэффициент реаэрации, зависящий от скорости ветра на поверхности воды $W(t)$; H – глубина водоема.

Концентрация кислородного насыщения q_s , зависящая главным образом от температуры воды θ , и коэффициент вертикальной диффузии D , обусловленной ветровым перемешиванием, рассматриваются в данной модели как экзогенные факторы и рассчитываются с помощью эмпирических формул, широкий набор которых представлен в [1, 5]. В частности, используются следующие аппроксимации

$$q_s(\theta) = \frac{14.8}{1 + 0.0316 \cdot \theta},$$

$$D(z) = b_1 + b_2 W h_1^{-4.6 \frac{z}{h_1}},$$

где h_1 – глубина термоклина (м), b_1, b_2 – калибровочные коэффициенты, увеличивающиеся с ростом глубины водоёма. Так, например, для Цимлянского водохранилища $b_1 = (1 \div 2)10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $b_2 = (1 \div 2)10^{-5}$, W – скорость ветра, м/с.

Необходимым элементом при моделировании процессов продукции и деструкции органического вещества, а также при оценке интенсивности газообмена с атмосферой, является информация о температурном режиме водохранилища. Динамика вертикального распределения температуры $\theta(t, z)$ описывается уравнением [2, 3]:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D_\theta \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \frac{\partial I}{\partial z},$$

где $I(t, z)$ – интенсивность солнечной радиации,

$$I(t, z) = I_0(t) \exp(-\lambda z),$$

$I_0(t)$ – поток солнечной радиации на единицу поверхности воды, λ – коэффициент экстинкции, z – расстояние от поверхности воды, D_θ – коэффициент вертикального турбулентного обмена.

В качестве граничных условий задаются потоки тепла на поверхности ($z = 0$)

$$D_\theta \frac{\partial \theta}{\partial z} = - \frac{F_n}{c_p \rho_0}$$

и на дне ($z = H$)

$$\theta(t, H) = \theta_H(t),$$

Здесь F_n – полный тепловой поток через свободную поверхность, c_p – удельная теплоемкость воды, ρ_0 – характерное значение плотности воды.

Для оценки коэффициента вертикального турбулентного обмена $D_\theta(z, t)$, учитывающего сдвиговые эффекты и стратификацию, применяется формула Прандтля-Обухова [2]:

$$D_\theta = \begin{cases} D_z, & z \leq h_1, \\ D_{\min}, & z > h_1. \end{cases}$$

Здесь

$$D_z = \begin{cases} (0.05h)^2 \sqrt{d}, & d \geq 0, \\ D_{\min}, & d < 0, \end{cases}$$

где $d = \left(\frac{\tau}{\rho_0 D_0} \right)^2 e^{-2\alpha z} - \frac{g}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right)$, напряжение ветра вычисляется по формуле $\tau = \left(\frac{0.9 + 0.107W}{1000} \right) W^2$ [4], где W – скорость ветра, ρ_a – плотность воздуха, $D_{\min} = 0.000002$ – минимальное значение коэффициента вертикального турбулентного обмена (m^2/c), D_0 – характерное значение коэффициента вертикального турбулентного обмена [2].

В начальный момент времени задаются распределения всех искомым переменных.

Численный алгоритм основан на методе расщепления по физическим процессам. После задания поля скоростей, вычисляются последовательно температура, распределение кислорода и концентрации ЛОВ. Полученные системы уравнений решаются конечно-разностными методами с использованием неявных схем. Решение полученных систем линейных алгебраических уравнений решается методом минимальных невязок.

Были проведены модельные расчеты по определению распределения температуры и изменению концентрации кислорода с изменением объема валовой ПП в водах водоема, а также с изменением скорости ветра и температуры на поверхности водоема. Предполагалось, что придонного горизонта достигает в зависимости от глубины 20% (3м), 15% (5м), 10% (10м) и 8% (15м) от валовой ПП, формируемой в столбе воды.

На рисунках приведены результаты модельных расчетов изменения вертикального распределения кислорода в зависимости от изменения температуры на поверхности водоема, от изменения скорости окисления ЛОВ на дне, от изменения скорости ветра, а также от изменения коэффициента коэффициента вертикальной диффузии.

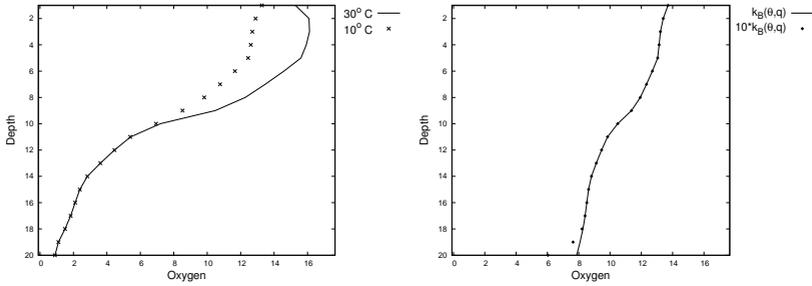


Рис. 1. Изменение вертикального распределения кислорода в зависимости от изменения температуры на поверхности водоема θ (слева) и от изменения скорости окисления ЛОВ на дне $k_B(\theta, q)$ (справа).

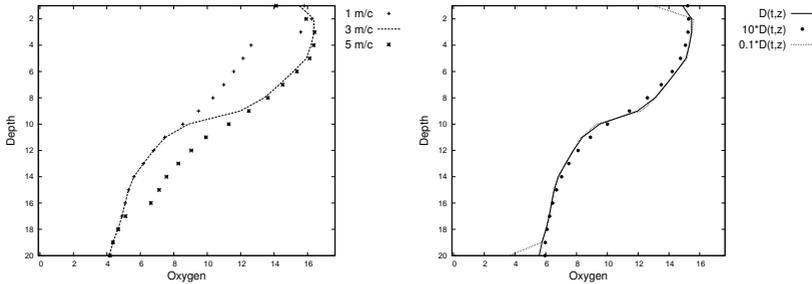


Рис. 2. Изменение вертикального распределения кислорода в зависимости от изменения скорости ветра $W(t)$ (слева) и от изменения коэффициента коэффициента вертикальной диффузии $D(t, z)$ (справа).

Литература

1. *Bowie G.L., Mills W.B., Porcella D.B. et al.* Rates, constants and kinetics formulations in surface water quality modeling. EPA/600/3-85/040, U.S. EPA, Athens, Georgia, 1985. 455 p.

2. *Белолипецкий П.В., Генова С.Н., Грицко В.В.* Компьютерная модель вертикальной структуры водоёма // Вычислительные технологии. - 2004.-Т.9.-Вестник КазНУ им. Аль-Фараби, сер. Математика, механика, информатика №3(42).-Совместный выпуск. Ч.1. С. 289-294.
3. *Селютин В.В., Кулыгин В.В., Бердников С.В.* Разработка модели "биогены - первичная продукция - кислородный режим" для оценки рисков возникновения дефицита кислорода // Экология. Экономика. Информатика (8-13 сентября 2013 г.) Материалы конференции: в 2 т. Т.2: Геоинформационные науки и экологическое развитие: новые подходы, методы, технологии. Геоинформационные технологии и космический мониторинг. - Ростов-на-Дону. Издательство Южного федерального университета, 2013. С. 51-54.
4. *Судольский А.С.* Динамические явления в водоемах. Л.: Гидрометеоиздат, 1991. - 263 с.
5. *Хендерсон-Селлерс Б.* Инженерная лимнология. - Л., 1987. 335 с.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ СТОНО-НАГОННЫХ КОЛЕБАНИЙ УРОВНЯ ВОДЫ УСТЬЕВОЙ ОБЛАСТИ ДОНА НА МОРФОМЕТРИЮ РУСЛА

Чикин А.Л.* , Клещенко А.В.* , Чикина Л.Г.**

* Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону,
chikin@sfedu.ru, geo@ssc-ras.ru

** Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону,
lchikina@sfedu.ru

Устьевая область Дона является наиболее освоенным и вовлеченным в хозяйственную деятельность районом Нижнего Дона. Здесь расположены морские порты Азов и Ростов-на-Дону, эксплуатирующие акваторию р. Дон, наблюдается активная речная навигация вверх по Дону (порты Усть-Донецк, Волгодонск), на Волгу и Каспий. Ежегодно из-за колебаний уровня воды в Дону происходит простой судов на рейдах, транспортные компании терпят многомиллионные убытки. В настоящее время ведется проектирование и озвучиваются планы по строительству Багаевского гидроузла, призванного ликвидировать лимитирующие участки судового хода. В этой связи решение проблемы прогнозирования положения уровня на различных интервалах русла в зависимости от силы и направления ветра, уровня воды в принимающем водоеме (Таганрогском заливе) и расходах в замыкающем створе в ст. Раздорская представляется своевременной и актуальной задачей.

Для описания неустановившегося движения воды в открытом русле воспользуемся следующей системой дифференциальных уравнений [1]:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial t} + gW \left(\frac{\partial z}{\partial s} + \frac{Q|Q|}{K^2} \right) = 0, \\ \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} = q, \end{cases}$$

где s – координата; t – время; Q – расход воды; z – уровень воды; W – площадь поперечного сечения; q – распределенный боковой приток; K – модуль расхода; g – ускорение свободного падения.

Данная система замыкается граничными и начальными условиями:

$$Q(0, t) = Q_1(t), z(L, t) = z_1(t)$$

$$Q(s, 0) = Q_0(s), z(x, 0) = z_0(s)$$

Данная задача решается конечно-разностными методами с использованием неявных схем. Конечно-разностная аппроксимация системы будет иметь

вид:

$$\begin{cases} \frac{(Q_{j+1}^{n+1} - Q_{j+1}^n) + (Q_j^{n+1} - Q_j^n)}{2\Delta t} + gW_j^n \left(\frac{z_{j+1}^{n+1} - z_j^{n+1}}{\Delta s} + \frac{Q_j^{n+1} |Q_j^n|}{K_j^{n2}} \right) = 0, \\ b_j^n \frac{(z_{j+1}^{n+1} - z_{j+1}^n) + (z_j^{n+1} - z_j^n)}{2\Delta t} + \frac{Q_{j+1}^{n+1} - Q_j^{n+1}}{\Delta s} = q_j^n. \end{cases}$$

Здесь b – ширина русла. Для расчета уровня свободной поверхности русла был выбран устьевый участок нижнего Дона от второго узла дельты Дона (исток рукава Каланча) до станицы Раздорская, который был разбит на четыре отрезка с левыми границами в наблюдательных постах: Ростов, Аксай, Багаевская и Раздорская. Длина всего участка составила 134 км. Подбирая значения коэффициентов шероховатости и для рассматриваемых отрезков была получена кривая поверхности воды (в абсолютных значениях), удовлетворяющая среднестатистическим значениям наблюдений на наблюдательных постах в период с 2001 по 2015 гг. На левой границе задавался средний расход ($Q = 535 \text{ м}^3/\text{с}$), на правой границе задавался средний уровень ($z = 0 \text{ м}$). Коэффициенты шероховатости для выбранных четырех участков были равны $n_1 = 0,0155, n_2 = 0,0228, n_3 = 0,0197, n_4 = 0,0166$, что несколько занижено по сравнению со значением, приведенным в предшествующих работах [2]. Согласно подходам, изложенным в литературе [2] для расчета силы трения было принято значение коэффициента $n = 0,023$

Расчет по предлагаемой нами методике дает более высокую точность по сравнению с предложенным ранее подходами [3]. При средних расходах воды погрешность не превышает 5%; при маловодности расчетные значения, в основном, занижены, и погрешность не превышает 10%; при многоводности расчетные значения завышены, и погрешность не превышает 12%. Такую неоднородность погрешности можно объяснить тем, что модель настраивалась по среднестатистическим наблюдаемым значениям.

Была смоделирована ситуация, когда уровень воды на правой границе сначала повышается (случай нагона), а затем снижается (переход через нормальный уровень в условия сгона). Зависимость изменения уровня воды $z(\text{см})$ от времени $t(\text{час})$ представлена следующей формулой

$$z(t) = \begin{cases} 0.10t, & t < 12, \\ 1.20, & 12 \leq t < 14, \\ 1.20 - 0.15(t - 14), & 14 \leq t < 24. \end{cases}$$

Расход воды в ст. Раздорской не менялся и был равен $535 \text{ м}^3/\text{с}$.

На рис. 1 представлено поведение приращения ($z - z_0$) уровней воды на наблюдательных постах. Естественно было ожидать, что изменение уровня на правой границе оказывает наибольшее влияние на постах Ростова и Аксая.

На рис. 2 представлено поведение расходов воды на наблюдательных постах при моделировании нагона. Кривые графиков расхода показывают, что с поднятием уровня воды на правой границе расход уменьшается (увеличивается объем русла). В какой-то момент может возникнуть обратное течение

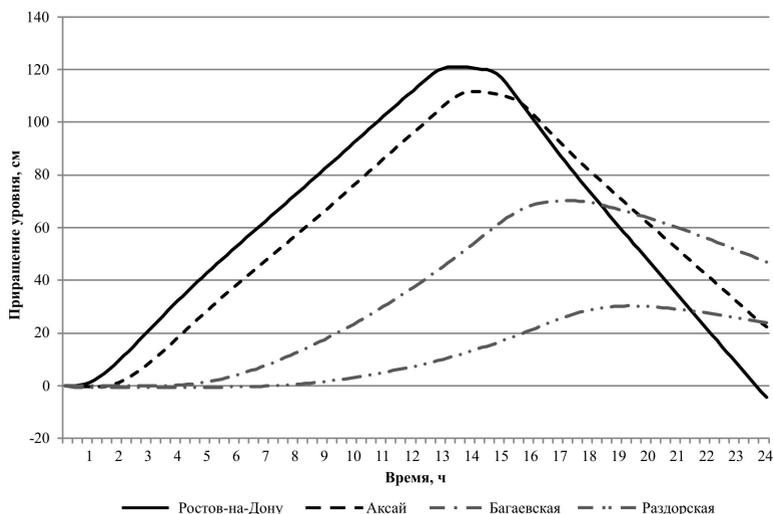


Рис. 1. Колебания уровня воды при моделировании нагона

(гидропост Ростов-на-Дону) или остановиться (гидропост Аксай). Затем, с падением уровня на границе происходит резкое увеличение расхода за счет уменьшения объема русла. Этот расход временно может даже превышать расход поступления с левой границы.

Влияние Багаевского гидроузла на морфометрические характеристики русла устьевой области Дона. Строительство Багаевского гидроузла планируется вести в районе острова Арпачинский (Белый) с НПУ верхнего бьефа 2,8 м БС. Так как нормальный уровень водной поверхности при среднем расходе 535 м³/с в этом районе равен 0,6 м БС, то относительно него подъем воды будет 2,2 м. Расчеты показали, что в районе ст. Раздорская уровень водной поверхности станет равным 3,27 м БС, что на 1,15 м выше нормального уровня (2,12 м БС). Осенью 2015 и 2016 годов, при действии сильного ветра восточных румбов и пониженных расходах воды в ст.Раздорская (270-360 куб.м/с) уровень воды в Дону резко понизился до рекордных отметок. Так, зафиксированный нами в октябре 2016 года на гидропосту ЮНЦ РАН в х.Донском уровень воды до составил -1,44 м БС. Подобная гидрологическая ситуация неизбежно приводит к такому обмелению Дона, когда судоходство становится невозможным. Для определения проблемных участков были проведены расчеты для различных расходов воды и уровнях водной поверхности в устье Дона.

На рис.3 представлены профили свободной поверхности уровня воды в русле до сооружения плотины и после. Были рассмотрены два случая: нормальный - значения расхода 535 куб.м/с, величины сгона 0 м и сгон - значения расхода 260 куб.м/с, величины сгона -1,2 м. Кроме того, здесь

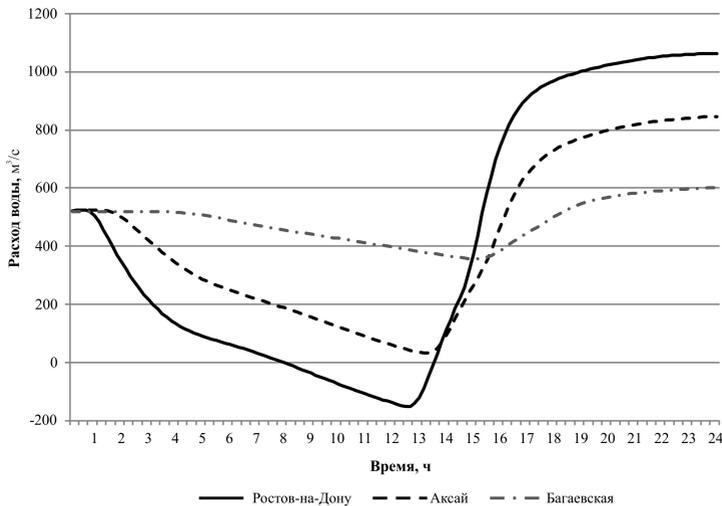


Рис. 2. Колебания расхода воды при моделировании нагона

приводится профиль поверхности дна на всем участке. Видно, что сооружение плотины существенно повысило уровень воды до Раздорской, причем сгон не оказывает влияние на величину верхнего бьефа. Наличие гидроузла сделало участок реки выше 3090 км судоходным для любых гидрологических условий, однако ниже по течению остались проблемные участки. Это еще раз подтверждает необходимость всестороннего и взвешенного подхода к оценке необходимости строительства Багаевского гидроузла и анализу прогнозируемых положительных и отрицательных эффектов от реализации этого проекта.

Таким образом, использование уравнений гидродинамики позволяет достаточно точно рассчитывать гидродинамические параметры руслового потока реки Дон на участке от станицы Раздорская до, фактически, впадения Дона в Таганрогский залив. Кроме того, он также позволяет прогнозировать возможность судоходства по основному руслу в зависимости от сгонно-нагонных явлений в дельтовой его части. Проведенные расчеты уровневого режима дельтовой части Дона в зависимости от наличия или отсутствия плотины в районе х. Арпачин показали сохранение проблемных для судоходства участков, расположенных ниже предполагаемого строительства. Это еще раз подтверждает необходимость всестороннего и взвешенного подхода к оценке необходимости строительства Багаевского гидроузла и анализу прогнозируемых положительных и отрицательных эффектов от реализации этого проекта.

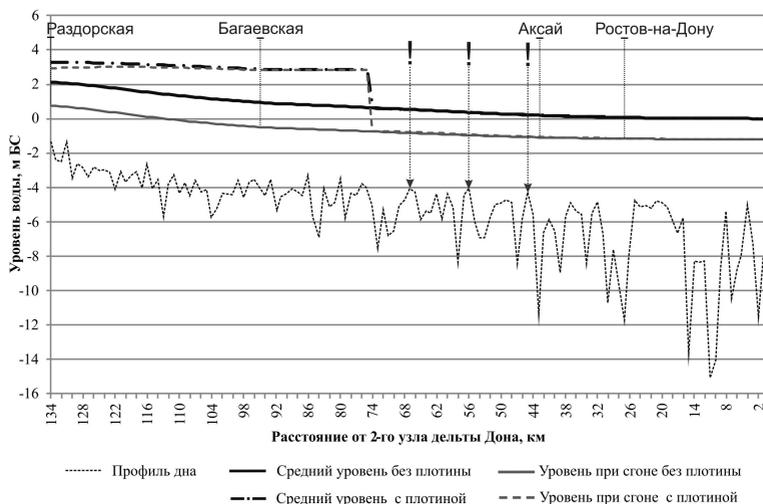


Рис. 3. Профили дна и свободных поверхностей русла

Литература

1. *Корень В. И.* Математические модели в прогнозах речного стока. Ленинград Гидрометеиздат 1991. 200 с.
2. *Мишин Д.В., Полонский В.Ф.* Исследование нестационарных водных потоков в неприливном устье реки Дон. Труды государственного океанографического института, 2013. № 214. С.166-179.
3. *Михайлов В.Н., Рогов М.М., Чистяков А.А.* Речные дельты. Гидролого-морфологические процессы. Л.: Гидрометеиздат, 1986. 280 с.

РЕШЕНИЕ

XVII ВСЕРОССИЙСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ-ШКОЛЫ МОЛОДЫХ
ИССЛЕДОВАТЕЛЕЙ
"СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО
МОДЕЛИРОВАНИЯ"

С 11 по 16 сентября 2017 состоялась XVII Всероссийская конференция-школа молодых исследователей "СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ".

В работе Конференции-школы приняли участие 72 ученых из 13 городов России, представлявшие 24 научных центра. Из них 24 доктора наук, 20 кандидата наук, 8 аспирантов и 2 студента. Было прочитано 18 лекций ведущими российскими учеными в области математического моделирования, сделаны 31 доклад исследователями различных научных центров, из которых 19 докладов были сделаны молодыми учеными.

Подводя итоги проведенной Конференции-школы, участники отмечают

- высокий научный уровень большинства представленных докладов, разнообразие тематик и новые оригинальные подходы к решению задач математического моделирования;
- возросший интерес к участию в работе Конференции-школы молодых ученых;
- высокую активность молодых ученых, студентов, аспирантов и высокое качество сделанных ими докладов

и постановляют

- посвятить дальнейшие Конференции-школы памяти профессора Льва Абрамовича Крукиера;
- выразить благодарность профессорам Василевскому Ю.В. и Сорокиной О.С. за привлечение к работе школы большого количества молодых ученых из возглавляемых ими научных коллективов;
- выразить благодарность Оргкомитету за проведенную им работу по организации конференции-школы;
- выразить благодарность администрации и сотрудникам пансионата "Морьяк" за помощь в проведении Конференции-школы;
- опубликовать Труды Конференции-школы;
- выставить презентации лекций на сайте Конференции-школы;
- наметить проведение XVIII Всероссийской конференции-школы "СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ" на 2019 год.

Научное издание

**СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ**

Сборник трудов

XVII Всероссийской конференции-школы
молодых исследователей
(пос. Абрау-Дюрсо, 11–16 сентября 2017 г.)

Ответственные редакторы: Муратова Г.В. и Шабас И. Н.
Технический редактор: Пичугина О.А.

Подписано в печать 19.12.2017.

Формат 60×84 ¹/₁₆. Усл. печ. л. 11,16. Уч.-изд. л. 7,75.
Бумага офсетная. Тираж 100 экз. Заказ № 6114.

Отпечатано в отделе полиграфической, корпоративной и сувенирной продукции
Издательско-полиграфического комплекса КИБИ МЕДИА ЦЕНТРА ЮФУ
344090, г. Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 200/1. Тел. (863) 247-80-51.