

Южный федеральный университет
(ЮФУ, г. Ростов-на-Дону)
Институт математики, механики и компьютерных наук
им. И.И. Воровича
(ИММиКН, г. Ростов-на-Дону)
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
(ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва)



СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Сборник трудов

XVIII ВСЕРОССИЙСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ-ШКОЛЫ МОЛОДЫХ ИССЛЕДОВАТЕЛЕЙ

пос. Абрау-Дюрсо, 16–21 сентября 2019 г.

Ростов-на-Дону – Таганрог
Издательство Южного федерального университета
2019

УДК 519.87(063)

ББК 22.18я7

С56

Ответственные редакторы: Г. В. Муратова, И. Н. Шабас

С56 Современные проблемы математического моделирования : сборник трудов XVIII Всероссийской конференции-школы молодых исследователей (пос. Абрау-Дюрсо, 16–21 сентября 2019 г.) / отв ред. Г. В. Муратова, И. Н. Шабас ; Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону ; Таганрог : Издательство Южного федерального университета, 2019. – 156 с.

ISBN 978-5-9275-3388-6

В сборнике представлены доклады участников XVIII Всероссийской конференции-школы молодых исследователей ”СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ”, организованной Институтом прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН и Институтом математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета, проходившей с 16 по 21 сентября 2019 года в поселке Абрау-Дюрсо, Новороссийск, Россия. В работе школы приняли участие представители научных центров Новосибирска, Москвы, Санкт-Петербурга, Томска, Нижнего Новгорода, Ростова-на-Дону и других городов.

УДК 519.87(063)

ББК 22.18я7

ISBN 978-5-9275-3388-6

© ИММиКН им. И.И. Воровича ЮФУ, 2019

© Южный федеральный университет, 2019

Оглавление

МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ОБТЕКАЕМЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ Аббасов И.Б.	6
МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ РАНДОМИЗИРОВАННОГО СПЕКТРАЛЬНОГО МЕТОДА Александров А.В., Дородницын Л.В, Дубень А.П.	10
ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ МНОГОЛУЧЕВОГО ИСТОЧНИКА ЭЛЕКТРОНОВ С ПЛАЗМЕННЫМ ЭМИТТЕРОМ Астрелин В.Т., Воробьев М.С., Козырев А.Н., Свешников В.М.	17
АТМОСФЕРНЫЕ ФРОНТЫ И ИХ 3D-ВИЗУАЛИЗАЦИЯ Беззубцев А.С., Быков Ф.Л., Гордин В.А.	25
ВЫСОКОТОЧНЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ В ЗАДАЧАХ МАТФИЗИКИ Варин В.П.	32
МГД-КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ ПОТОКОВ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ Вшивкова Л.В., Дудникова Г.И.	33
МЕТОД КОНЕЧНЫХ ОБЪЕМОВ ДЛЯ ОЦЕНКИ ОПЦИОНОВ В МОДЕЛИ БЛЭКА-ШОУЛЗА Горбенко Н.И.	34
КОМПАКТНАЯ РАЗНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА Гордин В.А.	40
ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ. КОМПАКТНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ СЛОЖНОЙ ГРАНИЦЫ СРЕД. Гордин В.А., Шадрин Д.А.	53
УСЛОВИЯ L^2 -ДИССИПАТИВНОСТИ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ ЯВНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ С РЕГУЛЯРИЗАЦИЕЙ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ БАРОТРОПНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ Ломоносов Т.А.	58
РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОТОМОГРАФИИ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИ СЛОЖНЫХ ОБЛАСТЯХ Мариненко А.В.	59

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛО- МАССОБМЕНА НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА Мартынова Т.С.....	75
МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ НЕЙРО- НОВ Муратова Г.В., Бавин В.В., Хаишбашев Г.А.	81
О МАГИСТЕРСКОЙ ПРОГРАММЕ МЕХМАТА ЮФУ “МАТЕМАТИ- ЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМ- ПЛЕКСЫ ПРОГРАММ” Надолин К.А., Карякин М.И., Наседкин А.В.....	85
МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ В ОБЛАСТИ УДАРНОГО СЖАТИЯ ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ТЕЛ Острик А.В.	91
МОДЕЛЬ ТЕМПОВ РОСТА ДЛЯ ФАЗЫ ВСПЫШКИ ЧИСЛЕННО- СТИ ПОПУЛЯЦИИ ВРЕДИТЕЛЕЙ Переварюха А.Ю.....	92
ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКТИВНО-ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В ИЗОТРОПНОЙ И АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДАХ Пичугина О.А.	100
МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНО-ГРАДИЕНТНЫХ СРЕД ПОСРЕД- СТВОМ РЯДА ТЕЙЛОРА Саянкина М.К.....	106
ПОВЫШЕНИЕ КАЧЕСТВА РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕЙ ОЦЕНКИ СХОД- СТВА СИГНАЛОВ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА РАСПОЗНА- ВАНИЯ ПАР СХОДНЫХ ЧИСЛОВЫХ СТРОК Смагличенко А.В.	111
ТЕСТИРОВАНИЕ ПРЕДПОЛАГАЕМЫХ СТРУКТУР КАК ОПРЕДЕ- ЛЯЮЩИЙ ФАКТОР РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНВЕРСИОННЫХ ПРОБЛЕМ Смагличенко Т.А.....	116
ЭКОНОМИЧНЫЙ ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБРАТНОЙ К ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕ- НИЯ Сорокин С.Б.....	122
МЕТОД КАННИ ДЛЯ ГИПЕРСПЕКТРАЛЬНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ Турлапов В.Е., Романенко А.А., Пухкий К.К.....	130
ВЛИЯНИЕ ОСОЛОНЕНИЯ ВОСТОЧНОЙ ЧАСТИ ТАГАНРОГСКО- ГО ЗАЛИВА НА ГИДРОЛОГИЧЕСКИЙ РЕЖИМ УСТЬЯ ДОНА Чикин А.Л., Клещенков А.В., Чикина Л.Г.	131

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА С ПОМОЩЬЮ ТЕНЗОРНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ Чикиткин А.В., Корнев Е.К.	136
МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ГИДРОХИМИИ В МЕЛКОВОДНЫХ ВОДОЕМАХ Шабас И.Н.	144
СОЦИАЛЬНЫЕ КОНСТАНТЫ В ДИНАМИКЕ ЦЕННОСТНЫХ ОРИЕНТАЦИЙ РОССИЙСКОГО СОЦИУМА (РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ НА КЛЕТОЧНОМ АВТОМАТЕ) Шведовский В.А.	146

МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ОБТЕКАЕМЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Аббасов И.Б.

Южный федеральный университет,

Инженерно-технологическая академия, г. Таганрог

Введение

В работе описаны особенности построения кривых третьего порядка на примере кривых Безье. Эти кривые используются во многих компьютерных системах двумерной и трёхмерной графики. На их основе можно создавать гладкие обтекаемые поверхности, которые могут иметь хорошие гидродинамические характеристики. В качестве обтекаемых объектов создана трёхмерная модель ската с использованием сглаженных поверхностей. Описаны особенности применяемых методов и представлены этапы моделирования подводного объекта.

Для моделирования сглаженных поверхностей и обтекаемых объектов различного назначения можно использовать метод создания поверхностей на основе специального математического аппарата: неоднородные рациональные B-сплайны NURBS (Non Uniform Rational B-Splines). Они основаны на свойствах кривых Безье, которые широко распространены в компьютерной графике [1]. Кривые Безье являются частным случаем многочленов Бернштейна, как частный вид кривых третьего порядка, впервые были использованы в прошлом веке для машиностроительной промышленности французскими компаниями. Обычно кривые третьего порядка имеют точку перегиба и задаются девятью параметрами:

$$x^3 + a_1y^3 + a_2x^2y + a_3xy^2 + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6xy + a_7x + a_8y + a_9 = 0$$

Однако кривые Безье задаются восемью параметрами [2]. В основе построения кривых Безье лежит использование двух касательных, проведенных к крайним точкам отрезка линии. На кривизну линии влияет угол наклона и длина отрезка касательной, значениями которых можно управлять в интерактивном режиме путем перетаскивания их концевых точек (рис.1).

В данной работе рассматриваются вопросы компьютерного моделирования трехмерных гидродинамических, сглаженных обтекаемых объектов. Отрезками кривых Безье можно аппроксимировать любой сложный контур. С появлением этих кривых обводы моделей стали гладкими, движения при анимации стали плавными. Поверхности на основе NURBS позволяют достичь лучших результатов, чем при использовании методов полигонального моделирования, особенно при построении моделей со сглаженными контурами. Они незаменимы для создания моделей животных и людей, для анимации мимики лица.

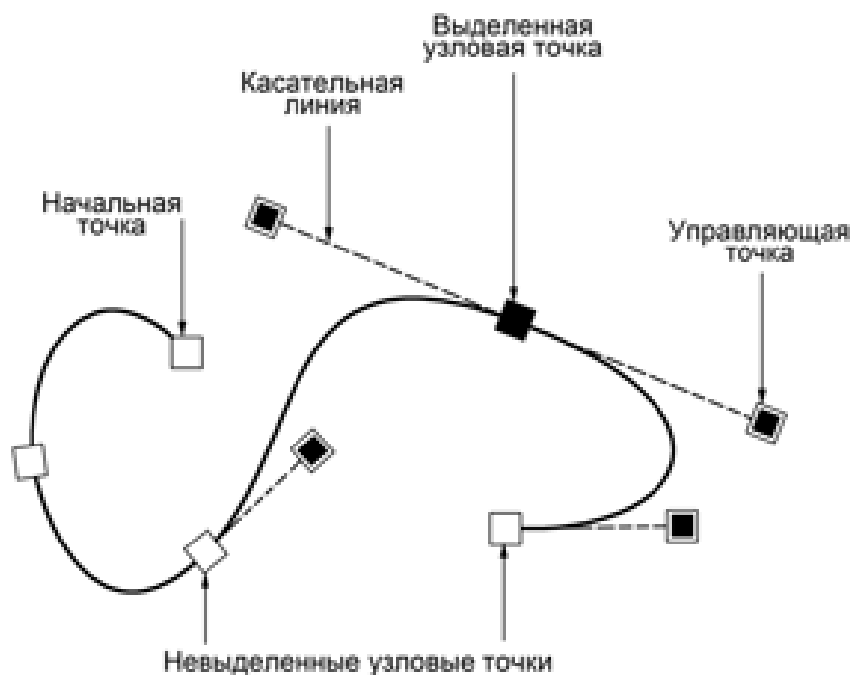


Рис. 1. Задание кривой Безье управляющими касательными.

В авиастроительной отрасли вопросы обтекаемости поверхностей играют важное значение. При проектировании гидросамолетов, самолетов-амфибий на первый план выходят не только задачи аэродинамики, также существенными становятся вопросы гидродинамики. Поэтому для моделирования обтекаемых поверхностей с аэро-гидродинамичными обводами можно использовать поверхности NURBS. При разработке концепции самолетов береговой авиации часто применяются биологические прототипы среды эксплуатации, представители фауны: рыбы, скаты, водоплавающие птицы, дельфины, киты. Концептуальное моделирование этих объектов осуществляется, начиная от идеи до разработки готовой модели и реалистичной визуализации.

В трехмерной системе Autodesk Mechanical Desktop сглаженные обтекаемые поверхности создаются с помощью команды `_edgesurf_`. Они также называются поверхностями Кунса (Coons surface), для их построения требуются четыре образующих в виде трехмерных сплайнов. Обычно для построения сплайнов используются грани призмы, далее командой `_edgesurf_` создается многоугольная сеть - поверхность Кунса. Процесс создания сглаженной поверхности продемонстрирован на рис.2.

Для моделирования обтекаемой гидродинамической поверхности был выбран биологический прототип на примере ската (так называемый "черный дьявол"). Плавание под водой у этих скатов выглядит очень грациозным, подобно взмаху крыльев птиц, они используют для движения волнообразно вибрирующие грудные плавники. Эти плавники сращены с головой и образуют ромбовидный диск, и их передняя часть преобразована в головные плавники. Скаты фильтруют воду питаясь зоопланктоном, размножаются яйцеживорождением, иногда совершают прыжок, выпрыгивая из воды. Для

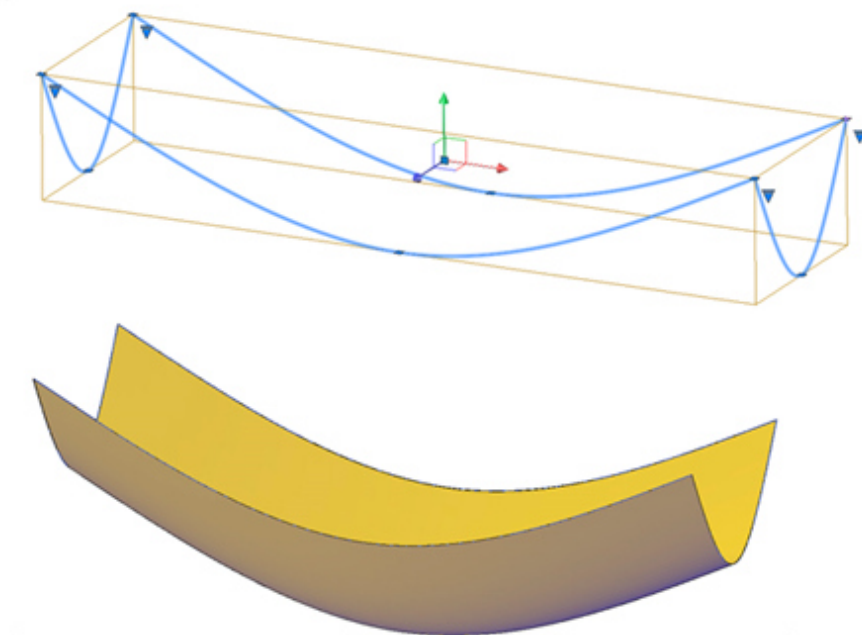


Рис. 2. Построение сглаженной поверхности Кунса с помощью сплайнов, вписанных в габаритную призму.

моделирования поверхности ската использовался метод создания поверхностей по кромкам (поверхность Кунса) [3].

В начале изображение ската в виде плоского сплайна был вписан в габаритный прямоугольник. Из прямоугольника была вдавлена габаритная призма, призма в свою очередь была разделена на более мелкие призмы. Повторяя трехмерный вид ската, в эти призмы были вписаны трехмерные сплайны. Тело ската было разделено на несколько участков, плавники были построены на основе отдельных трехмерных сплайнов. На границах между призмами для сглаженности границ использовались одни и те же сплайны. В результате соединения структурных частей был создана целостная сеточная модель ската [4,5], которая представлена на рис.3.

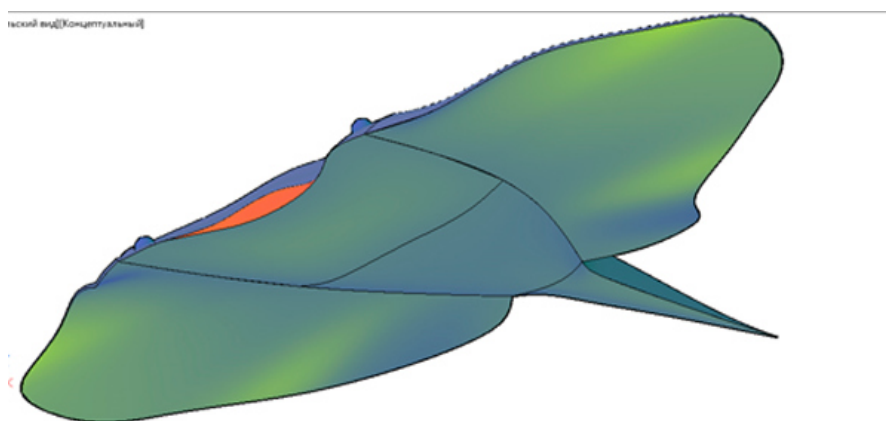


Рис. 3. Трехмерная сеточная модель ската в режиме концептуальной раскраски.

Для доведения сцены со скатом до фотореалистичной визуализации необходимо присвоить материал объекту и отрегулировать источники света. С учетом конкретных условия окружающей среды, могут быть скорректированы диффузный цвет, тени, цвет отражения, гладкость поверхности, прозрачность. Используя данную методику можно создавать реалистичные компьютерные модели самолетов гидроавиации в виде гидросамолетов или самолетов-амфибии.

Литература

1. *Mortenson M.E.* Mathematics for Computer Graphics Applications. Industrial Press Inc. 1999. 264p.
2. *Роджерс Д., Адамс Дж.* Математические основы машинной графики. М.: Мир, 2001. 604с.
3. *Аббасов И.Б.* Компьютерное моделирование обтекаемых поверхностей //Труды IV Международной НТК "Компьютерное моделирование". Санкт-Петербург. СПбГПУ. 2003, С.255-256.
4. *Аббасов И.Б.* Компьютерное моделирование в промышленном дизайне. - М.: ДМК Пресс, 2013. - 92с. 5. *Abbasov I.B.* Computer modeling in industrial design. Amazon Digital Services LLC, 2019. ASIN: B07MYNYGL1 [Electronic resource]

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ РАНДОМИЗИРОВАННОГО СПЕКТРАЛЬНОГО МЕТОДА¹

Александров А.В. *, Дородницын Л.В. **, Дубень А.П. *

* *Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша
РАН, Москва*

** *Московский государственный университет имени
М.В. Ломоносова, Москва*

Введение

Работа посвящена проблеме генерации синтетической турбулентности для расчетов газовых течений. Рандомизированный спектральный метод, предложенный ранее, практически реализован в трехмерном случае с учетом временной эволюции турбулентного течения. Исследуется воспроизведение статистических и спектральных свойств турбулентных полей, известных из физики. Валидационные расчеты двух задач демонстрирует близость результатов к данным натурных и вычислительных экспериментов.

Синтетические турбулентные поля широко востребованы. Данное направление начато в [1] и продолжает развиваться [2]– [5] (список далеко не полный). В настоящее время актуальным вопросом является построение входных условий на границе зоны вихреразрешающего моделирования.

К свойствам искусственно сгенерированного поля скоростей предъявляются высокие требования с точки зрения физической корректности. Наряду с бездивергентностью турбулентных пульсаций скорости (как в жидкости, так и в газе при дозвуковом течении), должны совпадать статистические характеристики: одноточечные моменты 1-го, 2-го и 3-го порядков, двухточечные пространственные корреляции и временные автокорреляции — и воспроизводиться энергетический спектр турбулентности.

Авторы остановились на полностью стохастическом подходе к получению турбулентного поля скоростей, основанном на рандомизированном спектральном методе (РСМ) [6]. Отличием РСМ от аналогичных фурье-алгоритмов является случайный выбор волновых чисел в соответствии с заданным энергетическим спектром. Ранее методика успешно применялась для моделирования двумерных задач аэроакустики [7]. В настоящей работе исследуется трехмерный случай.

Рассматриваются две разновидности РСМ, отличающиеся процедурой распределения волнового числа по энергетическому диапазону. Предлагается способ задания эволюции турбулентного поля во времени. Применяется

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ: Проект N 18-01-00726

также вариант метода, учитывающий анизотропию тензора рейнольдсовых напряжений и основанный на его разложении Холецкого.

Показано, что построенные поля удовлетворяют важнейшим характеристикам однородной изотропной турбулентности: одноточечным и двухточечным моментам, а также энергетическому спектру.

Проводились валидационные расчеты на основе технологии крупных вихрей (LES). В частности, численно решалась нестационарная детерминированная задача о распаде однородной турбулентности в кубе, где стохастические турбулентные поля задавались в качестве начальных условий. Результаты сравниваются с экспериментальными данными. Кроме того, моделировалось трехмерное анизотропное турбулентное течение в плоском канале, для которого имеется эталонное решение, полученного прямым численным моделированием (DNS).

I Математическая модель

I.1 Общая методика

Методика численного моделирования типична для вихреразрешающего описания турбулентности.

1. Вычисляется установившееся среднее течение и осредненные характеристики турбулентности на основе модели RANS.
2. По полученным статистическим данным строится случайное поле скорости, которое используется в качестве начальных данных для зоны LES.
3. Рассчитывается эволюция во времени турбулентного течения по модели LES с заданием случайного турбулентного потока на входной границе.

I.2 Построение случайного поля скорости

Поле пульсационных скоростей реализуется в виде суммы гармоник:

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N \mathbf{u}^n(\mathbf{x}, t). \quad (1)$$

Каждая гармоника представляется формулой

$$\mathbf{u}^n(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\vec{\omega}^n) \left[\vec{\xi}^n \sin(k_n (\vec{\omega}^n \cdot \mathbf{x})) + \vec{\eta}^n \cos(k_n (\vec{\omega}^n \cdot \mathbf{x})) \right]. \quad (2)$$

Здесь k_n , $\vec{\omega}^n$, $\vec{\xi}^n$, $\vec{\eta}^n$ — случайные числа и векторы. Матрица $\mathbf{Q}(\vec{\omega})$ с элементами $q_{jl} = \delta_{jl} - \omega_j \omega_l$, где вектор $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $|\vec{\omega}| = 1$, равномерно распределен по сфере, обеспечивает бездивергентность поля скорости

$\nabla \cdot \mathbf{u}^n = 0$. Два набора независимых случайных трехмерных векторов $\vec{\xi}^n$, $\vec{\eta}^n$ имеют стандартное гауссовское распределение $N(0, 1)$.

Волновые числа $k = k_n \in [k_{\min}, k_{\max}]$ составляют набор независимых случайных величин, распределенных с плотностью вероятности, определяемой энергетическим спектром $E(k)$. Пример $E(k)$ — модифицированный спектр Кармана–Пао из [4] в следующей безразмерной форме:

$$E(k) = \frac{(k/k_e)^4}{(1 + (k/k_e)^2)^{17/6}} f_\eta f_{\text{cut}},$$

где $f_\eta(k)$ и $f_{\text{cut}}(k)$ — эмпирические функции. Характерное волновое число k_e энергонесущих гармоник определяется из соотношения:

$$\int_{k_{\min}}^{k_{\max}} k^2 E(k) dk = \frac{\varepsilon}{2\nu\sigma^2} \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} E(k) dk.$$

Величины $\sigma^2, \varepsilon, \nu$ известны из данных RANS.

1.3 Модификация метода

Предложенный РСМ требует большого количества гармоник для корректного воспроизведения энергетического спектра $E(k)$. Чтобы уменьшить расход ресурсов, позаимствуем из [7] следующий прием.

Интервал волновых чисел делится на подинтервалы $I_n = [k_{n-1}, k_n]$ с равной энергией. В каждом интервале I_n случайным образом выбирается одинаковое количество волновых чисел.

Поле пульсационных скоростей представляется в виде двойной суммы:

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N_G} \sum_{m=1}^M \mathbf{u}^{nm}(\mathbf{x}), \quad N = MN_G. \quad (3)$$

Формула для отдельной гармоник фактически повторяет (2):

$$\mathbf{u}^{nm}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}(\vec{\omega}^{nm}) \left[\vec{\xi}^{nm} \sin(k_{nm} (\vec{\omega}^{nm} \cdot \mathbf{x})) + \vec{\eta}^{nm} \cos(k_{nm} (\vec{\omega}^{nm} \cdot \mathbf{x})) \right]. \quad (4)$$

Здесь $k_{nm} \in I_n$.

1.4 Эволюция во времени

Во внутренней области вычисляется эволюция начального турбулентного поля детерминированным методом LES. На входной границе задается турбулентный поток, согласованный с начальными данными.

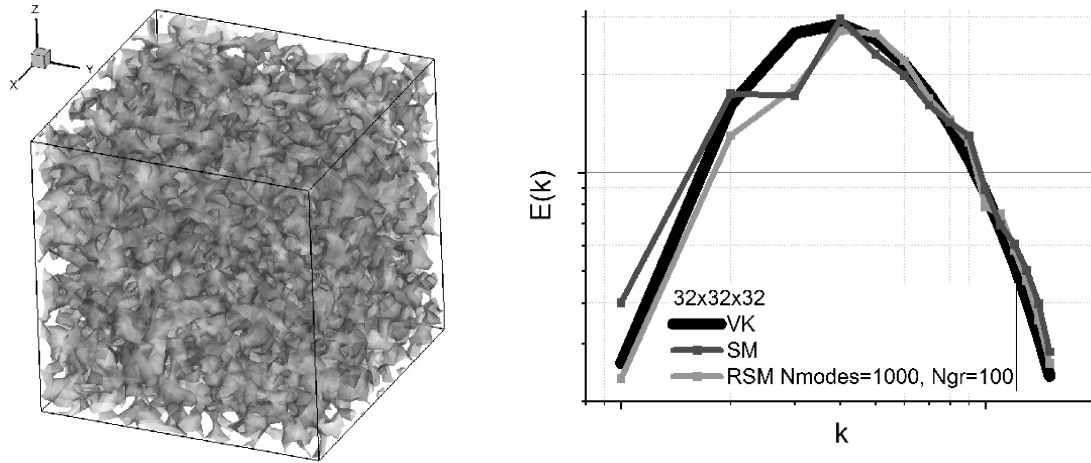


Рис. 1. Поле скорости в кубе: Q-критерий (слева); энергетический спектр полей, полученных двумя методами (справа)

Набор гармоник (2) дополняется зависимостью от времени в форме переноса со скоростью фонового потока \mathbf{U} и хаотического блуждания [3]:

$$\mathbf{u}^n(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\vec{\omega}^n) \left[\vec{\xi}^n \sin(k_n (\vec{\omega}^n \cdot \mathbf{x}) - k_n (\vec{\omega}^n \cdot \mathbf{U}) t - c_n t / \tau_0) + \vec{\eta}^n \cos(k_n (\vec{\omega}^n \cdot \mathbf{x}) - k_n (\vec{\omega}^n \cdot \mathbf{U}) t - c_n t / \tau_0) \right]. \quad (5)$$

Случайная величина $c_n \sim N(0, 1)$ нормируется на временной масштаб турбулентности τ_0 , согласованный с заданным тейлоровским временем τ_T :

$$\frac{1}{\tau_T^2} = \frac{1}{2\tau_0^2} + \frac{\varepsilon U^2}{20 \nu \sigma^2}.$$

II Верификация модели

Свойства описанного РСМ-генератора исследовались на примере однородного изотропного турбулентного поля в кубе со стороной 2π на сетке 32^3 . На рис. 1 показан Q-критерий сгенерированного поля скорости.

II.1 Статистические моменты

Строилось множество реализаций случайного начального поля (1) и выполнялось численное осреднение по стандартной формуле:

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^{(s)}(\mathbf{x}), \quad s = 1, \dots, N_r, \quad \langle \varphi \rangle_{N_r} = \frac{1}{N_r} \sum_{s=1}^{N_r} \varphi^{(s)}.$$

Исследовались одноточечные моменты 1-го, 2-го и 3-го порядков, для которых теория изотропной турбулентности дает соотношения

$$\langle u_i \rangle = 0, \quad \langle u_i u_j \rangle = \frac{2}{3} \sigma^2 \delta_{ij}, \quad \langle u_i u_j u_l \rangle = 0.$$

Двухточечные моменты второго порядка полностью определяются через продольную и поперечную корреляционные функции Кармана–Ховарта

$$f(r) = \frac{\langle u_x(r, 0, 0) u_x(0, 0, 0) \rangle}{\langle u_x(0, 0, 0)^2 \rangle}, \quad g(r) = \frac{\langle u_y(r, 0, 0) u_y(0, 0, 0) \rangle}{\langle u_y(0, 0, 0)^2 \rangle}.$$

Осреднение по ансамблю сравнивалось с аналитическими выражениями этих функций, а также проверялось отношение интегралов

$$I_f = \int_0^\infty f(r) dr, \quad I_g = \int_0^\infty g(r) dr, \quad I_f/I_g = 2.$$

II.2 Энергетические спектры

Справа на рис. 1 приведены энергетические спектры турбулентных полей скорости, сгенерированных на сетке 32^3 с использованием $N = 1000$ гармоник на основе спектрального метода из [5] и рандомизированного спектрального метода (3)–(4) с разбиением на 100 групп. Оба численных спектра достаточно близки к исходному спектру Кармана–Пао.

III Валидационные расчеты

III.1 Распад изотропной турбулентности

Рассматривалась классическая задача о затухании однородной изотропной турбулентности, экспериментально исследованная в [8]. С помощью генератора РСМ задавалось начальное турбулентное поле в кубе со стороной 2π , на сетке 32^3 узлов. Далее рассчитывалась детерминированная эволюция данного распределения методом LES с подсеточной моделью Смагоринского. Использовался вычислительный алгоритм, реализованный в программном комплексе NOISEtte [9] и основанный на разностной схеме EBR4 повышенной точности. Энергетические спектры, построенные на три момента времени (рис. 2), показывают хорошее совпадение расчетных и экспериментальных данных.

III.2 Анизотропное турбулентное течение в канале

С помощью программного комплекса NOISEtte моделировалась также эволюция анизотропного турбулентного течения в трехмерном плоском канале (рис. 2). Сетка $80 \times 70 \times 60$ (число узлов 350811) постепенно сгущается у

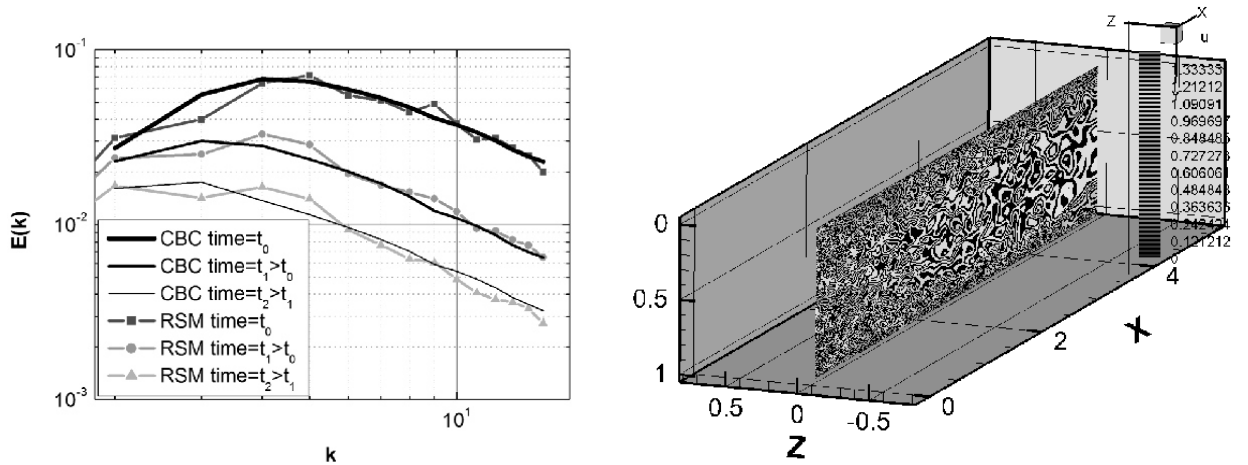


Рис. 2. Энергетические спектры в задаче о затухании однородной изотропной турбулентности (слева); горизонтальная скорость в продольном сечении канала (справа)

стенок канала. На входной границе $x = 0$ задается турбулентный поток (5) в анизотропной версии. Продольная скорость $u_x(x, y, z=0)$ в сечении канала изображена на рис. 2 справа. Кроме того, сформировавшийся поток с хорошей точностью дает совпадение с эталонным профилем средней скорости $\overline{u_x}(y)$, полученным в [10] на основе прямого численного моделирования.

Выводы

- Построенный трехмерный рандомизированный спектральный метод дает физически корректные результаты.
- Алгоритм задания турбулентного поля не требует значительных ресурсов по сравнению с расчетом эволюции течения.
- Методика перспективна для моделирования турбулентных течений в терминах LES.

В дальнейшем необходимо распространить технологию на анизотропную турбулентность и на турбулентность, неоднородную по пространству.

Литература

1. Kraichnan R. Diffusion by a random velocity field // Phys. Fluids. 1970. Vol. 13, No. 1. P. 22–31.
2. Bechara W., Bailly C., Lafon P., Candel S.M. Stochastic approach to noise modeling for free turbulent flows // AIAA J. 1994. V. 32, No. 3. P. 455–463.

3. *Smirnov A., Shi S., Celik I.* Random flow generation technique for large eddy simulations and particle-dynamics modeling // *J. Fluids Eng.* 2001. Vol. 123, No. 2. P. 359–371.
4. *Shur M.L., Spalart P.R., Strelets M.K., Travin A.K.* Synthetic turbulence generators for RANS-LES interfaces in zonal simulations of aerodynamic and aeroacoustic problems // *Flow Turbulence Combust.* 2014. Vol. 93, No. 1. P. 63–92.
5. *Saad T., Cline D., Stoll R., Sutherland J.C.* Scalable tools for generating synthetic isotropic turbulence with arbitrary spectra // *AIAA J.* 2016. Vol. 55, No. 18. P. 327–331.
6. *Kurbanmuradov O., Sabelfeld K., Kramer P.R.* Randomized spectral and Fourier-wavelet methods for multidimensional Gaussian random vector fields // *J. Comput. Phys.* 2013. Vol. 245. P. 218–234.
7. *Боровская И.А., Козубская Т.К., Курбанмурадов О., Сабельфельд К.К.* О моделировании однородных случайных полей и сигналов и их использовании в задачах аэроакустики // *Матем. моделирование.* 2007. Т. 19, N 10. С. 76–88.
8. *Comte-Bellot G., Corrsin S.* Simple Eulerian time correlation of full- and narrow-band velocity signals in grid-generated ‘isotropic’ turbulence // *J. Fluid Mech.* 1971. Vol. 48, part 2. P. 273–337.
9. *Абалакин И.В., Бахвалов П.А., Горобец А.В., Дубень А.П., Козубская Т.К.* Параллельный программный комплекс NOISEtte для крупномасштабных расчетов задач аэродинамики и аэроакустики // *Выч. мет. программирование.* 2012. Т. 13, N 3. С. 110–125.
10. *Moser R.D., Kim J., Mansour N.N.* Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau = 590$ // *Phys. Fluids.* 1999. Vol. 11, No. 4. P. 943–945.

ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ МНОГОЛУЧЕВОГО ИСТОЧНИКА ЭЛЕКТРОНОВ С ПЛАЗМЕННЫМ ЭМИТТЕРОМ¹

Астрелин В.Т. *,****, Воробьев М.С. **, Козырев А.Н. ***,
Свешников В.М. ***,****

* *Институт ядерной физики им. Г.И.Будкера СО РАН,
Новосибирск*

** *Институт сильноточной электроники СО РАН, Томск*

*** *Институт вычислительной математики и
математической геофизики СО РАН, Новосибирск*

**** *Новосибирский государственный университет,
Новосибирск*

Введение

В Институте Сильноточной Электроники (ИСЭ) СО РАН (г. Томск) разрабатывается источник электронов ДУЭТ с сетчатым плазменным катодом, генерирующий пучок большого сечения (ПБС) с выводом его в атмосферу через тонкую металлическую фольгу. В предварительных физических экспериментах максимальный коэффициент вывода тока в атмосферу достигал 70% от тока в ускоряющем промежутке. Целью настоящей работы является выяснение причин потери тока. Для этого строится численная модель электронно-оптической системы (ЭОС) и проводится компьютерное моделирование, по результатам которого делается анализ характеристик сформированных элементарных пучков для дальнейшей оптимизации источника и увеличения эффективности вывода пучка в атмосферу.

I Ускоритель ДУЭТ

Внешний вид ускорителя ДУЭТ показан на Рис. 1, схема его работы приведена на Рис. 2. Электронный ПБС в этом случае представляет собой суперпозицию элементарных пучков, сформированных отдельными эмиссионными структурами, плазменная граница которых стабилизирована мелкоструктурной металлической сеткой (см. Рис. 3). Поверх сетки уложена маска с круглыми отверстиями, конфигурация которых повторяет конфигурацию отверстий в опорной решетке выпускного фольгового окна, имеющих несколько больший диаметр (см. Рис. 4).

¹Работа выполнена при поддержке междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН № 10



Рис. 1. Внешний вид ускорителя ДУЭТ

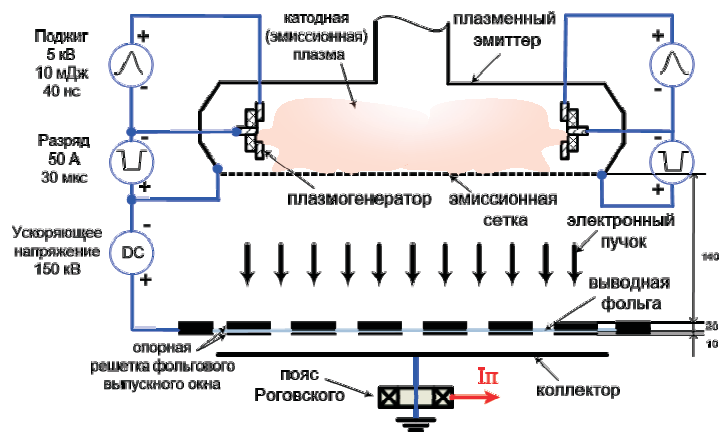


Рис. 2. Схема работы



Рис. 3. Стабилизирующая сетка

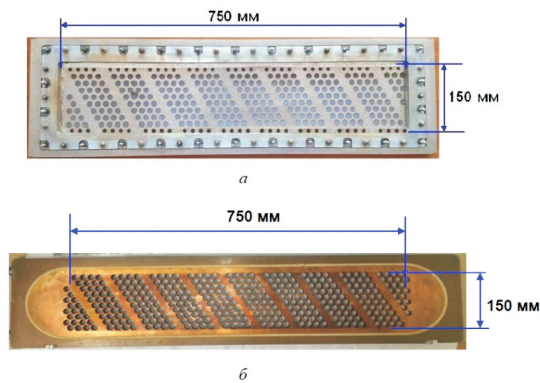


Рис. 4. Катодная маска (а) и опорная решетка (б)

II Основные положения при численном моделировании

Математически решение исходной задачи по расчету пучка сводится к решению самосогласованной задачи, состоящей в расчете потенциала электрического поля, траекторий движения электронов и вносимого ими объемного заряда [1]. Расчетная область показана на Рис. 5, где пунктиром выделена подобласть, моделирование которой проводилось ранее в работе [2].

Алгоритмы и технологии численного моделирования в настоящей работе разрабатывались с учетом следующих особенностей решаемой задачи: 1) конструкция ускорительного узла позволяет приближенно рассматривать его для моделирования как набор периодически расположенных отдельных независимых структур, 2) отношение длины ускоряющего промежутка к радиусу проволочки сетки равно 1400, то есть, задача является сильно разномасштабной, 3) геометрические размеры и потенциал в приэмиттерной подобласти находятся в пределах погрешности решения задачи в целом, тем не менее расчеты в приэмиттерной подобласти оказывают решающее влияние на пучок (прямое решение рассматриваемой задачи от эмиттера до анода неустойчиво).

Расчеты проводились при помощи пакета прикладных программ ЭРА-DD [3]. Основные программные и алгоритмические аспекты, реализованные в пакете ЭРА-DD следующие: 1) ввод исходной информации, вывод результатов и управление процессом расчета осуществляется при помощи специально разработанного интерфейса для решения задач сильноточной электроники, 2) расчеты проводятся на адаптивной прямоугольной квазиструктурированной сетке, 3) проводится выделение прикатодной особенности, суть которой состоит в том, что на катоде плотность объемного заряда обращается в бесконечность (для этого вблизи катода строится аналитическое приближенное решение самосогласованной задачи, которое сшивается с численным решением во всей области) [4].

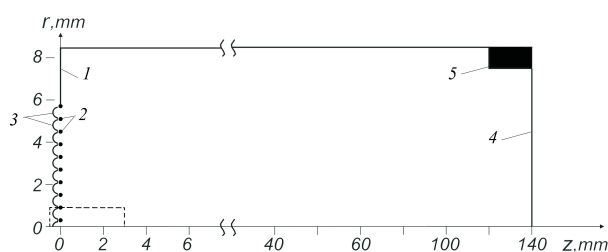


Рис. 5. Геометрия отдельной структуры: 1) - катодная маска; 2) - сетка; 3) - эмиссионная плазма; 4) - анодная фольга; 5) - опорная решетка. Пунктиром выделен приосевой фрагмент задачи

III Модель плазменной границы

Граница плазмы представляется в виде совокупности катодов, расположенных внутри ячеек мелкоструктурной сетки, перекрывающей эмиссионное окно. На основании физических представлений предлагается искать границу каждого плазменного катода в виде дуги окружности. Тогда для нахождения формы и положения плазменной границы достаточно найти радиус и положение центра этой окружности. В модели ставится ограничение: дуга должна подходить к проволочке эмиссионной сетки под прямым углом (см. Рис. 6). В процессе решения задачи может оказаться, что моделируемая граница плазмы должна отстоять от эмиссионной сетки на каком-то расстоянии. Тогда отдельные катоды сопрягаются друг с другом через перешеек (см. Рис. 6) размером $S < d_r$, где d_r - диаметр проволочки. В этом случае эмиссией с перешейка можно пренебречь.

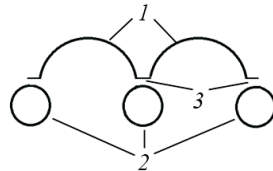


Рис. 6. Плазменная граница за эмиссионной сеткой: 1 - поверхность плазмы, 2 - проволочки, 3 - перешеек

IV Численные алгоритмы

Исходная задача рассматривается в осесимметричном двумерном приближении в цилиндрических координатах. Расчеты проводятся на адаптивной квазиструктурированной локально-модифицированной сетке, суть построения которой заключается в следующем [5]. Опишем вокруг исследуемой области G с границей Γ прямоугольник Q . Построим в Q равномерную прямоугольную макросетку вида

$$\Omega_H = \{R_I = IH_r, Z_J = JH_z, I = 0, 1, \dots, N_r, J = 0, 1, \dots, N_z\}$$

Тем самым проводится декомпозиция области на непересекающиеся подобласти. Среди них могут оказаться внешние подобласти, не содержащие точек G . Такие подобласти исключаются из расчетов, а во всех остальных подобластях проводятся расчеты. В каждой расчетной подобласти строится своя равномерная прямоугольная подсетка вида

$$\omega_h = \{r_i = R_I + ih_r, z_j = Z_J + jh_z\}$$

Подчеркнем, что подсетки могут быть несогласованными. Объединение данных подсеток образует результирующую квазиструктурированную сетку, на

которой ищется решение исходной задачи. Граница сопряжения подобластей (интерфейс) состоит из ребер e и макроузлов m . На ребрах интерфейса вводится сетка ω_e . Для сшивки решений в подобластях при расчете потенциала электрического поля на ребрах вводится уравнение Пуанкаре - Стеклова

$$\left(\frac{\delta\varphi}{\delta\vec{n}}\right)_e^+ - \left(\frac{\delta\varphi}{\delta\vec{n}}\right)_e^- = 0$$

которое аппроксимируется на сетке ω_e системой линейных алгебраических уравнений относительно приближенного потенциала φ_h

$$A\varphi_h + b = 0$$

Здесь \vec{n} - нормаль к e , A - вещественная квадратная матрица, φ_h, b - векторы. Данная система решается каким-либо методом в подпространствах Крылова [6] вида

$$\varphi_h^{k+1} = \Lambda(\varphi_h^k, Ap^k)$$

где k - номер итерации, Λ - функция, определяющая конкретный алгоритм, p - вспомогательный вектор. Вблизи плазменного эмиттера и в области прохождения пучка, строятся густые подсетки для того, чтобы тщательно отследить поведение пучка, а к периферии они разрезаются. Регулировка плотности узлов подсеток обеспечивает адаптацию квазиструктурированной сетки к пучку. Подсетки вблизи границы (в первую очередь, вблизи проволочек, составляющих эмиссионную мелкоструктурную сетку, и вблизи плазменного катода) подвергаются локальной модификации, состоящей в сдвиге на границу приграничных узлов, отстоящих от границы на расстоянии менее половины шага подсетки. Вследствие этого, исключается появление некачественных сеточных шаблонов с сильно неравномерными шагами, аппроксимация исходной задачи на которых дает большую погрешность. Локальная модификация обеспечивает адаптацию квазиструктурированной сетки к границе области. На Рис. 7 приведен фрагмент сетки с локальной модификацией узлов вблизи проволочки.

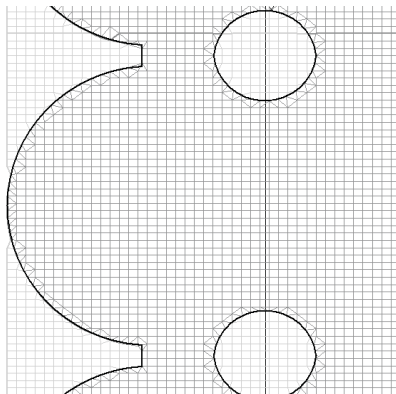


Рис. 7. Фрагмент квазиструктурированной сетки

Для ослабления влияния разномасштабности задачи было принято решение разбить расчетную область на две подобласти приэмиттерную G_1 и основную G_2 с общей границей γ (см. Рис. 8). В первой происходит формирование и разгон пучка, а во второй - его доускорение. Разбиение проводится сечением, перпендикулярным оси симметрии, причем длина приэмиттерной части значительно меньше длины всей системы. Решение задачи проводится итерационным альтернирующим методом Шварца с наложением подобластей. На границе раздела подобластей в качестве начального приближения задается потенциал, следующий из известного одномерного закона "трех вторых" [7].

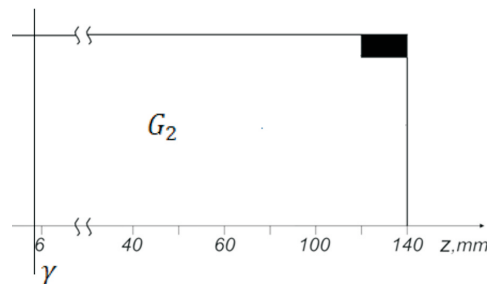


Рис. 8. Декомпозиция расчетной области на приэмиттерную и основную подобласти

Поиск плазменной границы осуществляется, исходя из того, что расчетный полный ток I_Σ со всех катодов должен равняться заданному току I_e , полученному из физического эксперимента, то есть

$$I_\Sigma - I_e = 0$$

Варьируемыми параметрами при этом являются положение центра плазменных катодов и длина перешейка. Радиус катодов определяется исходя из условия ортогональности катода проволочке. Решение данного уравнения проводится методом локальных вариаций, суть которого состоит в том, что вначале варьируется центр катодов, а затем размер перешейка. Как показали численные эксперименты, для получения решения данного уравнения достаточно всего 5 вариаций.

V Численные эксперименты

Расчеты в подобластях проводились на квазиструктурированной сетке со следующими параметрами. Макросетка в приэмиттерной подобласти 9×9 , макросетка в основной подобласти 9×139 . Подсетки в обеих подобластях были согласованы по r и несогласованы по z . Распределение подсеток в подобластях в направлении оси z было следующим (отсчет проводится снизу-вверх, слева - направо): в приэмиттерной подобласти - 27 подсеток 64×64 , 36×32 , 18×16 (всего более 150000 узлов); в основной подобласти - 207

подсеток 16×16 , $1044 - 8 \times 8$ (всего более 118000 узлов). Плазменный эмиттер представлялся 10 катодами. Приосевой катод разбивался на 10 трубок тока, а остальные - на 20 трубок каждый. На каждой вариации плазменного эмиттера проводилось 10 итераций по методу Шварца. В качестве начального приближения для вариаций выбиралось такое положение эмиттера, при котором каждый катод представлялся отрезком прямой. Всего было выполнено 5 вариаций. В результате эмиттер был сдвинут влево с образованием перешейка длиной $S = 10^{-3}L$. Результаты расчетов в приэмиттерной подобласти приведены на Рис. 9.

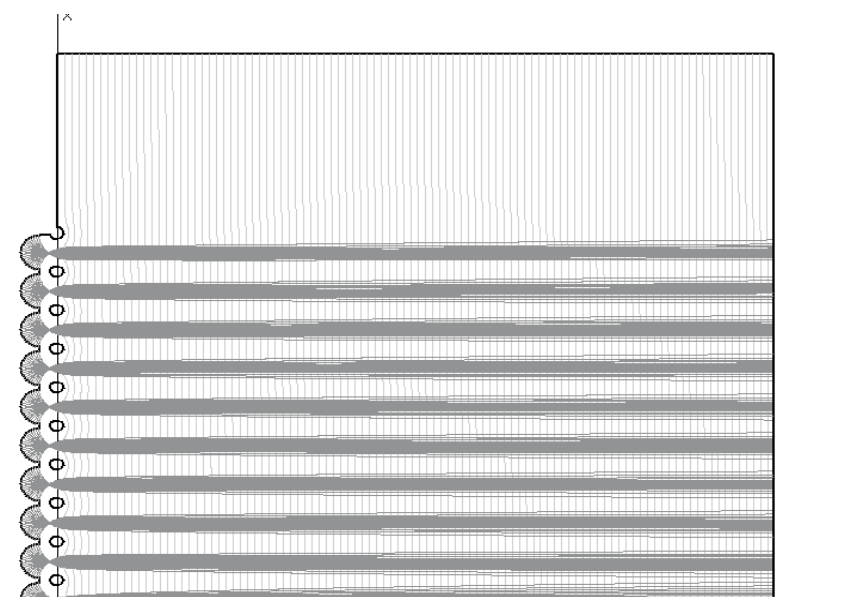


Рис. 9. Электронные пучки и эквипотенциальные линии в подобласти G_1

Результаты моделирования показывают, что при указанных параметрах электронного пучка, при достижении удовлетворительной соосности отверстий в маске и опорной решетке потери энергии и тока пучка возможны только в выпускной фольге.

Литература

1. Свешников В.М. Численное моделирование интенсивных пучков заряженных частиц // Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук; 05.13.18.- Новосибирск. 2006.
2. *Astrelin V. and Vorobyov M.* Numerical model of EOS with large-area plasma cathode with mesh stabilization of the emission plasma boundary // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2018. V. 1115. P.022001.
3. *Беляев Д.О., Козырев А.Н., Свешников В.М.* Пакет прикладных программ ЭРА-DD для решения двумерных краевых задач на квазиструктурированных сетках. // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2010. Т.8, вып.1. С. 3-11.

4. *Sveshnikov V.* Increased-accuracy numerical modeling of electron-optical systems with space-charge. // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A. 2011. V. 645, I.1. P. 307-309.
5. *Козырев А.Н., Свешников В.М.* О построении двумерных локально-модифицированных квазиструктурированных сеток и решении на них краевых задач в областях с криволинейной границей // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2017. Т. 6, № 2. С. 5-21.
6. *Ильин В.П.* Методы и технологии конечных элементов // ИВМиМГ СО РАН. Новосибирск. 2007.
7. *Алямовский И.В.* Электронные пучки и электронные пушки // М.: Советское радио. 1966.

АТМОСФЕРНЫЕ ФРОНТЫ И ИХ 3D-ВИЗУАЛИЗАЦИЯ¹

Беззубцев А. С.^{*}, Быков Ф. Л.^{**}, Гордин В. А.^{***, **}

^{*} ГБОУ «Лицей “Вторая школа”», ^{**} ФГБУ «Гидрометцентр России», ^{***} НИУ ВШЭ (Москва)

I Введение

Динамика атмосферы описывается системой уравнений идеальной газовой динамики, в которую добавлены “неадиабатические” слагаемые, описывающие радиационные и конвективные процессы, турбулентность, фазовые переходы и пр.

В модели идеальной газовой динамики (в которой “неадиабатическими” слагаемыми пренебрегается) возможно существование разрывных (обобщенных) решений, см. [1]. Решения, содержащие разрывы на кусочно-гладких поверхностях, можно классифицировать: тангенциальные разрывы и ударные волны, см. [16].

На поверхности тангенциального разрыва терпят излом нормальная компонента скорости ветра и давление. Касательная компонента скорости ветра и температура терпят разрыв.

На поверхности ударной волны излом претерпевают касательная компонента скорости и температура, в то время как нормальная компонента скорости и давление терпят разрыв.

Протяженные (порядка тысяч километров) тангенциальные разрывы в метеорологии интерпретируются как атмосферные фронты (далее АФ).

II Построение фронтальных линий на изобарических уровнях

Линии АФ по прогностическим полям геопотенциала, температуры и скорости ветра в момент времени t строятся на нескольких изобарических уровнях $p = \text{const}$. Сначала независимо для каждого метеорологического поля на двумерной сетке строятся поля предикторов АФ: ω_H — для поля геопотенциала, ω_T — для поля температуры и ω_v — для поля скорости ветра. Эти поля нормируются по средним значениям на данном уровне (нормированные величины обозначены тильдой), после чего вычисляется поле финального предиктора: $\mathcal{F} = \eta_H \tilde{\omega}_H + \eta_T \tilde{\omega}_T + \eta_v \tilde{\omega}_v$. Для подбора весов в этой комбинации решается задача оптимизации: $K_{\text{common}} - K_{\text{separate}} \rightarrow \max$. K_{common} —

¹Статья подготовлена в ходе проведения работы №18-05-0011 в рамках Программы «Научный фонд Национального исследовательского университета “Высшая школа экономики” (НИУ ВШЭ)» в 2018 – 2019 гг. и в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации «5-100».

корреляционная функция ансамбля пар точек из одной синоптической воздушной массы, $K_{separate}$ — корреляционная функция ансамбля пар точек из различных воздушных масс. Методы оценки корреляционных функций, гарантирующих их положительную определенность, см. [7], [6], [8], [14].

Точки сетки, где финальный предиктор $\mathcal{F} \in (0; 1)$, интерпретируются как точки АФ, а его интенсивность полагаем пропорциональной этим значениям. Алгоритмы вычисления полей частных и финального предикторов на барических уровнях см. [4].

III Выявление линий одного АФ

Линии пересечения искомой двумерной поверхности АФ и барических уровней получены не в аналитическом виде (что существенно бы облегчило дальнейший анализ), а как множества точек регулярной сетки, удовлетворяющих условию $\mathcal{F}(x, y, p) \in (0; 1]$, и визуально напоминающие объединение кривых. Для дальнейшего анализа линии АФ аппроксимируются кубическим сплайном Катмулла – Рома [3] как кривые на плоскости. При использовании такого сплайна $\vec{S}(t)$, где $t \in [0; 1]$ не бывает самопересечений и изломов.

Среди множеств кривых АФ на соседних барических уровнях нужно выбрать родственные, — они должны быть “похожи” и слабо смещены друг относительно друга. Их ориентация не согласована. Для двух кривых $\vec{S}_0(t)$ и $\vec{S}_1(t)$ введем функционалы $\sigma_d(\vec{S}_0, \vec{S}_1) = \int_0^1 |\vec{S}_0(t) - \vec{S}_1(t)| dt$ и $\sigma_r(\vec{S}_0, \vec{S}_1) = \int_0^1 |\vec{S}_0(1-t) - \vec{S}_1(t)| dt$ и показатель их родственности:

$$\sigma(\vec{S}_0, \vec{S}_1) = \min \left\{ \sigma_d(\vec{S}_0, \vec{S}_1); \sigma_r(\vec{S}_0, \vec{S}_1) \right\}. \quad (1)$$

Пусть \vec{S}_n — ориентированная линия на n -ом барическом уровне, а $\mathcal{G}_{n\pm 1}$ — множества всех линий на уровнях $n \pm 1$. Родственными к линии \vec{S}_n на уровне $n \pm 1$ считаем линии $\vec{S}_n^\pm \in \mathcal{G}_{n\pm 1}$, ближайшие к \vec{S}_n в смысле (1) при ограничении: $\sigma(\vec{S}_n^\pm, \vec{S}_n) < 300$ км, — ближайшую, но слишком далекую линию не считаем родственной к \vec{S}_n . Константа 300 км — эмпирическая.

Формулу оценки родственности кривых (1) можно уточнить, используя зависимость интенсивности трех цветов от параметра t :

$$\sigma_c = \sqrt{\sigma^2 + \sum_{j=r,g,b} \alpha_j \int_0^1 |C_j(S_0(t)) - C_j(S_1(t))|^2 dt},$$

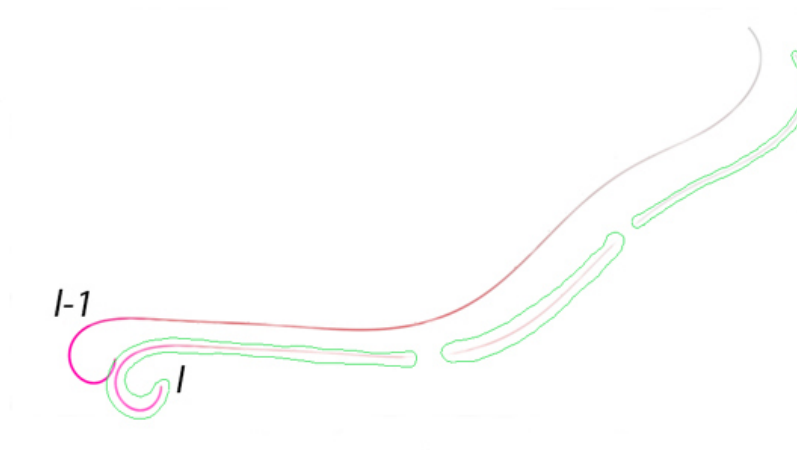


Рис. 1. Три фронтальные линии (обведены) уровня l родственны одной и той же линии уровня $l - 1$. Видна преемственность между фрагментами и общей родственной линией

где $C_j(\vec{S})$ интенсивность j -го цвета в точке \vec{S} линии АФ, α_j — положительный вес для соответствующего цвета. Их подбираем эмпирически.

Иногда линии АФ не параметризуются отрезком: они ветвятся или рвутся, см. Рис. 2, 3.

Если несколько линий одного уровня имеют общую родственную на соседнем (см. Рис. 1), объединим “фрагменты” прерывающейся линии в одну, заполняя небольшие (меньше 60 км) лакуны.

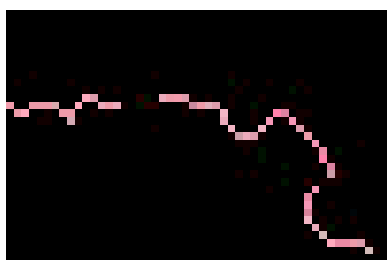


Рис. 2. Пример прерывающейся линии АФ ($p = 875$ гПа).



Рис. 3. Разветвляющаяся линия АФ ($p = 875$ гПа)



Рис. 4. Простые части линии Рис. 3 показаны разными цветами с общей точкой пересечения.

IV Построение фронтальной поверхности

Рассмотрим родственные линии на соседних барических уровнях: $\{\vec{S}_n(t)\}$, где n — номер уровня, и на каждой $M + 1$ точку $\vec{P}_{(n,k)} =$

$\vec{S}_n \left(\frac{k}{M} \right)$, $k = 0, \dots, M$. Далее $M = 199$. АФ между барическими уровнями строим, как поверхность Безье (см. [2]): $\vec{B}(u, v) =$

$$= \sum_{j=j_0}^J \sum_{k=0}^M \binom{M}{k} u^k (1-u)^{M-k} \binom{J-j_0}{j-j_0} v^{j-j_0} (1-v)^{J-j} \vec{P}_{(j,k)}, \quad (2)$$

где $u, v \in [0; 1]$ — параметры на поверхности АФ.

- константа Лебега, для аппроксимации Безье равна 1, т. е. амплитуда шума в координатах и в интенсивности линий АФ не возрастает при построении поверхности;
- поверхность не выходит за пределы выпуклой оболочки набора точек, по которым она была построена;
- асимптотическая вычислительная сложность — $O(N^2)$, где N — количество обсмчитываемых точек поверхности;

Вычислим значения функции \vec{B} на сетке $u_j = \frac{j}{L-1}, v_k = \frac{k}{W-1}$, где L — количество точек по j , а W — по k . Построим триангуляцию поверхности АФ для каждой пары родственных кривых $\langle j, k \rangle$ ($0 \leq j \leq L-2, 0 \leq k \leq W-1$): $\langle \vec{B}(u_j, v_k), \vec{B}(u_{j+1}, v_k), \vec{B}(u_{j+1}, v_{k+1}) \rangle$ и $\langle \vec{B}(u_j, v_k), \vec{B}(u_j, v_{k+1}), \vec{B}(u_{j+1}, v_{k+1}) \rangle$, см. Рис. 5.

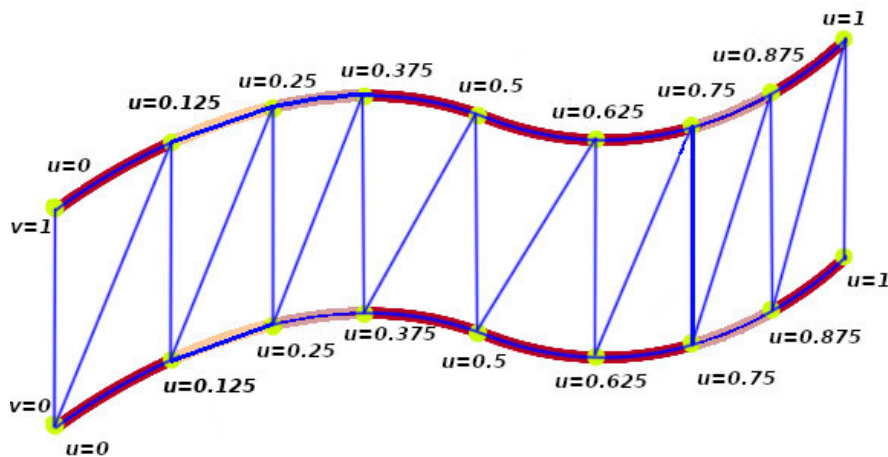


Рис. 5. Пример триангуляции поверхности АФ между двумя линиями на барических уровнях. Здесь $L = 9, W = 2$.

Интенсивность и тип фронта на линиях и поверхностях при визуализации передается цветом. Конкретная палитра цветов была подобрана в результате

компьютерных экспериментов и консультаций с синоптиками Гидрометцентра РФ.

Цвет \vec{C} в каждой точке фронта задается в системе RGB (красный, зеленый, синий) тремя числами отрезка $[0; 1]$, характеризующими интенсивность каждой из этих трех компонент краски.

На линиях фронта на барических уровнях модели цвет как трехмерная вектор-функция \vec{C} , уже задан. Далее:

1. три компоненты \vec{C} аппроксимируются по Безье в вершины триангуляции АФ (аппроксимируются 6-вектора $\vec{P}_{(j,k)}$, первые три координаты — пространственные, три других — цветовые);
2. внутри каждого треугольника производится билинейная интерполяция \vec{C} из вершин этого треугольника.

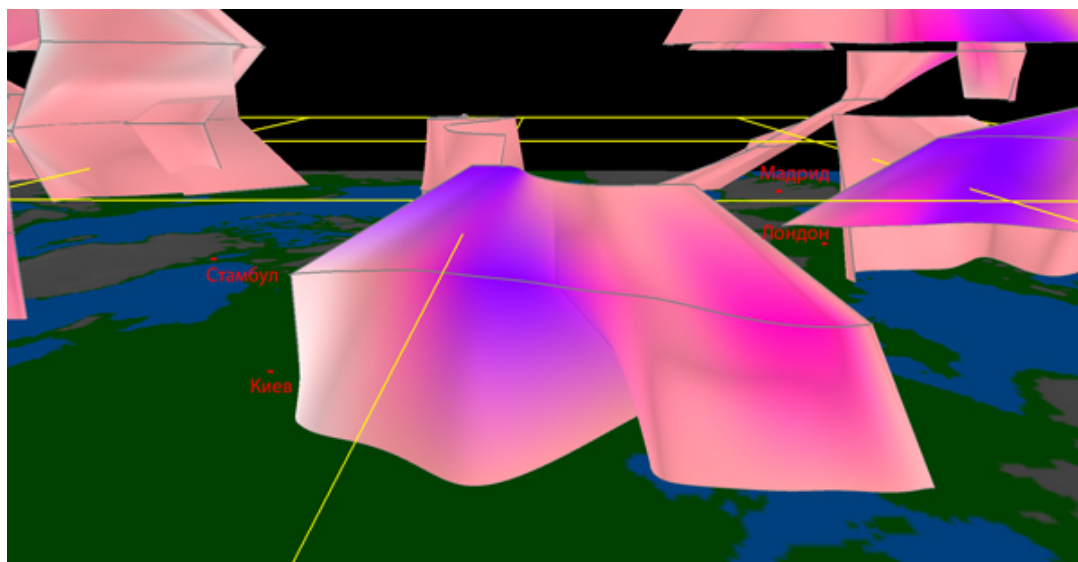


Рис. 6. Пример изображения АФ. Белым цветом окрашены зоны, где АФ выражен слабо, красным — зоны, где АФ сильный. Фиолетовым цветом окрашены фронты окклюзии. Линии — пересечения АФ с барическими уровнями

Такой алгоритм позволяет при достаточно мелкой триангуляции получить гладкое изменение цвета по поверхности АФ, см. Рис. 6.

Литература

1. *И. М. Гельфанд* Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений. "Успехи мат. наук 1959, V.14 (2), pp.87-158
2. *Д. Роджерс, Дж. Адамс*, Математические основы машинной графики, М.: Мир, 2001

3. *C. Yuksel, S. Schaefer, J. Keyser* Parameterization and Applications of Catmull – Rom Curves, Computer Aided Geometric Design, Academic Press, 2011, pp.745-755
4. *Ф. Л. Быков, В. А. Гордин* Объективный анализ трехмерной структуры атмосферных фронтов, Известия РАН. Сер. Физика атмосферы и океана, 2012, V.48 (2), pp.172-188
5. *В. А. Гордин* Усвоение метеорологической информации, как задача прикладной математики, Proceedings of Hydrometeorological Center of Russia., 1999, V.334, pp.69-78
6. *О. А. Алдухов, В. А. Гордин* Complete System of 3-D Geopotential Height, Temperature, and Wind Correlations, Research Activities in Atmospheric and Oceanic Modeling, 2000, V.30, pp.1.1-1.2
7. *О. А. Алдухов, В. А. Гордин* Трехмерные корреляционные функции для основных аэрологических параметров, Известия РАН. Сер. Физика атмосферы и океана, 2000, V.37 (1), pp.1-20
8. *Ф.Л.Быков, В.А.Гордин* Диагностика атмосферных фронтов по значениям метеополей на регулярной сетке, Сер. “Математическое моделирование и современные информационные технологии”, Современные проблемы математического моделирования, сборник трудов XIII Всероссийской школы-семинара. Ростов-на-Дону, изд. Южного федерального унив. 2009, V.6, pp.129–137
9. *Л. С. Гандин, Р. Л. Каган* "Статистические методы интерпретации метеорологических данных. Л.: Гидрометеиздат, 1976
10. *А.С.Монин, А.М.Яглом* Статистическая гидромеханика, Л.: “Гидрометеиздат”, М.: “Наука”, V.1-2, 1992, 1996
11. *В. А. Гордин* Как это посчитать? Обработка метеорологической информации на компьютере, М.: МЦНМО, 2005
12. *В.А.Гордин* Математические задачи гидродинамического прогноза погоды. Вычислительные аспекты, Л., Гидрометеиздат, 1987
13. *В.А.Гордин* Математические задачи гидродинамического прогноза погоды. Аналитические аспекты, Л., Гидрометеиздат, 1987
14. *О. А. Алдухов, Ф. Л. Быков, В. А. Гордин* Крупномасштабные трехмерные корреляционные функции для атмосферы Земли, Ярославский педагогический вестник, Сер. Естественных наук, 2011, V.4, pp.36-43
15. *T. D. Hewson* Objective fronts, Met. Apps, 1998, V.5 (1), pp.37-65
16. *Л. В. Овсянников* Лекции по основам газовой динамики, М.– Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2003
17. *В. А. Гордин* Математика, компьютер, прогноз погоды и другие сценарии математической физики, М., ФИЗМАТЛИТ, 2013

18. *Michael Kern, Tim Hewson, Andreas Schafner, Rudiger Westermann and Marc Rautenhaus* Interactive 3D Visual Analysis of Atmospheric Fronts, 2018, IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics
19. *Г. С. Ривин, И. А. Розинкина, Р. М. Вильфанд, Д. Ю. Алферов, Е. Д. Астахова, Д. В. Блинов, А. Ю. Бундель, Е. В. Казакова, А. А. Кирсанов, М. А. Никитин, В. Л. Перов, Г. В. Суркова, А. П. Ревокатова, М. В. Шатунова, М. М. Чумаков* Система COSMO-Ru негидростатического мезомасштабного краткосрочного прогноза погоды Гидрометцентра России: второй этап реализации и развития, 2015, Метеорология и гидрология, V. 6, pp.58-70
20. *A. S. Bezzubtsev, Ph. L. Bykov, V. A. Gordin* Three-dimensional visualization of atmospheric fronts, Research Activities in Atmospheric and Oceanic Modelling, 2019, V. 49, pp.3.3-3.4

ВЫСОКОТОЧНЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ В ЗАДАЧАХ МАТФИЗИКИ

Варин В.П.

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, varin@keldysh.ru

Как известно, прогресс в фундаментальной физике за последние 100 лет был неизменно связан с увеличением доступной точности при проведении экспериментов и с соответствующим уточнением фундаментальных постоянных и их эталонов.

В математике аналогом этого процесса могло бы стать увеличение точности вычислений, тем более, что для этого теперь имеются технические возможности ранее совершенно недоступные.

Однако парадоксальным образом высокоточные вычисления не играют столь же большой роли в математике, как это можно было бы ожидать.

«Чистая математика» часто вообще не опирается на вычисления на компьютере, а прикладная математика развивается, в основном, по пути распараллеливания вычислений для решения сложных прикладных задач.

Высокоточные вычисления применяются в настоящее время в основном в теории чисел.

Тем не менее, существуют методы вычислений, которые позволяют решать некоторые задачи матфизики так, как если бы задача была проинтегрирована, а решение выражено в известных функциях.

Для краевых задач это так называемые методы без насыщения [1], а для задачи Коши – это метод интегрирования с помощью тейлоровских разложений [2, 3].

На ряде примеров мы покажем, что высокоточные вычисления могут играть ключевую роль при решении некоторых сложных задач, а также при проведении численных экспериментов.

Литература

1. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.
2. *Варин В.П.* Асимптотическое разложение решения Крокко и константа Блазиуса // ЖВМ и МФ. Т. 58. N. 4. С. 1–11. 2018.
3. *Варин В.П.* Интегрирование ОДУ на римановых поверхностях с неограниченной точностью // ЖВМ и МФ. Т. 59. N. 7. С. 65–90. 2019.

МГД-КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ ПОТОКОВ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ¹

Вшивкова Л.В., Дудникова Г.И.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск

Полностью кинетические численные модели широко распространены при решении задач бесстолкновительной физики плазмы. Однако стоит отметить, что при их реализации требования к большим вычислительным ресурсам приводят к трудностям, связанным с проведением расчетов, приближенных к реальным масштабам. Применение комбинированных (гибридных) моделей [1]-[3] позволяет существенно уменьшить вычислительные затраты по сравнению с использованием полностью кинетических моделей. Кроме того, данный подход позволяет изучать физические процессы, которые не могут быть исследованы на основе традиционных гидродинамических моделей. Гибридные модели характеризуются тем, что одна из компонент плазмы (ионы или электроны) описывается кинетически, а другая рассматривается в гидродинамическом приближении.

В данной работе представлена численная гибридная модель формирования и взаимодействия высокоскоростных ионных потоков в постоянном магнитном поле. Данная модель основана на кинетическом описании ионной компоненты плазмы и использовании метода частиц в ячейках (PIC) для его решения, а электроны описываются при помощи уравнений магнитной гидродинамики. Созданная модель позволяет рассматривать плазменные неустойчивости на ионных временных и пространственных масштабах, пренебрегая модами, связанными с электронной компонентой плазмы. Представлены новая схема на основе гибридной модели и результаты численного моделирования.

Литература

1. *Lipatov A.S.* The hybrid multiscale simulation technology. An introduction with application to astrophysical and laboratory plasmas. Springer, Berlin, Heidelberg, 2002. 403 pp.
2. *Воронцов П.С., Вшивков В.А., Дудникова Г.И., Молородов Ю.И.* Численное моделирование нестационарных космофизических явлений // Выч. технологии. Новосибирск, ИВТ СО РАН, 1994, Т. 3, N. 8. С.53–61.
3. *P. A. Munoz, N. Jain, P. Kilian, and J. Buchner.* A new hybrid code (CHIEF) implementing the inertial electron fluid equation without approximation, arxiv.org/pdf/1612.03818.pdf. 2016.

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 18-29-21025 мк

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ОБЪЕМОВ ДЛЯ ОЦЕНКИ ОПЦИОНОВ В МОДЕЛИ БЛЭКА-ШОУЛЗА

Горбенко Н.И.

*Институт вычислительной математики и математической
геофизики СО РАН, г. Новосибирск,*

Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск

Введение

Представлена схема четвертого порядка по пространству и времени для уравнения Блэка-Шоулза, основанные на тождестве Марчука. Для интегрирования по времени полученной схемы используется явный метод Рунге-Кутты. Приведено подробное описание схемы и численные тесты, чтобы подчеркнуть эффективность метода.

Производные инструменты в настоящее время широко используются на финансовых рынках. Производный инструмент - это финансовый инструмент, стоимость которого зависит от цены базовой переменной и может использоваться для хеджирования риска, спекуляции и арбитража. Стоимость финансового актива является неопределенной, и прямые инвестиции в них подразумевают большой риск. Производные инструменты возникают как способ инвестирования в активы с меньшим риском. Однако, продолжая зависеть от стоимости базового актива, существует большая трудность в определении их стоимости.

Начиная с 70-х годов опционы стали одним из наиболее важных производных инструментов, помимо фьючерсов. Опционы представляют собой контракты, позволяющие владельцу купить или продать базовые акции по специфичной цене до момента истечения срока годности или времени погашения. Такая специфическая цена называется ценой исполнения. Таким образом торговля базовых активов по цене исполнения является осуществлением опциона. Такая простота сделала их одним из самых спекулятивных инструментов когда-либо созданных, поднимая торговлю опционами до нынешнего уровня важности.

В 1973 году была опубликована статья "Pricing of Options and Corporate Liabilities"[1], где было приведено дифференциальное уравнение, известное как уравнение Блэка-Шоулза, используемое на финансовых рынках для определения цены различных видов опционов. Численным методам решения уравнений в частных производных в финансах и экономике посвящена обширная литература, см., например, [2].

Пусть V обозначает стоимость опциона в момент времени t , тогда в одномерном случае это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV \quad (1)$$

где $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Omega = (0, S_{max}) \subset R$, σ обозначает волатильность актива, $r \geq 0$ - процентная ставка и D - дивиденды, S - цена базового актива. Перепишем это уравнение в следующем виде (или в дивергентной форме)

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial V}{\partial S} + (r - D)SV + \sigma^2 SV \right) - 2rV + \sigma^2 V \\ &= \frac{\partial}{\partial S} (aS^2 \frac{\partial V}{\partial S} + bSV) - cV \\ &= \frac{\partial}{\partial S} \left(aS^2 e^{-\frac{b}{a} \ln S} \left(\frac{\partial}{\partial S} \left(e^{\frac{b}{a} \ln S} V \right) \right) \right) - cV \end{aligned} \quad (2)$$

С краевыми и начальными условиями

$$V(0, t) = V_L(t), \quad V(S_{max}, t) = V_R(t), \quad V(x, 0) = V_0(x).$$

Здесь $a = \frac{\sigma^2}{2}$, $b = r - D - \sigma^2$, $c = r + b$.

Следуя [3], разобьем отрезок $[0, S_{max}]$ на конечное число интервалов $I_j = [S_k, S_{k+1}]$ с шагом $h_k = S_{k+1} - S_k$, Проинтегрируем уравнение (2) по S в пределах $(S_{i-\frac{1}{2}}, S_{i+\frac{1}{2}})$ и получим уравнение баланса

$$J_{i+\frac{1}{2}} - J_{i-\frac{1}{2}} - \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} (cV + \frac{\partial V}{\partial t}) dS = 0, \quad (3)$$

где

$$J(S) = -aS^2 e^{-\frac{b}{a} \ln S} \left(\frac{\partial}{\partial S} (e^{\frac{b}{a} \ln S} V) \right) \quad (4)$$

функция потока в точках $S_{i+\frac{1}{2}}$, $S_{i-\frac{1}{2}}$.

Проинтегрируем $J_{i-\frac{1}{2}}$ в пределах $(S_{i-\frac{1}{2}}, S)$ и получим соотношение для определения $J_{i-\frac{1}{2}}$

$$-aS^2 e^{-\frac{b}{a} \ln S} \left(\frac{\partial}{\partial S} (e^{\frac{b}{a} \ln S} V) \right) = J_{i-\frac{1}{2}} - \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} (cV + \frac{\partial V}{\partial t}) dS = 0, \quad (5)$$

Разделим (5) на $aS^2 e^{-\frac{b}{a} \ln S}$ и проинтегрируем на интервале (S_{i-1}, S_i) , тогда выражение для потока имеет вид

$$\begin{aligned} J_{i-\frac{1}{2}} &= \left[- \left((e^{\frac{b}{a} \ln S} V)_i - (e^{\frac{b}{a} \ln S} V)_{i-1} \right) \right. \\ &\quad \left. - \int_{S_{i-1}}^{S_i} \frac{dS}{aS^2 e^{-\frac{b}{a} \ln S}} \int_{S_{i-\frac{1}{2}}}^S (cV + \frac{\partial V}{\partial t}) dS' \right] / \int_{S_{i-1}}^{S_i} \frac{dS}{aS^2 e^{-\frac{b}{a} \ln S}} \end{aligned} \quad (6)$$

Аналогично вычисляем $J_{i+\frac{1}{2}}$. Подставляя значения потоков в уравнение баланса (3) приходим к интегральному тождеству Марчука.

$$\begin{aligned}
& -\frac{(e^{\frac{b}{a}\ln S}V)_{i+1} - (e^{\frac{b}{a}\ln S}V)_i}{\int_{S_i}^{S_{i+1}} \frac{dS}{aS^2e^{-\frac{b}{a}\ln S}}} + \frac{(e^{\frac{b}{a}\ln S}V)_i - (e^{\frac{b}{a}\ln S}V)_{i-1}}{\int_{S_{i-1}}^{S_i} \frac{dS}{aS^2e^{-\frac{b}{a}\ln S}}} - \int_{S_{i-\frac{1}{2}}}^{S_{i+\frac{1}{2}}} (cV + \frac{\partial V}{\partial t})dS \\
& = -\left(\int_{S_i}^{S_{i+1}} \frac{dS}{aS^2e^{-\frac{b}{a}\ln S}}\right)^{-1} \int_{S_i}^{S_{i+1}} \frac{dS}{aS^2e^{-\frac{b}{a}\ln S}} \int_S^{S_{i+\frac{1}{2}}} (cV + \frac{\partial V}{\partial t})d\acute{S} \\
& \quad - \left(\int_{S_{i-1}}^{S_i} \frac{dS}{aS^2e^{-\frac{b}{a}\ln S}}\right)^{-1} \int_{S_{i-1}}^{S_i} \frac{dS}{aS^2e^{-\frac{b}{a}\ln S}} \int_{S_{i-\frac{1}{2}}}^S (cV + \frac{\partial V}{\partial t})d\acute{S}
\end{aligned} \tag{7}$$

Преобразуем уравнение (7). Пусть

$$u = cV + \frac{\partial V}{\partial t}, p(S) = \left(\int_{S_i}^{S_{i+1}} \frac{dS}{aS^2e^{-\frac{b}{a}\ln S}}\right)^{-1} \int_{S_i}^S \frac{d\acute{S}}{a\acute{S}^2e^{-\frac{b}{a}\ln \acute{S}}}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
& \left(\int_{S_i}^{S_{i+1}} \frac{dS}{aS^2e^{-\frac{b}{a}\ln S}}\right)^{-1} \int_{S_i}^{S_{i+1}} \frac{dS}{aS^2e^{-\frac{b}{a}\ln S}} \int_S^{S_{i+\frac{1}{2}}} u(\acute{S})d\acute{S} = \\
& \left(\int_{S_i}^{S_{i+1}} \frac{dS}{aS^2e^{-\frac{b}{a}\ln S}}\right)^{-1} \int_{S_i}^{S_{i+1}} \frac{d}{d\acute{S}} \left(\int_{S_i}^S \frac{dS}{aS^2e^{-\frac{b}{a}\ln S}}\right) dS \int_S^{S_{i+\frac{1}{2}}} u(\acute{S})d\acute{S} = \\
& \int_{S_{i+\frac{1}{2}}}^{S_{i+1}} u(S)dS + \left(\int_{S_i}^{S_{i+1}} \frac{dS}{aS^2e^{-\frac{b}{a}\ln S}}\right)^{-1} \int_{S_i}^{S_{i+1}} u(S)dS \int_{S_i}^S \frac{d\acute{S}}{aS^2e^{-\frac{b}{a}\ln S}} = \\
& \quad - \int_{S_{i+\frac{1}{2}}}^{S_{i+1}} u(S)dS + \int_{S_i}^{S_{i+1}} p(S)u(S)dS
\end{aligned}$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned}
& \left(\int_{S_{i-1}}^{S_i} \frac{dS}{aS^2e^{-\frac{b}{a}\ln S}}\right)^{-1} \int_{S_{i-1}}^{S_i} \frac{dS}{aS^2e^{-\frac{b}{a}\ln S}} \int_{S_{i-\frac{1}{2}}}^S u(\acute{S})d\acute{S} = \\
& \quad - \int_{S_{i-\frac{1}{2}}}^{S_i} u(S)dS + \int_{S_{i-1}}^{S_i} \hat{p}(S)u(S)dS,
\end{aligned}$$

где

$$\hat{p}(S) = \left(\int_{S_{i-1}}^{S_i} \frac{dS}{aS^2e^{-\frac{b}{a}\ln S}}\right)^{-1} \int_S^{S_i} \frac{d\acute{S}}{a\acute{S}^2e^{-\frac{b}{a}\ln \acute{S}}}.$$

Таким образом уравнение (7) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
& -\frac{(e^{\frac{b}{a}\ln S}V)_{i+1} - (e^{\frac{b}{a}\ln S}V)_i}{\int_{S_i}^{S_{i+1}} \frac{dS}{aS^2e^{-\frac{b}{a}\ln S}}} + \frac{(e^{\frac{b}{a}\ln S}V)_i - (e^{\frac{b}{a}\ln S}V)_{i-1}}{\int_{S_{i-1}}^{S_i} \frac{dS}{aS^2e^{-\frac{b}{a}\ln S}}} = \\
& \quad \int_{S_i}^{S_{i+1}} (1 - p(S))u(S)dS + \int_{S_{i-1}}^{S_i} (1 - \hat{p}(S))u(S)dS
\end{aligned} \tag{8}$$

Заметим, что

$$p(S_i) = 0, \quad p(S_{i+1}) = 1, \quad \hat{p}(S_{i-1}) = 1, \quad \hat{p}(S_i) = 0.$$

Для построения разностной схемы применим квадратурную формулу Симпсона [4] на интервале (S_i, S_{i+1}) для первого интеграла в (8)

$$\int_{S_i}^{S_{i+1}} (1 - p(S)u(S))dS = \frac{h_{i+1}}{6} \left(u_i + 4p(S_{i+\frac{1}{2}})u_{i+\frac{1}{2}} \right)$$

и интерполяцию полиномом Лагранжа по трем узлам (параболическая интерполяция).

$$\begin{aligned} & p(S_{i+\frac{1}{2}})u_{i+\frac{1}{2}} = \\ & = -\frac{h_{i+1}h_{i+1}}{4h_i(h_i + h_{i+1})}p(S_{i-1})u_{i-1} + \frac{(h_{i+1} + 2h_i)}{4h_i}p(S_i)u_i + \frac{(h_{i+1} + 2h_i)h_{i+1}}{4(h_i + h_{i+1})h_{i+1}}p(S_{i+1})u_{i+1} \end{aligned}$$

Для второго интеграла в (8) имеем

$$\int_{S_{i-1}}^{S_i} (1 - \hat{p}(S)u(S))dS = \frac{h_i}{6} \left(4\hat{p}(S_{i-\frac{1}{2}})u_{i-\frac{1}{2}} + u_i \right)$$

и интерполяцию полиномом Лагранжа второго порядка по трем узлам (параболическая интерполяция).

$$\begin{aligned} & \hat{p}(S_{i-\frac{1}{2}})u_{i-\frac{1}{2}} = \\ & = \frac{h_i(h_i + 2h_{i+1})}{4h_i(h_i + h_{i+1})}\hat{p}(S_{i-1})u_{i-1} + \frac{(h_i + 2h_{i+1})}{4h_{i+1}}\hat{p}(S_i)u_i - \frac{h_i h_i}{4(h_i + h_{i+1})h_{i+1}}\hat{p}(S_{i+1})u_{i+1} \end{aligned}$$

В результате получаем аппроксимацию уравнения (1) с точностью четвертого порядка.

Запишем полученную систему уравнений в алгебраическом виде

$$A \frac{\partial V}{\partial t} = BV. \quad (9)$$

Матрица A является трехдиагональной матрицей с коэффициентами

$$\begin{aligned} a_{i,i} &= \frac{(h_{i+1} + 2h_i)}{4h_i}p(S_i) + \frac{(h_{i+1} + 2h_i)}{4h_{i+1}}\hat{p}(S_i), \\ a_{i,i-1} &= \frac{h_i(h_i + 2h_{i+1})}{4h_i(h_i + h_{i+1})}\hat{p}(S_{i-1}) - \frac{h_{i+1}h_{i+1}}{4h_i(h_i + h_{i+1})}p(S_{i-1}), \\ a_{i,i+1} &= \frac{(h_{i+1} + 2h_i)h_{i+1}}{4(h_i + h_{i+1})h_{i+1}}p(S_{i+1}) - \frac{h_i h_i}{4(h_i + h_{i+1})h_{i+1}}\hat{p}(S_i). \end{aligned} \quad (10)$$

Если шаг сетки постоянный $h_i = h$, то матрица A является симметричной со строгим диагональным преобладанием. Матрица B также является трехдиагональной и монотонной с коэффициентами

$$\begin{aligned}
 e_i &= (e^{\frac{b}{a} \ln S})_i & ee_i &= \int_{S_i}^{S_{i+1}} \frac{dS}{aS^2 e^{-\frac{b}{a} \ln S}} \\
 b_{i,i} &= c_i a_{i,i} + \frac{e_i}{ee_i} + \frac{e_i}{ee_{i-1}} \\
 b_{i,i-1} &= c_{i-1} a_{i,i-1} + \frac{e_{i-1}}{ee_{i-1}} \\
 b_{i,i+1} &= c_{i+1} a_{i,i+1} + \frac{e_{i+1}}{ee_i}
 \end{aligned} \tag{11}$$

Заметим, что краевые условия Дирихле учитываются точно. Для интегрирования по времени системы (9) применим явный метод Рунге-Кутты, используемый для решения жестких задач. Таблица Батчера для четырехстадийного метода четвертого порядка точности имеет вид

$$\begin{array}{c|cccc}
 0 & & & & \\
 \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
 \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\
 1 & 0 & 0 & 1 & \\
 \hline
 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6}
 \end{array} \tag{12}$$

Приведем численный пример решения уравнения Блэка-Шоулза со следующими краевыми условиями Дирихле и параметрами

$$V(0, t) = E, \quad V(S_{max}, t) = 0, \quad V(x, 0) = \max(E - S, 0)$$

$$S_{max} = 50, \quad E = 10, \quad T = 1,$$

$$h = \frac{S_{max}}{N+1}, \quad \Delta t = \frac{T}{M+1}, \quad \sigma = 0.6, \quad r = 0.25, \quad d = 0.2.$$

Для определения порядка сходимости на различных сетках, было вычислено "точное" численное решение с $N = M = 2^{12}$.

M	N	L2-error	Order
1024	128	0.000150231	
1024	256	9.41888E-06	15.95
1024	512	5.89786E-07	15.97
1024	1024	3.68156E-08	16.02
N	M	L2-error	Order
1024	128	1.98649e-4	
1024	256	1.24999E-05	15.89
1024	512	7.81635E-07	15.99
1024	1024	4.88156E-08	16.01

Литература

1. *Black, F., and Scholes* The pricing of options and corporate liabilities // Political Economy. 1973. Vol. 81. P. 637-654.
2. *P. Brandimarte* Numerical Methods in Finance and Economics: A MATLAB-Based Introduction .Second edition. J. Wiley and Sons, Inc., New Jersey, USA, 2009
3. *Ильин В.П.* Математическое моделирование. Часть 1. Непрерывные и дискретные модели, Новосибирск: Изд-во Сибирского отделения РАН, 2017.
4. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. М.: Наука, 1975.

КОМПАКТНАЯ РАЗНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА¹

Гордин В.А.

НИУ ВШЭ, Гидрометцентр РФ, Москва

Аннотация.

При решении краевых задач математической физики компактные схемы позволяют увеличить (по сравнению с классическими) порядок точности решения при незначительном увеличении числа арифметических операций. Непременным условием алгоритма является применение прогонки. Показан метод вычисления коэффициентов схем как на шаблонах, совмещенных для решения и правой части уравнения, так и для шахматных сеток (шаблоны сдвинуты на половину шага). Анализ Фурье подтверждает высокий порядок аппроксимации.

I Введение

Рассмотрим аппроксимацию линейных дифференциальных уравнений вида $\mathcal{L}[u] = f$, где f — заданная функция, а u — искомая, разностным соотношением $A[u] = P[f]$, где A, P — разностные операторы, f — известная функция. При классическом подходе оператор P — тождественный (единичный). Схема, полученная совместным подбором наилучших операторов A, P , называется компактной. Переход от классических схем к компактным аналогичен переходу от кольца многочленов к полю рациональных функций.

Эффективность компактных схем была показана для численного решения краевых задач для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными и переменными коэффициентами (см., например, [3], [10], [11], [12]) и для уравнений в частных производных ([3], [8], [9]).

Для таких схем (иногда они называются схемами Нумерова и сначала использовались не для краевых задач, а для задачи Коши, см. [4], [5], [6], [7]) имеется несколько вариантов определения (см., например, [1]). Будем здесь использовать следующий вариант:

1. Задаются шаблоны T_A, T_P — наборы точек сетки в количестве κ_A и κ_P , соответственно, в окрестности произвольной точки разностной сетки \vec{x}_* для функции u и для функции f . Эти шаблоны могут совпадать, один

¹Статья подготовлена в ходе проведения работы № 18-05-0011 в рамках Программы « Научный фонд Национального исследовательского университета „Высшая школа экономики“ (НИУ ВШЭ)» в 2018 — 2019 гг. и в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации «5-100».

из них может включать другой, или получаться сдвигом на половину шага сетки.

Замечание. Для шаблонов, состоящих из большого числа точек сетки, можно обеспечить весьма высокий порядок точности (при $h \rightarrow 0$) разностной схемы. Зато обращение “большой” матрицы (см. п.3) потребует существенно большего числа арифметических операций. Кроме того, в приграничных точках для замыкания разностной схемы могут потребоваться дополнительные (помимо физических, следующих из исходной дифференциальной задачи) граничные условия.

2. Вычисляются коэффициенты конечно-разностной схемы во всех точках обоих шаблонов так, чтобы порядок аппроксимации дифференциального соотношения был бы максимальным. Поскольку при умножении всех коэффициентов для обоих шаблонов на произвольную ненулевую константу получается та же разностная схема, задача построения схемы на таких шаблонах имеет $N = \kappa_D + \kappa_P - 1$ степеней свободы. Потребуем от коэффициентов, чтобы разностная схема была точна на парах тестовых функций $\{u_j, f_j\}_{j=1}^N$ и удовлетворяла условию нормировки. При решении этой СЛАУ порядка N следует считаться с возможностью ее вырожденности. Соответствующие примеры будут приведены ниже.

3. Составляем “большую” систему линейных уравнений — по одному для каждой точки сетки $\{\vec{x}_\mu\}_{\mu=1}^M$. В каждой строке “большой” матрицы размерности M отличны от нуля только $N \ll M$ коэффициентов (такие матрицы называются разреженными), что существенно удешевляет решение СЛАУ. В одномерных задачах при $\kappa_D = 3$ обычно для ее решения используется метод прогонки, требующий сравнительно малое число арифметических операций. В точках сетки, расположенных на границе вычислительной области, при определении коэффициентов и выборе набора тестовых функций следует учитывать граничные условия дифференциальной задачи. Эта система также может оказаться вырожденной — нужно ее проверять.

Здесь будет рассмотрен случай уравнения Пуассона $\Delta u = f$ для размерностей $n = 1$ и 2 , а также уравнение $d_x^3 u = f$.

Если коэффициенты разностной схемы определены, можно с помощью преобразования Фурье $F_{\vec{x} \rightarrow \vec{\xi}}$ сравнить символы дифференциального и разностного операторов (см., например, [3], [12]). Можно оценивать асимптотику при шаге сетки $h \rightarrow 0$ или, что то же самое, для малых волновых векторов в аппроксимируемых решениях. Малой здесь предполагается безразмерная величина $\omega = (\vec{\xi}, \vec{h})$, где \vec{h} — набор шагов сетки в направлениях координат \vec{x} . В одномерном случае малый параметр — $\omega = \xi h$.

II Компактная аппроксимация оператора d_x^2 на совмещенной сетке

Классическая разностная аппроксимация оператора d_x^2 на трехточечном шаблоне для равномерной сетки общеизвестна: $\kappa_A = 3$, $\kappa_P = 1$, и

$$u(x) \mapsto f(x) = h^{-2}[u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)]. \quad (1)$$

Символ этого оператора:

$$\sigma_{cl} = 2h^{-2}[\cos(\xi h) - 1] = -4h^{-2} \sin^2(\xi h/2).$$

Это значит, что в результате преобразования Фурье $F_{x \rightarrow \xi}$ применение оператора (1) переходит в умножение на символ:

$$\tilde{u}(\xi) \mapsto \sigma_{cl}(\xi) \tilde{u}(\xi),$$

в то время, как символ $\sigma_{et}(\xi)$ эталонного оператора — оператора d_x^2 — равен $-\xi^2$.

Нетрудно оценить асимптотику разности символов при малых ξ , а тем самым и порядок аппроксимации дифференциального оператора разностным на гладких функциях u :

$$\sigma_{et}(\xi) - \sigma_{cl}(\xi) = \xi^4 h^2 + \mathbf{O}(\xi^6 h^4),$$

— классическая схема имеет второй порядок аппроксимации, см. Рис. 1.

Компактная аппроксимация, когда на трехточечном шаблоне задаются не только функция u , но и правая часть уравнения, также хорошо известна ($\kappa_A = 3$, $\kappa_P = 3$), см., например, [1], [2]:

$$h^{-2}[u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)] = [f(x+h) + 10f(x) + f(x-h)]/12. \quad (2)$$

Символ этого оператора — рациональная функция:

$$\sigma_{comp} = 12h^{-2} \frac{\exp(i\omega) - 2 + \exp(-i\omega)}{\exp(i\omega) + 10 + \exp(-i\omega)} = \frac{-24h^{-2} \sin^2(\omega/2)}{\cos(\omega) + 5}, \quad (3)$$

где $\omega = \xi h$.

Коэффициенты этой рациональной функции можно было определить из условия точности разностного соотношения

$$pf(x+h) + qf(x) + rf(x-h) = h^{-2}[au(x+h) + bu(x) + cu(x-h)] \quad (4)$$

на парах тестовых функций

$$u_k x^k, \quad f_k = k(k-1)x^{k-2}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

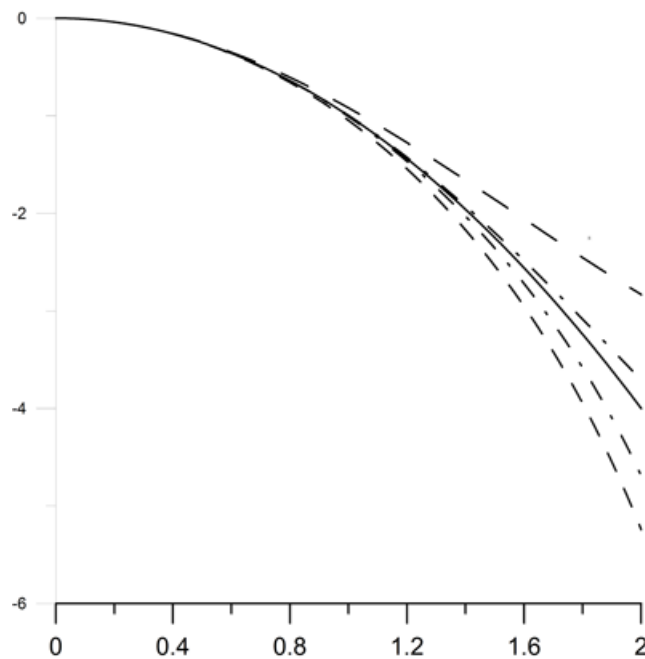


Рис. 1. Символы операторов. Сплошная линия — символ $-\xi^2$ эталонного оператора d_x^2 , а символы его разностных аппроксимаций показаны пунктиром. Верхняя линия — символ классического оператора вторых центральных разностей. Вторая — символ компактной аппроксимации на совмещенной сетке (3). Четвертая — символ компактной аппроксимации на шахматной сетке (7). Пятая — символ простейшей аппроксимации на шахматной сетке (7).

Из этих пяти однородных линейных алгебраических уравнений (нетрудно проверить их линейную независимость) шесть коэффициентов (4) определяются с точностью до общего множителя, который, разумеется, нужно выбрать ненулевым. В частности, удобна нормировка (2).

Если нужно по значениям функции u на сетке из N точек на окружности \mathbb{S}^1 с шагом h оценить значения функции f на той же сетке, то нужно решить СЛАУ $A\vec{u} = P\vec{f}$:

$$\begin{aligned}
 h^{-2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \cdot & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_N \end{pmatrix} &= & (5) \\
 &= & \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 10 & 1 & \cdot & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \dots & 1 & 10 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_N \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

относительно n -мерного вектора \vec{f} . Обе матрицы симметричны. Матрица P обратима (по теореме Гершгорина), поскольку в ней доминирует главная диагональ.

Дифференциальное уравнение $d_x^2 u = f$ на окружности (с условиями периодичности) разрешимо, только если выполнено условие

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0,$$

причем решение не единственно, а определяется с точностью до константы. Это же утверждение верно и для СЛАУ (5) относительно \vec{u} , — только интеграл нужно заменить на сумму компонент n -мерного вектора \vec{f} .

Если же дифференциальное уравнение решается на отрезке, например, с условиями Дирихле на краях, то решение этой краевой задачи существует и единственно для любой функции f .

Для компактной аппроксимации задачи Дирихле нужно заменить в СЛАУ (5) первую строку обеих матриц на $\langle -1, 0, \dots, 0, 0 \rangle$, последнюю — на $\langle 0, 0, \dots, 0, -1 \rangle$, а вместо первой и последней координат вектора \vec{f} использовать краевые значения в задаче Дирихле, умноженные на -1 . Матрица A в (5) становится после этого измененная невырожденной и строго отрицательно определенной.

III Компактная аппроксимация одномерной задачи на шахматной сетке

Рассмотрим аппроксимацию оператора второй производной на двухточечном шаблоне для правой части ($\kappa_A = 3$, $\kappa_P = 2$), учитывающую четность — инвариантность оператора d_x^2 относительно замены $x \mapsto -x$:

$$h^{-2}u(j+1) - 2u(j) + u(j-1) = A[f(j+1/2) + f(j-1/2)], \quad A = \text{const.} \quad (6)$$

Из условия точности схемы (6) на тестовых функциях $\langle 1, 0 \rangle$ и $\langle x^2, 2 \rangle$ определяем константу: $A = 1/2$. Схема $\langle 1, 0 \rangle$ имеет второй порядок точности. Символ оператора (6)

$$\sigma_{ch2} = -4h^{-2} \sin^2(\omega/2) \cos^{-1}(\omega/2) \quad (7)$$

имеет при $\xi \rightarrow 0$ асимптотику

$$\sigma_{ch2} = -\xi^2(1 + \omega^2/24) + \mathbf{O}(\omega^4).$$

Следовательно, невязка для шахматной схемы (6) имеет тот же второй порядок малости, что и классическая схема (1), но константа в главном члене невязке в два раза меньше.

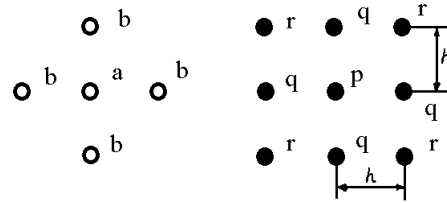


Рис. 2. Шаблон типа “крест – квадрат” для компактной аппроксимации на квадратной сетке. Для функции u – шаблон из белых кружков, для функции f – из черных

Если же рассмотреть шахматную схему при $\kappa_A = 3$, $\kappa_P = 4$, т.е. с четырёхточечным шаблоном для правой части:

$$u(j + 1) - 2u(j) + u(j - 1) = \tag{8}$$

$$B[f(j + 1/2) + f(j - 1/2)] + C[f(j + 3/2) + f(j - 3/2)], \quad B, C = \text{const}$$

и определить коэффициенты B, C из условий аппроксимации на трех парах тестовых функций: $\langle 1, 0 \rangle$, $\langle x^2, 2 \rangle$ и $\langle x^4, 12x^2 \rangle$, то можно обеспечить четвертый порядок аппроксимации.

Решение соответствующей СЛАУ: $B = 25h^2/48, C = -h^2/48$, а символ соответствующего разностного оператора:

$$\sigma_{ch4} = -4h^{-2} \sin^2(\omega/2)[25 \cos(\omega/2)/24 - \cos(3\omega/2)/24]^{-1}, \tag{9}$$

— его асимптотику при $\omega \rightarrow 0$ можно оценить: $\sigma_{ch4} = -\xi^2 + \mathbf{O}(\omega^4)$; $\omega^4 = h^4\xi^4$. Следовательно, порядок разностной схемы — четвертый

IV Компактные аппроксимации уравнения Пуассона на плоскости — совмещенная квадратная сетка

1. Выберем следующие шаблоны (см. Рис. 2): крест для функции u , квадрат для правой части f , т. е. $\kappa_A = 5$, $\kappa_P = 9$. С учетом симметрии задачи получаем для произвольной внутренней точки двумерной сетки с номерами i, j линейное алгебраическое уравнение с неопределенными пока коэффициентами p, q, r :

$$\begin{aligned} &u(i, j - 1) + u(i - 1, j) + u(i + 1, j) + u(i, j + 1) - 4u(i, j) = \tag{10} \\ &= r [f(i - 1, j - 1) + f(i - 1, j + 1) + f(i + 1, j - 1) + f(i + 1, j + 1)] + \\ &+ q [f(i, j - 1) + f(i - 1, j) + f(i + 1, j) + f(i, j + 1)] + pf(i, j). \end{aligned}$$

Для определения этих коэффициентов потребуем точного выполнения уравнения (10) на следующих парах тестовых функций:

	u	f	Уравнение
1	1	0	выполнено
2	x^2	2	$2h^2 = 2[4r + 4q + p]$
3	x^4	$12x^2$	$2h^4 = 12h^2[4r + 2q]$
4	x^2y^2	$2(x^2 + y^2)$	$0 = 2[8r + 4q]$

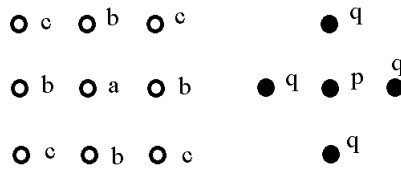


Рис. 3. Шаблон типа “квадрат – крест??” для компактной аппроксимации на квадратной сетке

Уравнения с номерами 3 и 4 противоречат друг другу. Следовательно, на указанном шаблоне схема 4-го порядка точности невозможна.

2. Рассмотрим теперь пару шаблонов: квадрат для функции u , крест для правой части f , ($\kappa_A = 9$, $\kappa_P = 5$), см. Рис. 3. На этой паре шаблонов степеней свободы (число свободных параметров) столько же, сколько и в предыдущей, но попытка построить схему 4-го порядка точности оказывается удачной. С учетом симметрии шаблонов относительно обеих осей получаем

$$\begin{aligned}
 & c[u(i-1, j-1) + u(i-1, j+1) + u(i+1, j-1) + u(i+1, j+1)] + \quad (11) \\
 & + b[u(i, j-1) + u(i-1, j) + u(i+1, j) + u(i, j+1)] + au(i, j) = \\
 & = q[f(i, j-1) + f(i-1, j) + f(i+1, j) + f(i, j+1)] + pf(i, j).
 \end{aligned}$$

Для определения этих коэффициентов потребуем точного выполнения уравнения (11) на следующих парах тестовых функций:

	u	f	Уравнение
0	1	0	$a = -4(b + c)$
2	x^2	2	$(4c + 2b)h^2 = 2(4q + p)$
4a	x^4	$12x^2$	$(4c + 2b)h^2 = 24h^2q$
4b	x^2y^2	$2(x^2 + y^2)$	$4ch^4 = 8qh^2$

Из уравнений 4a и 4b следует, что $b = 4c$, а из уравнений 0 и 2 — что $a = -20c$, $12ch^2 = 2(2ch^2 + p) \Rightarrow p = 4ch^2$. Выберем нормировочное условие $c = 2$. Тогда схема имеет следующие коэффициенты:

$$a = -40, b = 8, c = 2, p = 8h^2, q = h^2.$$

Символ этого оператора

$$\sigma_{kva-kre} = \frac{-40 + 16[\cos(\xi h) + \cos(\eta h)] + 8 \cos(\xi h) \cos(\eta h)}{8 + 2[\cos(\xi h) + \cos(\eta h)]} \approx -(\xi^2 + \eta^2). \quad (12)$$

На Рис. 4 показана невязка приближенного равенства (12), деленная на $(\xi^2 + \eta^2)^3$. Это функция, хотя и разрывная, но ограниченная в начале координат. Таким образом, асимптотика невязки (12) составляет $h^{-2} \mathbf{O}((\xi^2 + \eta^2) h^6)$.

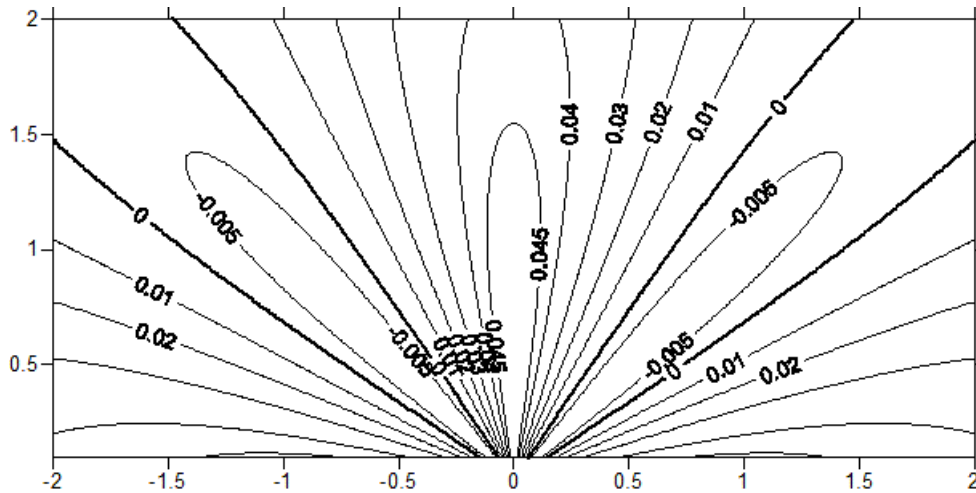


Рис. 4. Отклонение символа компактного разностного оператора (12) от символа эталонного оператора Лапласа при положительных η , деленное на $(\xi^2 + \eta^2)^3$

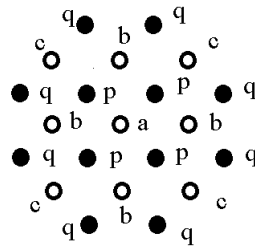


Рис. 5. Шаблоны для компактной 4-го порядка аппроксимации оператора Лапласа на шахматной сетке. Белые кружки составляют шаблон для функции u , черные — для f

Рассмотрим компактную аппроксимацию ($\kappa_A = 9, \kappa_P = 4$) на шахматной сетке, см. Рис. 5

Условие аппроксимации в терминах символов запишем так:

$$1 + 2a[\cos(\xi h) + \cos(\eta h)] + 4b \cos(\xi h) \cos(\eta h) \sim \\ \sim (\xi^2 + \eta^2)[4p \cos(\xi h/2) \cos(\eta h/2) + 4q(\cos(3\xi h/2) \cos(\eta h/2) + \\ + \cos(\xi h/2) \cos(3\eta h/2))].$$

Нужно обеспечить равенство частных производных этих символов в начале координат до 4 порядка включительно. Или подставить тестовые функции:

	u	f	Уравнение
0	1	0	$1 + 4a + 4b = 0$
2	x^2	2	$2(a + 2b)h^2 = 2(4p + 8q)$
4a	x^4	$12x^2$	$2(a + 2b)h^4 = 12(p + 10q)h^2$
4b	x^2y^2	$2(x^2 + y^2)$	$4bh^4 = 4(p + 10q)h^2$

Сравнение уравнений 4a и 4b дает $a = 4b$. Подставляя в уравнение 2, получаем $b = -1/20, a = -1/5$. Отсюда $2a + 4b = -3/5$. После этого из 2 и 3, получаем $p = 26/320, q = 1/320$. Сменим нормировку на более удобную, —

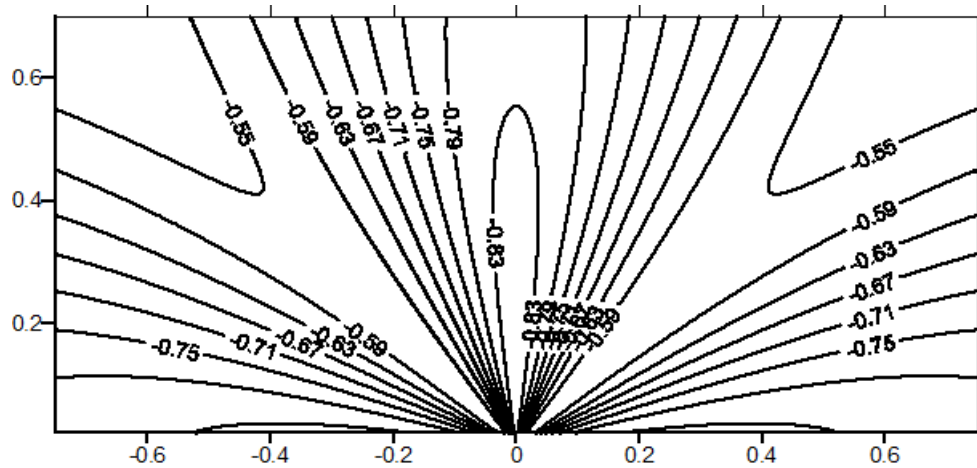


Рис. 6. Отклонение символа компактного разностного оператора на шахматной сетке (IV) от символа эталонного оператора Лапласа, деленное на $(\xi^2 + \eta^2)^3$, при положительных значениях параметра η

умножим все коэффициенты рациональной функции (решение однородной СЛАУ) на -320 . Получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{chess}(\xi, \eta) &= \\ &= h^{-2} \frac{-320 + 128[\cos(\xi h) + \cos(\eta h)] + 64 \cos(\xi h) \cos(\eta h)}{104 \cos(\xi h) \cos(\eta h) - 4[\cos(3\xi h) \cos(\eta h) + \cos(\xi h) \cos(3\eta h)]} \sim \quad (13) \\ &\sim -(\xi^2 + \eta^2). \end{aligned}$$

Асимптотику при $\omega^2 = h^2(\xi^2 + \eta^2) \rightarrow 0$ можно оценить: $\sigma_{chess} = -(\xi^2 + \eta^2) + h^{-2}\mathbf{O}(\omega^6)$, — порядок этой компактной схемы равен 4.

V Компактная аппроксимации третьей производной

Для аппроксимации дифференциального соотношения

$$d_x^3 = f \quad (14)$$

трехточечный шаблон для функции u недостаточен при любом шаблоне для функции f . Действительно, для трех пар тестовых функций:

$$u_k = x^k, \quad f_k = 0, \quad k = 0, 1, 2$$

получаем однородную СЛАУ третьего порядка для трех весов в точках трехточечного шаблона. Матрица СЛАУ — матрица Вандермонда, и она невырождена. Следовательно, все три коэффициента компактной схемы для функции u равны нулю. Такая схема не может аппроксимировать соотношение (14) ни с каким порядком.

Рассмотрим теперь случай пятиточечного шаблона для u и трехточечного — для функции f . Соответствующие пары тестовых функций

$$u_k = x^k, \quad f_k = k(k-1)(k-2)x^{k-3}, \quad k = 3, 4, 5, 6.$$

Веса для компактной схемы на равномерной схеме, аппроксимирующей соотношение (14) для функции u кососимметричны, а для функции f симметричны, т.е. схема имеет вид

$$a(u_{j+2} - u_{j-2}) + b(u_{j+1} - u_{j-1}) = p(f_{j+1} + f_{j-1}) + qf_j, \quad (15)$$

причем пары тестовых функций при любом четном k удовлетворяют разностному соотношению (15) точно.

При $k = 1, 3, 5$ получаем три однородных линейных алгебраических уравнения, система которых имеет единственное решение с точностью до нормировки:

k	u	f	Уравнение
1	x	0	$2(2a + b)h = 0$
3	x^3	6	$2(8a + b)h^3 = 6(2p + q)$
5	x^5	$60x^2$	$2(32a + b)h^5 = 120ph^2$

При $k = 1$ получаем: $b = -2a$, откуда следует, что

$$12ah^3 = 12p + 6q, \quad 60ah^3 = 120p \Rightarrow a = 2ph^{-3}, \quad q = 2p.$$

Если выбрать нормировку $p = 1$, то остальные коэффициенты суть $q = 2$, $a = 2h^{-3}$, $b = -4h^{-3}$. Заметим, что в матрице P главная диагональ не доминирует. Если число N точек сетки на окружности четно, то “пила” — функция $f_*(j) = (-1)^j$, $j = 1, \dots, N$ — принадлежит ядру симметричной матрицы P . Поэтому на окружности (при периодических условиях) этот алгоритм вычисления третьей производной нуждается в уточнении.

Для любого вектора $\vec{u} \in \mathbb{R}^N$ вектор $A\vec{u}$ ортогонален вектору $\vec{f}_* \in \mathbb{R}^N$.

Единственное решение \vec{f} СЛАУ $P\vec{f} = A\vec{u}$ выделяется условием

$$(\vec{f}, \vec{f}_*) = 0.$$

Напротив, если решается дифференциальное уравнение третьего порядка на окружности (14), аппроксимированное компактной схемой (15), то нужно проверить невырожденность матрицы A . После преобразования Фурье получаем символ разностного оператора, умноженный на h^3 :

$$\sigma_3 = \frac{2 \sin(2\omega) - 4 \sin(\omega)}{1 + \cos(\omega)},$$

Символ σ_3 обращается в нуль при $\omega = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Соответствующие нулю собственные вектора (с точностью до ненулевого множителя) имеют координаты $u_j = 1$ или $u_j = (-1)^j$; второй вектор, действительно, функция на сетке на окружности, если и только если число точек сетки N четно.

Погрешность этой разностной схемы оценена на Рис. 7.

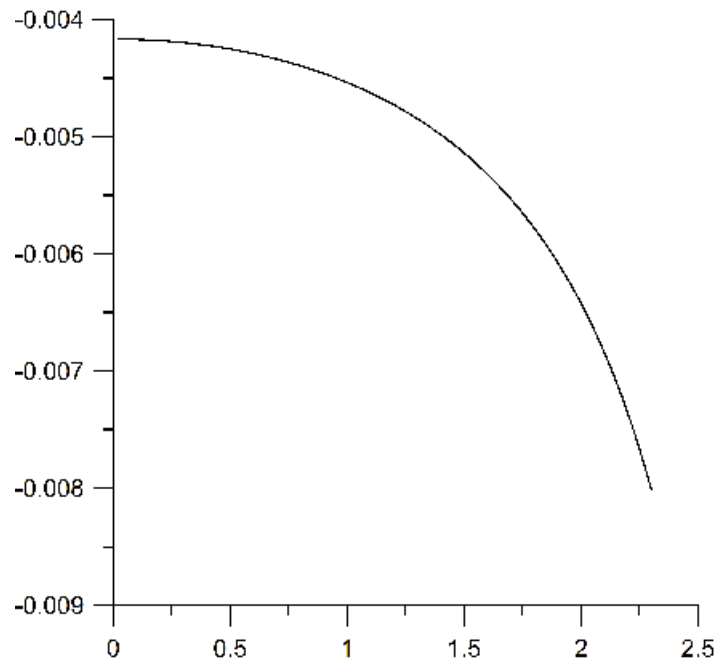


Рис. 7. Функция $\sigma_3 + \omega^3$, поделенная на ω^7 , имеет конечный предел при $\omega \rightarrow 0$. Это число — коэффициент главного члена асимптотики невязки компактного разностного оператора, аппроксимирующего дифференциальное уравнение третьего порядка (14) на окружности. Следовательно, схема имеет 4-й порядок аппроксимации

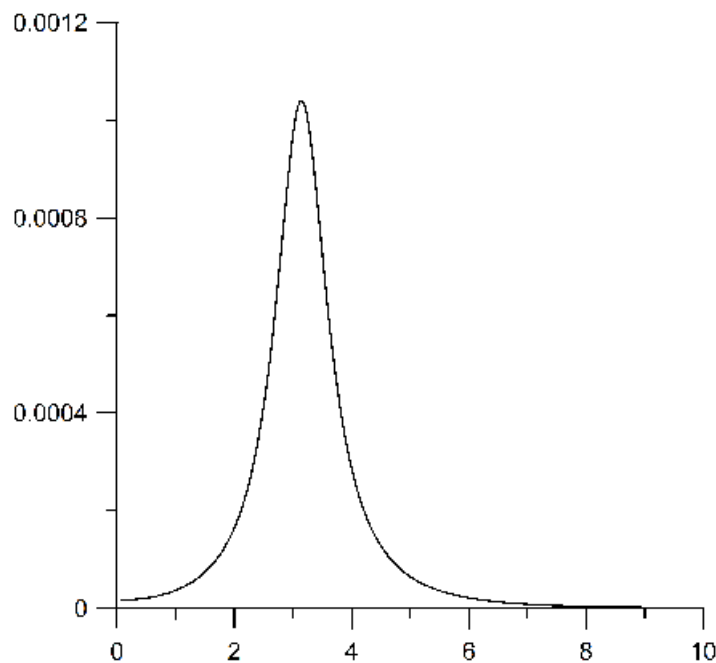


Рис. 8. Функция $\sigma_5 + \omega^3$, поделенная на ω^9 , имеет конечный предел при $\omega \rightarrow 0$. Это число — коэффициент главного члена асимптотики невязки компактного разностного оператора, аппроксимирующего дифференциальное уравнение третьего порядка (14) на окружности. Следовательно, схема имеет 6-й порядок аппроксимации

Символ компактной схемы, аппроксимирующей на шаблонах 5 – 5 на окружности уравнение (14), умноженный на h^3 , задается формулой

$$\sigma_5 = \frac{120 \sin(2\omega) - 240 \sin(\omega)}{\cos(2\omega) + 56 \cos(\omega) + 63}.$$

В пятидиагональной (с добавками в правом верхнем и левом нижнем углах) симметричной матрице P главная диагональ доминирует, поскольку $63 > 56 + 2$. По теореме Гершгорина матрица P невырождена, т.е., в отличие от схемы на шаблоне 5–3, эту схему можно применять для трехкратного дифференцирования на равномерной сетке на окружности без каких-то ограничений.

Литература

1. S.K.Lele. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution // Journal of Computational Physics. Vol. 103, № 1, 1992, pp. 16-42.
2. В.А.Гордин. Как это посчитать? - М.: МЦНМО, 2005, 280с.
3. В.А.Гордин. Математика, компьютер, прогноз погоды и другие сценарии математической физики. - М.: Физматлит, 2010; 2013, 733 с.
4. P.H. Cowell, A.C.D.Crommelin. Investigation of the motion of Halley's comet from 1759 to 1910. Appendix to Greenwich Observations for 1909, Edinburgh (1910) pp.1-84.
5. Э.Хайпер, С.Нёрсетт, Г.Ваннер. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. - М.: <Мир>, 1990.
6. Б. В. Нумеров, "Метод экстраполирования в применении к численному интегрированию линейных дифференциальных уравнений второго порядка Известия Академии наук СССР. VII серия. Отделение математических и естественных наук, 1932, № 1, 178
7. B.V.Noumerov, A Method of Extrapolation of Perturbations, Monthly Notices Royal Astronomical Society 84 (1924) pp 592-601.
8. V.A.Gordin, E.A.Tsymbalov. Compact difference schemes for the diffusion and Schrodinger equations. Approximation, stability, convergence, effectiveness, monotony // Journal of Computational Mathematics, Vol. 32, No.3, 2014, pp. 348-370.
9. V.A.Gordin, E.A.Tsymbalov. Compact difference scheme for parabolic and Schrodinger-type equations with variable coefficients. J. Comp. Phys. V.375, pp.1451-1468, 2018.
10. В.А.Гордин, Е.А.Цымбалов. Разностная схема 4-го порядка точности для дифференциального уравнения с переменными коэффициентами. Математическое моделирование, 2017, т.29, №7, стр.3-14.

11. В.А.Гордин, Е.А.Цымбалов. Компактная разностная схема для дифференциального уравнения с кусочно-постоянным коэффициентом.// Математическое моделирование. 2017, т.29, №12, стр.16-28.
12. В.А.Гордин. Компактные разностные схемы для аппроксимации дифференциальных соотношений. Математическое моделирование 2019, 31(7), стр.58-74.

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ. КОМПАКТНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ СЛОЖНОЙ ГРАНИЦЫ СРЕД.¹

Гордин В.А. Шадрин Д.А.

НИУ ВШЭ, Гидрометцентр РФ, Москва

Аннотация

Численно изучается краевая задача для уравнений Пуассона и Гельмгольца с кусочно-постоянным коэффициентом со скачком на треугольнике. На скачке коэффициента (на границе сред) ставятся условия стыковки. Предложена компактная разностная схема с высокой точностью при сравнительно небольшом количестве вычислений.

I Введение

Стационарные решения различных процессов (диффузии, теплопроводности, волновых) описываются уравнениями Пуассона или Гельмгольца:

$$-\operatorname{div}(\vartheta \operatorname{grad}(u)) = f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in G. \quad (1)$$

$$-\operatorname{div}(\vartheta \operatorname{grad}(u)) + k^2 u = f(\vec{x}). \quad (2)$$

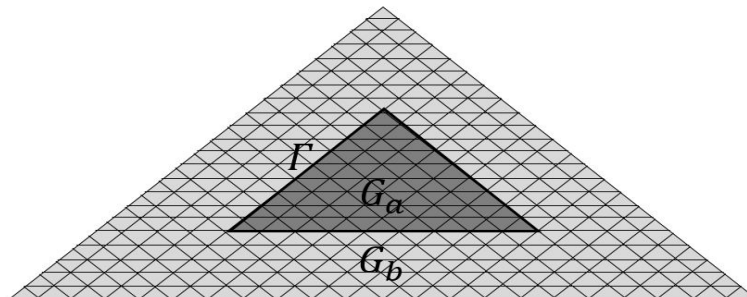


Рис. 1. Разбиение области G на подобласти G_a и G_b . На внешней границе G — граничные условия Дирихле, на линии Γ — стыковочные условия (3)

¹Статья подготовлена в ходе проведения работы № 18-05-0011 в рамках Программы « Научный фонд Национального исследовательского университета „Высшая школа экономики“ (НИУ ВШЭ)» в 2018 — 2019 гг. и в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации «5-100».

Пусть область G делится на две однородные подобласти G_a и G_b с разными свойствами среды (значениями коэффициента ϑ). В технических приложениях важен случай ломаной границы Γ между G_a и G_b . Модельный пример: G_a и G — концентрические равнобедренные треугольники с углом α (см Рис 1). Коэффициент ϑ во внутреннем треугольнике G_a принимает значение ϑ_+ , снаружи (в G_b) — ϑ_- . Цель работы — построить компактную разностную схему на треугольной сетке. О компактной схеме 4-го порядка точности для одномерной задачи со скачком коэффициента см. [1].

Стыковочные условия на линии Γ :

$$[u] = 0, \quad [\vartheta \partial_{\vec{n}} u] = 0, \quad (3)$$

где $[]$ — амплитуда скачка на Γ , $\partial_{\vec{n}}$ — производная по нормали к Γ .

II Аппроксимация

Линии сетки параллельны сторонам треугольников. В каждой внутренней точке сетки (x_0, y_0) дифференциальное уравнение (1) аппроксимируем уравнением:

$$\sum_{k,l} p_{kl} u_{kl} = \sum_{m,t} q_{mt} f_{mt}, \quad (4)$$

где u_{kl} — значения неизвестной функции в точке с индексами k, l шаблона S_0 вокруг точки (x_0, y_0) , f_{mt} — значение правой части (1) в точке с индексами m, t в шаблоне T_0 . Коэффициенты $\langle p_{kl}, q_{mt} \rangle$ для каждой точки сетки определим из условий точности уравнения (4) на наборе пар тестовых функций $\langle u^j, f^j \rangle$, $j = 1, \dots, n$. Получаем n однородных линейных уравнений на τ неизвестных коэффициентов q_{kl}, p_{mt} для искомого решения u и для правой части f . После добавления условия нормировки (например, $p_{00} = 1$) получаем систему из $\tau = n + 1$ линейных уравнений. Хорошую обусловленность СЛАУ нужно проверять. Подробнее про компактные схемы см. [2].

II.1 Аппроксимация в точках, далеких от стыка сред

В точке (x_0, y_0) , далекой от линии стыка Γ , решение u — аналитическая функция. В окрестности (x_0, y_0) решение представимо в виде: $u(x, y) = \sum_{i+j \leq 4} a_{ij} (x - x_0)^i (y - y_0)^j + o(r^4)$. Выберем в качестве тестовых функций: $u^{ij} = (x - x_0)^i (y - y_0)^j$, где $i + j \leq 4$, функции $f^{ij} = L[u^{ij}]$. Требуем выполнения равенства (4) для всех этих пар тестовых функций $\langle u^{ij}, f^{ij} \rangle$. Погрешность схемы $O(N^{-4})$, N — число точек сетки при основании большого треугольника.

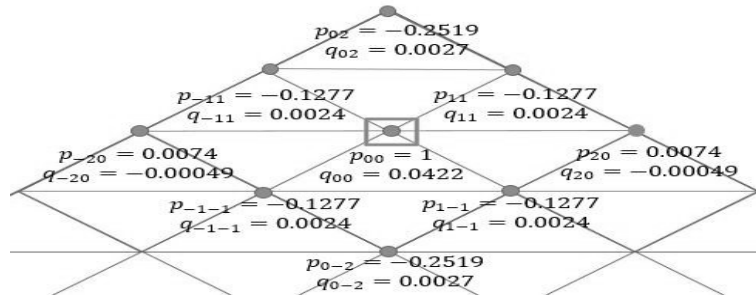


Рис. 2. Шаблон для точек, далеких от границ треугольников. Точка для которой записано уравнение (4), обведена квадратом. Здесь $\tau = 18$. Численные значения коэффициентов $\langle p, q \rangle$ рассчитаны для параметров:

$$\vartheta_+ = 1, \vartheta_- = 10, \alpha = 0.4 \tag{5}$$

Замечание. Шаблон для внутренних точек симметричен относительно вертикальной и горизонтальной осей, см. Рис. 2. Предполагаем равенство коэффициентов $\langle p_{kl}, q_{mt} \rangle$ в симметричных точках ($\langle p_{kl}, q_{mt} \rangle = \langle p_{-k-l}, q_{-m-t} \rangle = \langle p_{k-l}, q_{m-t} \rangle = \langle p_{-k-l}, q_{-m-t} \rangle$). Получаем 8 различных коэффициентов: $p_{00}, p_{02}, p_{11}, p_{20}, q_{00}, q_{02}, q_{11}, q_{20}$. В качестве тестовых функций берем u^{ij} , где степени i, j -четные, и еще функцию: $((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)^3$. Получаем 7 тестовых функций и одно условие нормировки $p_{00} = 1$. Отметим, что если не использовать соображение симметрии, полагая все коэффициенты шаблона на Рис 2 независимыми, то при выборе всех тестовых функций, где $i + j \leq 4$, дополненных еще двумя, матрица системы на коэффициенты (4) плохо обусловлена.

II.2 Аппроксимация в точках на линии Γ

В точке \vec{O} на линии Γ аппроксимируем стыковочные условия (3). Решение u терпит излом и не разлагается в ряд Тейлора в окрестности \vec{O} , но такое разложение существует с каждой стороны от Γ . В системе координат (\vec{n}, \vec{s}) около \vec{O} , где орт \vec{s} направлен по касательной к Γ , а орт \vec{n} — по нормали внутрь G_a , получим:

$$u(s, n) = \begin{cases} \sum_{i+j \leq 4} a_{ij}(s)^i(n)^j + o(r^4) & \text{в } G_a, \\ \sum_{i+j \leq 4} b_{ij}(s)^i(n)^j + o(r^4) & \text{в } G_b. \end{cases}$$

Из (3а) получаем при всех j : $a_{0j} = b_{0j}$, из (3б): $\vartheta_- a_{1j} = \vartheta_+ b_{1j}$. Поэтому используем тестовые функции u (тестовые f получаем, применяя оператор L), для обеспечения 4-го порядка: $1, s^1, s^2, s^3, s^4, \vartheta(-n)n, \vartheta(-n)sn, \vartheta(-n)sn^2, \vartheta(-n)sn^3, n^2, s^1n^2, s^2n^2, n^3, sn^3, n^4, \mathbf{sign}(n)n^2, \mathbf{sign}(n)s^1n^2, \mathbf{sign}(n)s^2n^2, \mathbf{sign}(n)n^3, \mathbf{sign}(n)sn^3, \mathbf{sign}(n)n^4$. В точках шаблона, попавших на Γ , правая часть f не определена, поэтому соответствующие коэффициенты q в (4) нулевые.

II.3 Аппроксимация в точках излома Γ

Для аппроксимации стыковочных условий (3) в вершине треугольника G_a перейдем в полярную систему координат (r, ϕ) . Коэффициент ϑ разрывен. Метод разделения переменных для построения собственных функций для задачи на плоскости с неоднородным сектором со скачком коэффициента на Γ не применим. Поэтому в качестве тестовых используются обобщенные собственные функции, которые найти проще:

$$L[Y] = \begin{cases} \mu\vartheta_+ Y & \text{в } G_a, \\ \mu\vartheta_- Y & \text{в } G_b \end{cases} \quad (6)$$

при условиях стыковки. Здесь переменные разделяются: $Y = A(\phi)B(r)$, и из (6) следуют два независимых дифференциальных уравнения на функции A и B :

$$\frac{\partial}{\partial \phi}(\vartheta(\phi) \frac{\partial A}{\partial \phi}) = -\vartheta(\phi)\lambda A, \quad \lambda = \text{const}, \quad (7)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial B}{\partial r} \right) - B \frac{\lambda}{r^2} + \mu B = 0 \quad (8)$$

Физическое решение уравнения Бесселя (8) — функция Бесселя первого рода $\mathbf{J}_{\sqrt{\lambda}}(\mu r)$. Общее решение гармонического уравнения (7):

$$A(\phi) = \begin{cases} C_{1+} \sin(\sqrt{\lambda}\phi) + C_{2+} \cos(\sqrt{\lambda}\phi) & \phi \in [0, \alpha], \\ C_{1-} \sin(\sqrt{\lambda}\phi) + C_{2-} \cos(\sqrt{\lambda}\phi) & \phi \in [\alpha - 2\pi, 0]. \end{cases} \quad (9)$$

Из стыковочных условий (3) находим допустимые значения индекса $\sigma = \sqrt{\lambda}$. Обобщенные собственные функции вида $A_\sigma(\phi)\mathbf{J}_\sigma(\mu r)$ используем в качестве тестовых для построения компактной схемы.

Шаблон для верхнего угла G_a см. Рис. 3. Для хорошей аппроксимации функций A_σ углы между направлениями из вершины на приграничные точки должны быть достаточно малы, поэтому приграничные точки отдаляем вдоль ребра от угла.

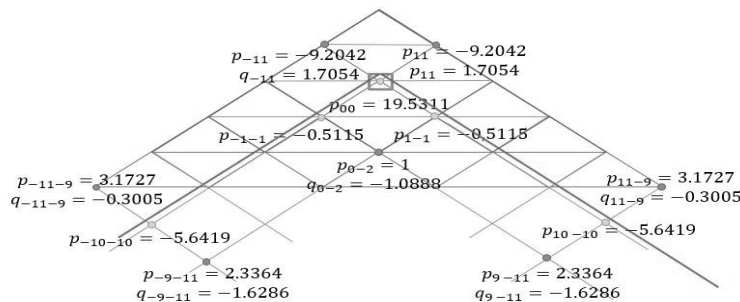


Рис. 3. Шаблон для верхнего угла. Численные значения рассчитаны для параметров (5)

III Результаты

Для проверки точности схемы вычислялось эталонное решение ($U_{N'}$) на мелкой сетке с числом шагов на основании равным $N' = 800$. Затем выбирались более грубые подсетки с числом шагов на основании $N_k = 25 \cdot 2^i, i = 1, 2, 3, 4, 5$, и вычислялись решения U_{N_k} . Погрешность схемы определяется по формуле: $\|U_{N'} - U_{N_k}\|_{L_1}$ (средняя разность решений на грубой сетке). Порядок схемы определялся по зависимости погрешности от N . Если схема обеспечивает четвертый порядок, то её погрешность убывает как N^{-4} . Из Рис. 4 видно, что порядок схемы пока между первым и вторым, а четвертого пока достичь не удалось. На Рис. 5 показаны изолинии решения уравнения (1) при $f \equiv 1, u|_{\partial G} = 1$.

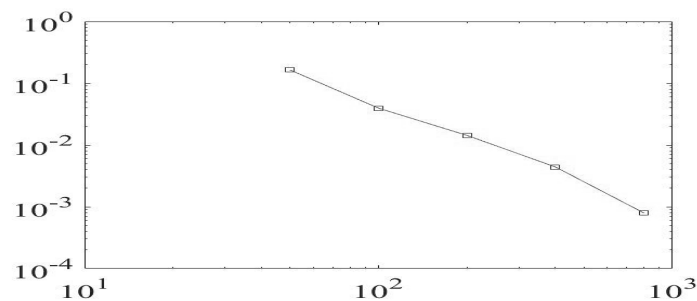


Рис. 4. Зависимость погрешности схемы от числа точек на основании N при $\vartheta_+ = 1.3, \vartheta_- = 1, \alpha = 0.4$

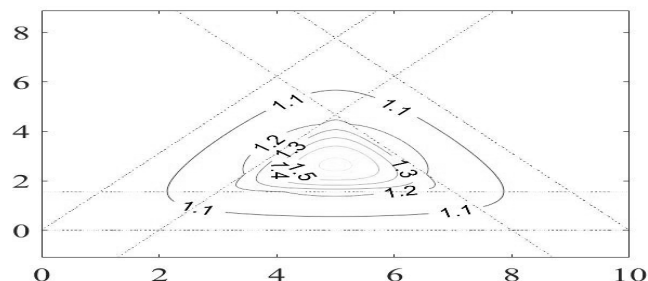


Рис. 5. Изолинии решения уравнения Пуассона при $N = 800$ при $\vartheta_+ = 10, \vartheta_- = 1, \alpha = 1$

Литература

1. Гордин В. А., Цымбалов Е. А. Компактная разностная схема для дифференциального уравнения с кусочно-постоянным коэффициентом. Математическое моделирование. 2017, т. 29, №2, стр.16–28.
2. Гордин В.А. Математика, компьютер, прогноз погоды и другие сценарии математической физики. — 2-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013, 628с.

УСЛОВИЯ L^2 -ДИССИПАТИВНОСТИ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ ЯВНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ С РЕГУЛЯРИЗАЦИЕЙ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ БАРОТРОПНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ¹

Ломоносов Т.А.

Высшая школа экономики, Москва

Рассматривается система многомерных уравнений баротропной газовой динамики с кинетической (квазигазодинамической) регуляризацией, линеаризованная на постоянном решении с произвольной фоновой скоростью [1, 2]. Для данной системы выписываются явные двухслойные по времени и симметричные по пространству разностные схемы. С помощью спектрального метода выводятся как необходимые, так и достаточные условия L^2 -диссипативности решений задачи Коши для указанных разностных схем. Они даны в зависимости от параметров схемы и фонового числа Маха. Анализируется различный выбор параметра регуляризации τ в зависимости от шагов сетки по разным координатам. Результаты и техника анализа существенно развивают соответствующие для 1D случая [3]. Теоретические результаты по устойчивости сопоставляются с результатами численных экспериментов в 2D случае.

Литература

1. Злотник А.А., Четверушкин Б.Н. О параболичности квазигазодинамической системы уравнений, ее гиперболической 2-го порядка модификации и устойчивости малых возмущений для них // ЖВМиМФ. 2008. Т. 48. № 3. С. 445–472.
2. Злотник А.А. Энергетические равенства и оценки для баротропных квазигазо- и квазигидродинамических систем уравнений // ЖВМиМФ. 2010. Т. 50. № 2. С. 325–337.
3. Злотник А.А., Ломоносов Т.А. Условия L^2 -диссипативности линеаризованных явных разностных схем с регуляризацией для уравнений 1D баротропной газовой динамики // ЖВМиМФ. 2019. Т. 59. № 3. С. 128-140.

¹Результаты настоящей работы получены совместно с А.А. Злотником. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ, проект 19-11-00169.

РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОТОМОГРАФИИ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИ СЛОЖНЫХ ОБЛАСТЯХ¹

Мариненко А.В.

*Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А.
Трофимука СО РАН, Новосибирск*

Введение

Современное состояние электротомографии имеет заметный перекос в сторону практики. На рынке программного обеспечения (ПО), решающего задачи инверсии, крепко обосновались несколько продуктов, активно используемых учеными со всего мира. Исходный код в этих программах является закрытым, а многие алгоритмические шаги выполняются в автоматическом режиме без возможности повлиять на них со стороны пользователя. Справедливости ради, следует отметить, что в большинстве случаев эти программы успешно справляются со своей задачей, а их регулярное обновление позволяет решать все более сложные задачи. Однако не редки случаи, когда автоматизация дает сбой, а результаты инверсии имеют существенные отличия для рядом стоящих профилей исследования или для программ от разных компаний. Как быть в этом случае? Каким результатам доверять и как их интерпритировать, если мы часто даже не знаем теоретической базы, заложенной в код программы? В данной работе представлен программный комплекс (ПК) DiInSo², который разрабатывается с целью дать большую свободу исследователю при использовании алгоритма инверсии, а также позволить моделировать прямые задачи высокой геометрической и физической сложности. Конечно, полноценное освоение данной программы займет какое-то время, однако итогом этого станет более четкое понимание получаемых результатов.

I Математическая модель

Математическая постановка для решения прямых задач представляет собой классический узловый метод конечных элементов на постоянном токе [1], а для решения обратных задач за основу была взята работа [2]. Такой выбор обосновывается возможностью использования треугольных и тетраэдральных сеток разбиения, которые позволяют задавать области практически

¹Работа выполнена при финансовой поддержке проекта ФНИ №0331-2019-0007.

²<http://geoelectriclab.com/products/winsolver>

неограниченной геометрической сложности. Остановимся на этих постановках подробнее. Пусть на питающих электродах (А и В) электротомографической установки (рис. 1) задается постоянная разность потенциалов, либо значение стекающего поверхностного тока.

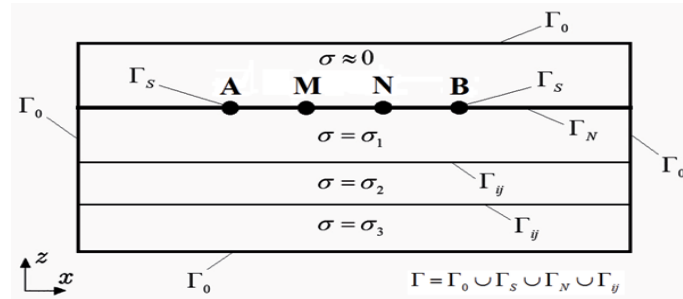


Рис. 1. Сечение X0Z расчетной области моделирования с электротомографической установкой АВМN.

Рассмотрим только первый тип возбуждения. В случае стекающего поверхностного тока указанные далее уравнения и формулы выводятся похожим образом. Определим напряженность электрического поля в среде при заданной постоянной разности потенциалов на питающих электродах. Предположим, что верхнее полупространство является воздухом с электропроводностью, близкой к нулю (рис. 1). Нижнее проводящее полупространство будем считать многослойным. Допускается наличие неоднородностей как в верхнем, так и в нижнем полупространстве. Введем правостороннюю декартову систему координат. Уравнение плоскости, являющейся дневной поверхностью $Z = 0$. Ось Z направлена вверх. Каждый из слоев и неоднородностей характеризуется значениями удельной электропроводности σ (См/м), магнитной μ (Гн/м) и диэлектрической ϵ (Ф/м) проницаемости. Будем искать значения электрического потенциала во всех точках области моделирования. Запишем систему уравнений Максвелла в стационарном режиме [3]:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E} + \vec{J}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0. \quad (4)$$

Здесь \vec{E} — напряженность электрического поля (В/м), \vec{D} — электрическая индукция (Кл/м³); \vec{H} — напряженность магнитного поля (А/м); \vec{B} — магнитная индукция (Тл); \vec{J} — плотность стороннего поверхностного тока (А/м²). Введем уравнения состояния: $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$. Введем скалярный электрический потенциал φ (В). Из (1) следует, что:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (5)$$

Граница расчетной области $\partial\Omega$ (рис. 2) совпадает с Γ_0 , на которой искомые значения близки к нулю. Если среда выше границы <земля-воздух> Γ_N не содержит проводящих объектов, верхняя граница расчетной области $\partial\Omega$ представляет собой объединение Γ_N и Γ_S . На Γ_N задаются условия непротекания для нормальной компоненты плотности тока:

$$\vec{n} \cdot \vec{J} \Big|_{\Gamma_N} = \vec{n} \cdot \sigma \vec{E} \Big|_{\Gamma_N} = \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_N} = 0,$$

где \vec{n} — единичная внешняя нормаль к границе Γ_N .

На границе <электрод-среда> Γ_S зададим значение потенциала:

$$\varphi \Big|_{\Gamma_S} = \varphi_0.$$

Функция φ_0 на участках границы Γ_S , соответствующих расположению питающих электродов, равна заданной разности потенциалов. Например, при разности потенциалов равной $2b$, функция может быть задана следующим образом:

$$\varphi_0 = \begin{cases} b, & \text{на } \Gamma_S^A, \\ -b, & \text{на } \Gamma_S^B. \end{cases} \quad (6)$$

На границах Γ_{ij} , разделяющих подобласти с разной удельной электропроводностью, задаются условия сопряжения для электрического поля \vec{E} :

$$\left[\vec{n} \times \vec{E} \right]_{\Gamma_{ij}} = 0,$$

$$\left[\vec{n} \cdot \sigma \vec{E} \right]_{\Gamma_{ij}} = 0.$$

Эти условия определяют непрерывность потенциала φ и его нормальной производной на границах Γ_{ij} :

$$[\varphi]_{\Gamma_{ij}} = 0,$$

$$\left[\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_{\Gamma_{ij}} = 0,$$

где \vec{n} — единичная внешняя нормаль к Γ_{ij} .

Таким образом, можно сформулировать следующую краевую задачу:

$$-\operatorname{div} \sigma \operatorname{grad} \varphi = 0, \quad \text{в } \Omega = \bigcup_i \Omega_i, \quad (7)$$

$$\varphi \Big|_{\Gamma_S} = \varphi_0, \quad (8)$$

$$\varphi \Big|_{\Gamma_0} = 0, \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\Gamma_N} = 0, \text{ при отсутствии объектов выше границы } \langle \text{земля-воздух} \rangle, \quad (10)$$

$$[\varphi]_{\Gamma_{ij}} = 0, \quad (11)$$

$$\left[\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_{\Gamma_{ij}} = 0. \quad (12)$$

Запишем вариационную формулировку для этой краевой задачи. Введем следующие пространства:

$$H^1 = \{ \varphi \in L^2(\Omega) \mid \text{grad} \varphi \in \mathbf{L}^2(\Omega) \},$$

$$H_0^1 = \{ \varphi \in H^1(\Omega), \varphi|_{\partial \varphi} = 0 \},$$

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv \, d\Omega + \int_{\Omega} \text{grad} u \cdot \text{grad} v \, d\Omega,$$

$$\|u\|_{H^1}^2 = \int_{\Omega} u^2 \, d\Omega + \int_{\Omega} (\text{grad} u)^2 \, d\Omega.$$

Вариационная формулировка в форме Галеркина имеет вид: *Найти* $\varphi \in H^1(\Omega)$ *такое, что* $\varphi - \varphi_0 \in H_0^1(\Omega)$ *и* $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \sigma \text{grad} \varphi \cdot \text{grad} v \, d\Omega + \int_{\Gamma_0} \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n_0} v \, d\Gamma + \int_{\Gamma_N} \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n} v \, d\Gamma + \\ & + \int_{\Gamma_{ij}} \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n_i} v \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{ji}} \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n_j} v \, d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

где \vec{n}_0 — единичная внешняя нормаль к Γ_0 , \vec{n}_i — единичная внешняя нормаль к Γ_{ij} , \vec{n}_j — единичная внешняя нормаль к Γ_{ji} , $\vec{n}_i = -\vec{n}_j$.

С учетом (9)-(12), вариационное уравнение (13) примет вид:

$$- \int_{\Omega} \sigma \text{grad} \varphi \cdot \text{grad} v \, d\Omega = 0. \quad (14)$$

Вариационная задача может быть решена с помощью узлового метода конечных элементов путем построения конечно-элементного аналога вариационного уравнения (14). Моделируемая область и объекты в ней разбиваются на конечные элементы определенного типа. На них задаются базисные функции [4]. В работе использовались линейные базисные функции на нерегулярном тетраэдральном разбиении. То есть на отдельном конечном элементе функция определена только в вершинах тетраэдра [5]. Сетка при таких разбиениях сгущается в тех областях, где расположены влияющие на моделирование объекты, и где наибольшие пространственные изменения электрического поля. Используя выбранный базис, получаем систему

линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Для ее решения использовался метод сопряженных градиентов (МСГ) [6] в параллельной реализации для центральных (CPU) или графических (GPU) процессоров. Решением СЛАУ являются значения потенциала φ в узлах сетки. Значения векторного электрического поля \vec{E} при необходимости могут быть вычислены в соответствии с (5). Далее все измеренные сигналы трансформируются в кажущиеся сопротивления (КС) ρ_k (Ом·м) [7]:

$$\rho_k = k \frac{U_{MN}}{I_{AB}}, \quad (15)$$

где U_{MN} — измеряемая разность потенциалов (В) между электродами М и N, I_{AB} — ток (А) в линии АВ, а $k = \frac{2\pi}{\frac{1}{r_{AM}} - \frac{1}{r_{BM}} - \frac{1}{r_{AN}} + \frac{1}{r_{BN}}}$ — коэффициент установки (м). Расположения электродов установки в пространстве и значения КС, в общем случае, являются входными данными для решения задачи инверсии, которое основано на схеме Гаусса-Ньютона, описанной далее.

Пусть \vec{m} — вектор из M параметров $\vec{m} = (m_1, m_2, \dots, m_M)^T$ [2]. Каждый m_j описывает физические свойства отдельного тетраэдра сетки или функции на нем. Так как величины удельных сопротивлений ρ_j (Ом·м) должны быть положительными, m_j может быть определен как $m_j = \log \rho_j$. Аналогичным образом определяются логарифмы измеренных КС: $\log(\rho_{ki}) = d_i$, которые используются для построения вектора данных $\vec{d} = (d_1, d_2, \dots, d_D)^T$. Данные ассоциированы с ошибками измерений ε_i , которые используются в качестве весового параметра. Используя l_2 -норму взвешенной невязки между данными \vec{d} и откликом модели $\vec{f}(\vec{m}) = (f_1(\vec{m}), f_2(\vec{m}), \dots, f_D(\vec{m}))$, будем минимизировать функционал данных Φ_d , определенный как:

$$\Phi_d(\vec{m}) = \sum_{i=1}^D \left| \frac{d_i - f_i(\vec{m})}{\varepsilon_i} \right|^2 = \left\| \mathbf{D} (\vec{d} - \vec{f}(\vec{m})) \right\|_2^2,$$

где $\mathbf{D} = \text{diag}(1/\varepsilon_i)$.

Если ошибки измерений не получены в ходе измерений, они оцениваются приблизительно по принципу «чем больше разнос электродов установки, тем выше ошибка измерений». Более точно метод оценки весового параметра ε_i описан, например, в работе [8].

Поскольку минимизация Φ_d представляет собой некорректную задачу, необходимо использовать дополнительный модельный функционал Φ_m [9]. Φ_m взвешивается параметром регуляризации λ , а исходная задача преобразуется в минимизацию функционала следующего вида:

$$\Phi = \Phi_d + \lambda \Phi_m \rightarrow \min. \quad (16)$$

Φ_m определяется как квадратичная норма произведения матрицы \mathbf{C} и разности между моделью \vec{m} и стартовой моделью \vec{m}^0 :

$$\Phi_m(\vec{m}) = \left\| \mathbf{C} (\vec{m} - \vec{m}^0) \right\|_2^2.$$

Элементы матрицы \mathbf{C} определяются из построенной тетраэдральной сетки по простому правилу: если у двух тетраэдров i и j имеется общая грань-треугольник g , то $C_{g,i} = -1$ и $C_{g,j} = +1$, где вместо единиц можно использовать площадь треугольника. Остальные элементы матрицы являются нулями. Таким образом, $\mathbf{C} \in R^{B \times M}$ — разреженная матрица с $2M$ ненулевыми элементами, где B — число граней.

Как ясно из формул выше, модельный вектор \vec{m} обновляется в ходе итерационной процедуры решения задачи инверсии: $\vec{m}^{k+1} = \vec{m}^k + \tau^k \Delta \vec{m}^k$, где τ — параметр длины шага, а k — номер итерации.

Применив схему Гаусса-Ньютона для минимизации (16) получим выражение вида [10]:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{S}^T \mathbf{D}^T \mathbf{D} \mathbf{S} + \lambda \mathbf{C}^T \mathbf{C}) \Delta \vec{m}^k = \\ & = \mathbf{S}^T \mathbf{D}^T \mathbf{D} (\vec{d} - \vec{f}(\vec{m}^k)) - \lambda \mathbf{C}^T \mathbf{C} (\vec{m}^k - \vec{m}^0), \end{aligned} \quad (17)$$

где \mathbf{S} — матрица Якоби.

Элементами матрицы Якоби \mathbf{S} являются значения чувствительности, определяемые как частные производные откликов модели f_i от параметров модели m_j :

$$S_{i,j}(\vec{m}^k) = \frac{\partial f_i(\vec{m}^k)}{\partial m_j}.$$

Расчет матрицы Якоби в явном виде является чрезвычайно затратной процедурой, поэтому часто прибегают к ее упрощению. Например, из теоремы взаимности [11] можно вывести аналитическое выражение для чувствительности импеданса Z по отношению к изменению электропроводности $\delta\sigma$:

$$\delta Z = -\delta\sigma \iiint_{\Omega_i} \frac{\nabla u^S \nabla u^R}{I^S I^R} d^3r,$$

где Ω_i — область, где измеряется чувствительность; u^S — потенциал, порожденный токовыми электродами; u^R — потенциал, полученный при замене токовых и приемных электродов. Соответствующие токи обозначены как I^S и I^R .

В соответствии с формулировками [12, 13]:

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma^{(e)}} = -\frac{1}{\sigma^{(e)} I} \sum_i \sum_j S_{i,j}^{(e)} u_i^S u_j^R, \quad (18)$$

где чувствительность при изменении электропроводности $\sigma^{(e)}$ на конечном элементе получена суммированием произведений потенциалов и элементов матрицы жесткости $\mathbf{S}^{(e)}$, которая известна по методу конечных элементов [5].

Система уравнений (17) должна решаться на каждом шаге итерации. В отличие, например, от рентгеновской томографии матрица \mathbf{S} в нашем случае будет плотной. Для больших задач иногда может быть полезным исключить из \mathbf{S} малые абсолютные значения, тем самым приведя \mathbf{S} к разреженному виду. Для решения уравнения (17) используется адаптированный МСГ, называемый CGLSCD и учитывающий весовые параметры данных и модельные ограничения [14]. Дополнительное улучшение алгоритма может быть получено за счет процедуры предобуславливания [15]. Результатом решения СЛАУ (17) является обновление искомой модели $\Delta\vec{m}^k$.

Важным вопросом является правильный выбор параметра регуляризации λ . Задавая данный параметр мы должны пытаться найти определенный компромисс между соответствием данных об удельных сопротивлениях и геометрической точностью подобластей. Малые значения λ дают более четкую геометрию, но происходит потеря точности значений сопротивлений. Большие значения λ , наоборот, сильно сглаживают геометрию, часто давая существенно увеличенные размеры подобъектов среды, однако значения сопротивлений здесь более точные. Очень важно, чтобы пользователь ПО понимал смысл параметра регуляризации λ и задавал его значения исходя из решаемой задачи. В программе DiInSo, кроме ручного задания параметра регуляризации, можно использовать и автоматический подбор λ методом так называемых L-кривых [16]. Математического обоснования эффективности данного метода не существует, а его смысл состоит в том, чтобы выбранное значение λ обеспечивало примерно равнозначный вклад функционалов Φ_d и Φ_m в итоговое решение. Часто это соответствует оптимальному значению λ , однако далеко не всегда. С другой стороны, при всех недостатках данного метода, не существует сколько-нибудь достойной ему альтернативы для численной реализации, кроме методов подбора, которые увеличивают время решения задачи инверсии в десятки раз.

После получения решения $\Delta\vec{m}^k$, необходимо провести обновление модели по уже описанной выше формуле: $\vec{m}^{k+1} = \vec{m}^k + \tau^k \Delta\vec{m}^k$. Параметр длины шага τ^k определяется таким, чтобы предотвратить переход модели в состояние нелинейности. Чтобы избежать прямых расчетов множества возможных значений τ_i^k , используется линейная интерполяция между старым и новым модельным откликом:

$$\vec{f}(\vec{m}^k + \tau\Delta\vec{m}^k) \approx \tilde{\mathbf{f}}(\tau) = \mathbf{f}(\mathbf{m}^k) + \tau \left[\vec{f}(\vec{m}^k + \Delta\vec{m}^k) - \vec{f}(\vec{m}^k) \right],$$

которая дает слабое приближение, но достаточное для получения соответствующей длины шага [14]. Параметр τ^k в данном подходе определяется так, чтобы $\Phi_d(\tilde{\mathbf{f}}(\tau) + \lambda\Phi_m(\tau))$ минимизировался. После обновления модели прямой отклик $\vec{f}(\vec{m}^{k+1})$ уже вычисляется точно.

Итерационная процедура повторяется пока не будет достигнут критерий останова, которым является либо стагнация функционала Φ , либо достижение допустимого уровня ошибки, который в DiInSo равен 1%. Пользователь

должен понимать, что при решении сложных задач инверсии выход из итерационной процедуры по критерию стагнации происходит значительно чаще и поэтому не будет лишним обратить внимание на уровень точности, достигнутый в ходе решения и, возможно, провести корректировку исходных параметров задачи инверсии или даже входных данных, если точность недостаточная.

II Численный эксперимент

Электротомография часто выполняется с использованием равномерной площадной системы «возбуждения-измерения» (рис. 2).

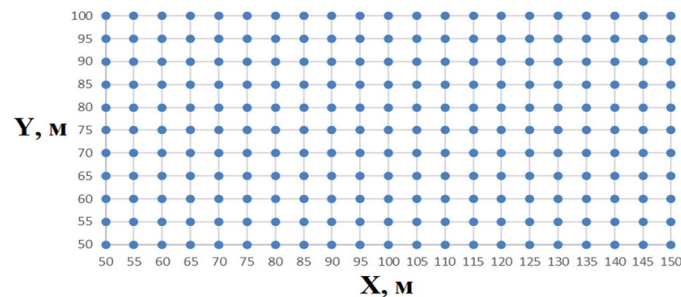


Рис. 2. Равномерная площадная система «возбуждения-измерения». Точками обозначено расположение электродов.

Рассмотрим в качестве примера электротомографию на кустовых площадках с эксплуатационными газовыми скважинами [17]. На площадке в большом количестве присутствуют надземные и подземные металлические конструкции: трубы, сваи, обсадные колонны. Модель типичной площадки, основных металлических конструкций и положение возможных относительно низкоомных зон растепления показана на рис. 3.

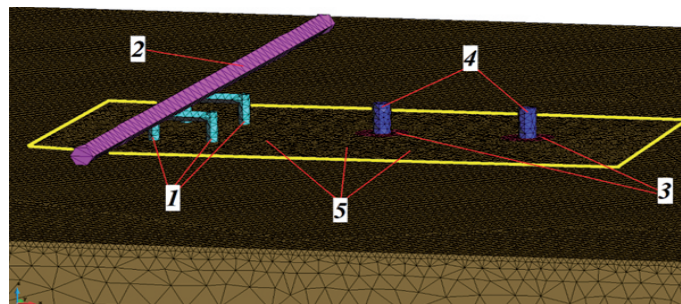


Рис. 3. Модель кустовой площадки с двумя скважинами (1 — металлические опоры, вбитые в землю; 2 — металлическая труба, расположенная на опорах; 3 — зоны растепления вблизи скважин; 4 — скважины с металлической обсадкой; 5 — область, где проводятся электротомографические исследования).

Многие ПК предоставляют возможность моделировать прямые задачи электротомографии, однако в них предполагается, что объекты выше границы «земля-воздух» не оказывают эффекта на конечный результат в следствии очень низкой электропроводности воздуха. С данным фактом сложно спорить, за исключением тех случаев, когда сильно проводящие сплошные или составные объекты частично находятся в земле, а частично в воздухе, образуя единую гальваническую систему. Именно эту картину мы можем наблюдать в нашем случае. При проектировании работ по электротомографии сначала выбирается тип зондирующей установки. Наиболее распространенной является установка Веннер-Альфа [7]. Она состоит из четырех равноудаленных электродов — двух питающих (А и В) и двух измерительных (М и N). Рассмотрим профиль в непосредственной близости от скважин и металлических опор, частично погруженных в землю. С помощью программы DiInSo решим численно прямую задачу для одного из набора положений установки Веннер-Альфа. Металлические опоры диаметром 2 м расположены в центрах следующих ячеек (рис. 2): (65-70 м; 60-65 м); (75-80 м; 60-65 м); (65-70 м; 80-85 м); (75-80 м; 80-85 м). Они заглублены на 10 м и выступают над дневной поверхностью на высоту 6 м. Диаметр лежащей на опорах трубы — 4 м, ее длина ограничена областью моделирования. Обсадные трубы диаметром 3 м расположены в центрах следующих ячеек: (100-105 м; 75-80 м); (125-130 м; 75-80 м). Они заглублены на 50 м и выступают над дневной поверхностью на высоту 6 м. Предполагаемые зоны растепления представляют собой горизонтальные полусферы радиусом 4.5 м. Питающие электроды с единичным током (± 1 А) и соответствующие приемные электроды расположены в точках профиля $Y = 80$ м сразу под дневной поверхностью $Z = 0$, то есть в крест простирания самой большой металлической трубы, лежащей на П-образных опорах, и рядом с обсадными трубами скважин. Электропроводность пород примем равной 0.001 См/м, металла — 7690000 См/м, зон растепления — 0.01 См/м, воздуха — 10^{-12} См/м. Результаты моделирования прямой задачи представлены на рис. 4, визуализация выполнена непосредственно в программе DiInSo. Условные глубины на рис. 4 изображены по простому правилу — «половина разноса установки» и не должны рассматриваться как истинные глубины метода электроразведки, которые определяются в ходе алгоритма инверсии из формулы расчета чувствительности (18).

Из рис. 4 видно, что на разрезе КС металлические опоры сливаются в единый «объект», зоны растепления выделяются достаточно четко, в то время как скважины образуют аномалию в области между ними на условных глубинах примерно от 10 до 25 м. При этом влияние длинной трубы остается минимальным.

Теперь рассмотрим ортогональный предыдущему профилю $X = 70$ м. Он проложен в непосредственной близости от П-образных опор и параллелен трубе, лежащей на них (рис. 3). На рис. 5 показаны результаты моделирования на таком профиле.

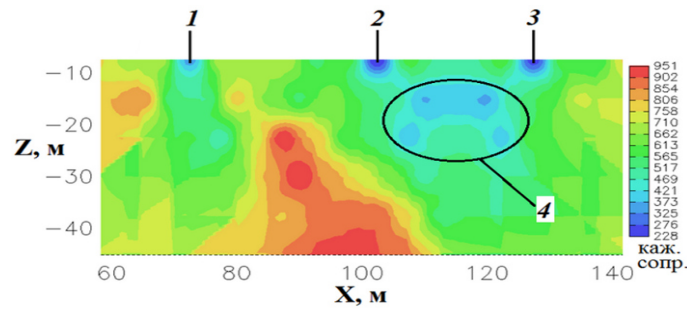


Рис. 4. Разрез КС ($Y = 80$ м, $Z = 0$) с разным положением установки Веннер-Альфа (1 — металлические опоры, 2 — левая скважина с зоной растепления, 3 — правая скважина с зоной растепления, 4 — аномалия).

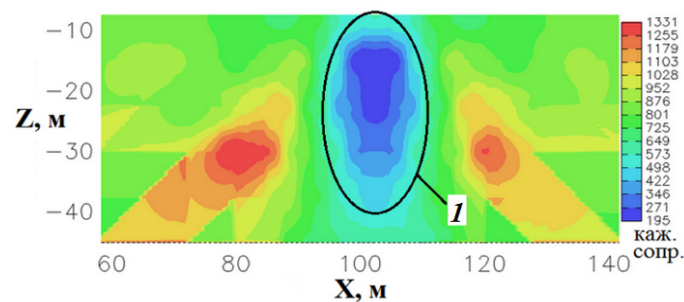


Рис. 5. Разрез КС ($X = 70$ м, $Z = 0$) с разным положением установки Веннер-Альфа (1 — аномалия).

На разрезе видна низкоомная аномалия, обусловленная П-образными опорами. Однако ее условная глубина (от 10 до 40 м) существенно больше, чем в предыдущем случае, хотя сами П-образные опоры расположены не так глубоко, как скважины. Эта аномалия характеризуется такими большими размерами по двум причинам. Во-первых, четыре П-образные опоры сливаются в одну. Во-вторых, значительно усиливается влияние трубы, расположенной на П-образных опорах, поскольку она на всем профиле находится над питающими и измерительными электродами. Данный эксперимент показывает, что учет объектов выше границы «земля-воздух» при решении прямой задачи может объяснить возможные аномалии ниже этой границы, возникающие в ходе электротомографических исследований.

Однако не нужно думать, что аномалии возникают исключительно из-за естественных помех в зоне наблюдений. Бывает и такое, что сам пользователь ПО ухудшает результаты решения задачи инверсии, не понимая особенностей работы алгоритма. Рассмотрим очень простую на первый взгляд задачу с однородной средой и единственной обсаженной металлической трубой скважиной в центре области моделирования. Все размеры и электрофизические параметры идентичны предыдущей модели. Глубина скважины увеличена до 100 м. Число возможных расположений установки Веннер-Альфа на профиле также увеличено с 63 до 392 в соответствии с возросшей глубиной скважины. Разрез КС показан на рис. 6.

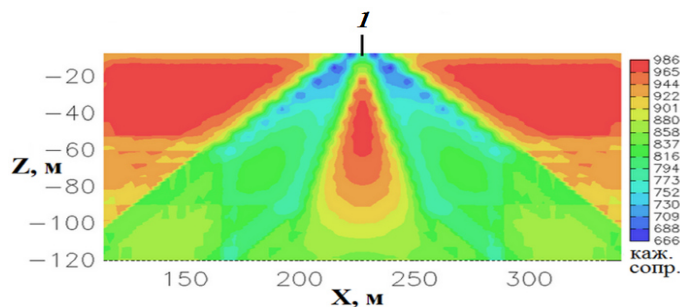


Рис. 6. Разрез КС ($Y = 80$ м, $Z = 0$) для одиночной скважины в центре области; (1 — скважина).

Одиночная обсаженная скважина порождает аномалию сложного строения. Ее центральную часть занимает высокоомная каплевидная область, погруженная в трапецевидную область средних значений КС. В верхней части разреза вблизи скважины выделяются наклонные полосы низких величин КС. Наличие трапецевидальной аномалии связано с тем, что обсадная металлическая труба сама становится источником тока, который с ее поверхности стекает в окружающую среду. Теперь используем полученные значения КС для решения задачи инверсии. На первом этапе выбор параметра регуляризации будет осуществляться в автоматическом режиме с помощью метода L-кривых, описанного выше. Результаты решения задачи инверсии представлены на рис. 7, визуализация выполнена в сторонней программе VisIt³.

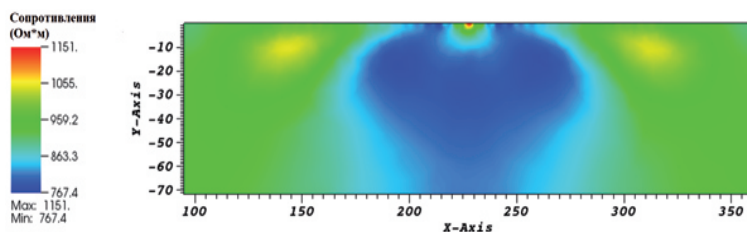


Рис. 7. Результат решения задачи инверсии при автоматическом подборе параметра регуляризации методом L-кривых.

Алгоритм инверсии с указанными параметрами безошибочно определяет наличие скважины в центре области, однако боковые помехи, создаваемыми эффектом стекающего тока, никуда не исчезают. В результате мы наблюдаем как скважина диаметром 3 м создает помеху величиной примерно 100 м. Другими словами, подобласти, расположенные до 50 м левее и правее скважины, будут определяться со значительными искажениями, либо не определяться вовсе. Уменьшить влияние помехи можно уменьшив параметр регуляризации. Как сказано выше, это может привести к потере точности определяемых удельных сопротивлений подобластей, однако помеха шириной 100 м создает еще большую неточность значений сопротивлений внутри этой области. Результаты для $\lambda = 1$ показаны на рис. 8.

³<https://visit.llnl.gov>

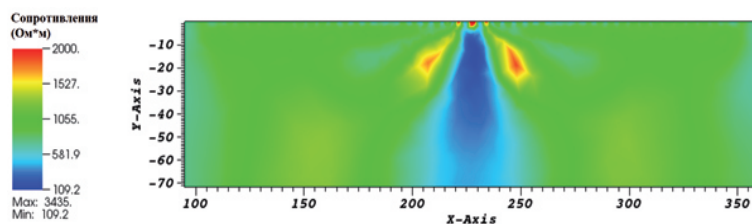


Рис. 8. Результат решения задачи инверсии при ручном подборе параметра регуляризации.

С помощью ручного подбора числа λ размер помехи удалось уменьшить до ~ 20 м в верхней зоне исследований и до ~ 40 м в нижней зоне. Еще большего уменьшения влияния скважины можно добиться, задав ее геометрию и электрические свойства непосредственно в решаемой модели. Данная возможность присутствует в ПК DiInSo, но в большинстве случаев у исследователя отсутствует подробная информация об исследуемом регионе.

Перейдем к последнему вычислительному эксперименту, цель которого показать важность правильного построения геометрии области решаемой задачи. Рассмотрим задачу электротомографии с расположением приемных и питающих электродов установки Веннер-Альфа на дне нескольких необсаженных скважин (рис. 9).

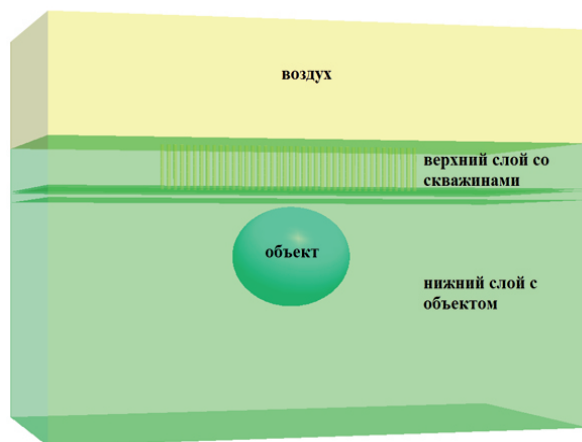


Рис. 9. Трехмерная модель области моделирования прямой задачи электротомографии.

Глубина скважин — 40 м, диаметр скважин — 3 м, расстояния между центрами скважин и, соответственно, электродами — 5 м. Сама среда представляет из себя два слоя, первый из которых имеет мощность 50 м от поверхности земли и удельное сопротивление 10 Ом·м, второй слой находится глубже, уходит в бесконечность и имеет сопротивление 100 Ом·м. Таким образом, относительно электродов, находящихся на дне скважин, первый слой имеет мощность лишь 10 м. Пусть внутри второго слоя находится объектом с очень малым сопротивлением близким к нулю, имеющим форму шара диаметром 90 м, верхний край которого находится на глубине 55 м

от поверхности земли или 15 м от электродов. Значения удельных сопротивлений подобластей модели специально выбраны таким образом, чтобы усложнить обнаружение шарообразного объекта. Обратим внимание, что несмотря на внешнюю схожесть с задачами скважинной электротомографии, представленная задача таковой не является, поскольку в скважинном методе электроды располагаются по всей глубине скважины и исследования проводятся преимущественно между скважинами, тогда как в нашем случае целью поиска является объект ниже скважин. Другими словами, это классическая задача электротомографии с топографическим эффектом. Основной сложностью данной постановки для современных ПК решения задач электротомографии является наличие резких перепадов в 90 градусов по глубине, требующих создания сильно неструктурированной сетки, использование которой прямо запрещено в широко разрекламированных ПК в силу использования в их моделях упрощенных сеток⁴. В ПК DiInSo, напротив, разрешено использование неструктурированных сеток, поэтому мы можем задавать области практически любой геометрической сложности. Например, для описанной задачи со скважинами треугольная сетка будет иметь вид, представленный на рис. 10.

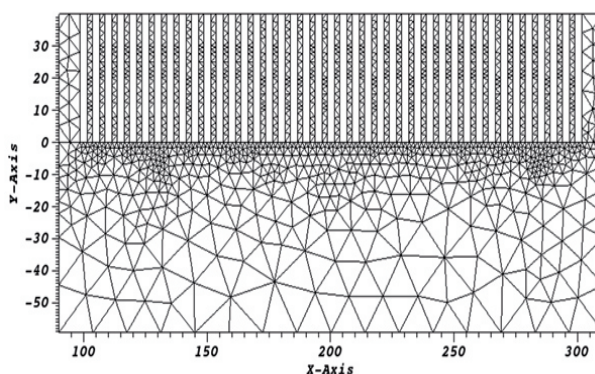


Рис. 10. Неструктурированная треугольная сетка, построенная для решения задачи инверсии в программе DiInSo.

Отсутствие возможности задавать неструктурированные сетки в других ПК заставляет пользователя идти на упрощения решаемой модели. Например, в нашем случае мы можем попробовать проигнорировать наличие сложной геометрии и решить задачу так, как если бы электроды находились не на дне скважин, а на поверхности земли. На рис. 11 представлены результаты решения задачи инверсии для упрощенной и естественной моделей. Область выше электродов убрана для удобства восприятия, так как мы проводим исследование наземной, а не скважинной электротомографии.

Факт наличия объекта присутствует в том числе в упрощенной модели, однако если бы мы не знали заранее, что это объект шарообразной формы, то могли бы подумать, что в области исследования находится либо сильно вытянутый объект, либо дополнительный слой. Использование точной геометрии

⁴http://nemfis.ru/pdf/ERTLab_documentation_Russian.zip

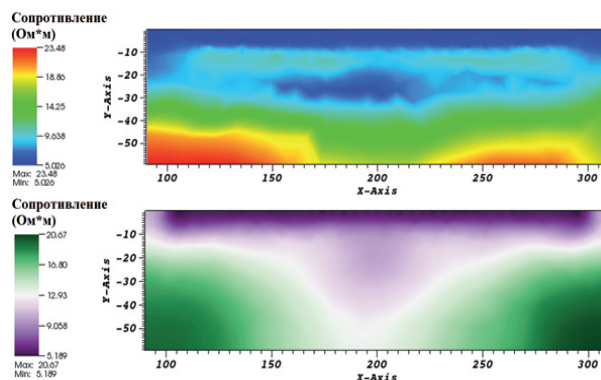


Рис. 11. Результаты инверсии для упрощенной геометрической модели (сверху) и для модели, содержащей точную геометрию области (снизу).

позволяет нам получить четкие очертания объекта. Его размеры оказываются несколько меньше реальных. Это связано с недостаточным количеством электродов или, в нашем случае, недостаточным количеством скважин, увеличение числа которых необходимо для проведения исследований на всю глубину залегания объекта. Также мы можем наблюдать заниженные значения удельных сопротивлений. Это связано с тем, что КС были рассчитаны по формуле (15), которая, вообще говоря, несправедлива для задач со сложной топографией. Для корректировки КС требуется проведение дополнительных исследований, которые находятся за рамками данной статьи и в рассмотренной работе не представляют интереса, так как влияют только на итоговые значения удельных сопротивлений, в то время как нас больше волнует геометрия подобъектов. К слову, для простой топографии с перепадами по высоте до ~ 30 градусов ПК DiInSo может выполнять перерасчет КС автоматически.

III Заключение

В статье был рассмотрен ПК DiInSo, предназначенный для решения прямых и обратных задач электротомографии. ПК был разработан на основе хорошо зарекомендовавших себя научных трудов и открытых программных кодов, включая работы автора. Особенностью DiInSo является сочетание удобства интерфейса для начинающего пользователя и гибкости настроек алгоритма инверсии для опытного пользователя. Использование треугольных и тетраэдральных сеток при моделировании позволяет не ограничивать пользователя в геометрических постановках, а возможность решать прямые задачи с объектами выше границы «земля-воздух» существенно расширяет круг допустимых задач. В качестве вычислительных примеров продемонстрированы три класса задач во многом уникальных именно для данного ПК. В первом из них показана важность учета объектов выше границы «земля-воздух», во втором — необходимость понимания теории обратных задач и невозможность решения многих проблем с помощью

«автоматики» и, наконец, в третьем — преимущество использования нерегулярных сеток для решения задач электротомографии. 32-битная полнофункциональная версия ПК DiInSo находится в свободном доступе по адресу <https://diinso.sourceforge.io> в виде установочного файла или архива.

Автор работы выражает благодарность лаборатории геоэлектрики, а также всему ИНГГ СО РАН, за помощь в отладке программы DiInSo, интересные идеи и сложные тестовые задачи.

Литература

1. *Мариненко А.В., Эпов М.И., Оленченко В.В.* Решение прямых задач электротомографии для сред с высокопроводящими неоднородностями сложной формы на примере кустовой площадки месторождения // Сибирский журнал индустриальной математики — 2019 — Т. XXII — № 1(77) — С. 63-73.
2. *Rucker C.* Advanced Electrical Resistivity Modelling and Inversion using Unstructured Discretization // Dissertation, Leipzig, 2011. — 121 p.
3. *Стрэттон Д.А.* Теория электромагнетизма. — Москва: Издательство технико-теоретической литературы, 1948 — 539 с.
4. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. — М.: Мир, 1975. — 543 с.
5. *Зенкевич О., Морган К.* Конечные элементы и аппроксимация. — М.: Мир, 1986. — 318 с.
6. *Баландин М.Ю., Шурина Э.П.* Методы решения СЛАУ большой размерности. — Новосибирск: Издательство НГТУ, 2000. — 70 с.
7. *Доброхотова И.А., Новиков К.В.* Электроразведка // Учебное пособие для студентов заочного обучения. — М.: изд-во РГГРУ, 2009. — 54 с.
8. *Friedel S.* Resolution, stability and efficiency of resistivity tomography estimated from a generalized inverse approach. // Geophys. J. Int., №153(2), 2003. — pp. 305-316.
9. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1979. Изд. 2-е. — 284 с.
10. *Park S.K., Van G.P.* Inversion of pole-pole data for 3-d resistivity structure beneath arrays of electrodes. // Geophysics, №56, 1991. — pp. 951-960.
11. *Geselowitz D.B.* An Application of Electrocardiographic Lead Theory to Impedance Plethysmography. // IEEE Trans. Biomed. Eng., BME-18(1), 1971. — pp. 38-41.

12. *Sasaki Y.* Two-dimensional joint inversion of magnetotelluric and dipole-dipole resistivity data. // *Geophysics*, №54, 1989. — pp. 254-262.
13. *Kemna A.* Tomographic inversion of complex resistivity. // PhD thesis, Ruhr-Universität Bochum, 2000. — 176 p.
14. *Gunther T.* Inversion Methods and Resolution Analysis for the 2D/3D Reconstruction of Resistivity Structures from DC Measurements. // PhD thesis, Freiberg University of Mining and Technology, 2004. — 150 p.
15. *Haber E.* Quasi-Newton methods for large-scale electromagnetic inversion problems. // *Inverse Probl.*, №21, 2005. — pp. 305-323.
16. *Johnston P.R.* Computational Inverse Problems in Electrocardiology. // WIT Press, 2001. — 304 p.
17. *Сергеев К.С., Рыжков В.И. и др.* Изучение многолетнемерзлых пород с использованием комплекса методов инженерной геофизики (на примере кустовой площадки нефтегазо-конденсатного месторождения в Западной Сибири) // *Журнал <Инженерные изыскания>*, №10-11/2015, С. 46-53.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛОМАССОБМЕНА НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА¹

Мартынова Т.С.

ЮФУ, Институт математики, механики и компьютерных наук им. Воровича И.И., Ростов-на-Дону

Введение

В работе рассмотрены численные методы моделирования конвекции и теплообмена на основе нестационарных уравнений Навье-Стокса. Частными случаями исходных уравнений являются классические уравнения идеальной (невязкой) жидкости и уравнения пограничного слоя. В силу нелинейности уравнений Навье-Стокса, наличия малого параметра при старшей производной в сочетании с пространственным характером движения и нестационарностью их можно изучать, большей частью, численно. Из различных классов задач механики вязкой жидкости, которые изучались на основе уравнений Навье-Стокса, наибольший прогресс достигнут в области конвективного тепло- и массообмена и связанных с ним приложений [1].

Численное решение - важнейший этап математического моделирования - состоит из двух главных частей: дискретизации, т.е. способа построения конечномерной модели, представляющей по существу некоторую систему алгебраических уравнений, и метода решения этой системы. Для дискретизации задачи в работе используется метод конечных разностей [2]. В методе конечных разностей для уравнений Навье-Стокса существует большой выбор различных возможностей дискретизации в зависимости от выбора зависимых переменных (скорость-давление или вихрь-функция тока), стационарных или нестационарных режимов [1].

В работе рассматривается нестационарная задача, записанная в естественных физических переменных, что дает впоследствии возможность продолжения численных исследований в трехмерном случае. Для дискретизации нестационарной задачи по времени используется неявная схема.

Однако, при любом выборе способа дискретизации системы неизбежно возникает проблема построения эффективных методов решения систем алгебраических уравнений большой размерности, к которым сводится дискретная модель. Эта проблема особенно актуальна в нестационарном случае, когда требуется многократное решение систем алгебраических уравнений на каждом дискретном шаге по времени. Выбор того или иного конкретного

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ, Базовая часть гос. задания, тема: Фундаментальные и прикл. задачи мат. моделирования №1.5169.2017/8.9 и РФФИ, грант №19-51-53013, ГФЕН-а

численного метода определяется многими факторами, из которых одним из главных является особенность данного класса задач.

Исходной для построения методов численного решения и последующего их применения является классическая система двумерных уравнений Навье-Стокса для конвекции, тепло- и массообмена, которая выводится из общих уравнений Навье-Стокса сжимаемой жидкости в предположении, что жидкость динамически и статически несжимаема, т.е. плотность ее не зависит от давления, но может зависеть от температуры и концентрации примеси [3].

В системе уравнений Навье-Стокса имеется малый параметр при старшей производной $\varepsilon = 1/Re$, где Re - число Рейнольдса, изменению которого соответствует существенное изменение гладкости решения. Это связано с появлением пограничного слоя при росте числа Re , толщина которого пропорциональна величине $1/\sqrt{Re}$.

I Постановка задачи

При выводе системы в уравнениях количества движения плотность всюду считается постоянной. Предполагаются постоянными также коэффициенты вязкости, теплопроводности, удельной теплоемкости и диффузии. При написании уравнений притока тепла и диффузии пренебрегается выделением тепла за счет вязкой диссипации и работы сил сжатия, термо- и бародиффузионными эффектами [4]. При этих предположениях уравнения движения, переноса тепла и массы неоднородной жидкости можно записать в следующем виде [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} &= -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{V} + g(\beta_T T + \beta_c c), \\ \operatorname{div}\mathbf{V} &= 0, \\ \rho C_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)T \right] &= \lambda\Delta T, \quad \frac{\partial c}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)c = D\Delta c. \end{aligned} \quad (1)$$

В этой системе уравнений искомыми являются вектор скорости \mathbf{V} , давление p , температура T , концентрация примеси c , которые зависят от пространственных координат и времени t . Параметрами являются плотность, коэффициенты кинематической вязкости $\nu = \mu/\rho$ (μ - коэффициент динамической вязкости), теплопроводности λ , диффузии D , удельной теплоемкости при постоянном давлении C_p , а также ускорение свободного падения g и коэффициенты теплового и концентрационного изменения плотности β_T и β_c .

Важной особенностью системы уравнений (1) являются так называемые граничные условия прилипания, в соответствии с которыми все компоненты скорости на твердой неподвижной стенке равны нулю:

$$\mathbf{V}_b = 0.$$

Для полей температуры T и концентрации примеси c заданы их значения на границе T_b и c_b . Кроме того, в начальный момент времени t_0 заданы значения всех искомых функций.

Между уравнениями (1) и уравнениями Навье-Стокса конвекции сжимаемой жидкости имеются промежуточные математические модели, в которых либо учитывается изменение физических свойств - вязкости, теплопроводности и диффузии, либо может быть выполнен более полный учет изменения плотности в зависимости от температуры и концентрации [1].

Моделирование течений на основе численного решения уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости сопровождается рядом трудностей математического характера. Одной из проблем при решении этой системы является нелинейность, связанная с конвективными слагаемыми в уравнениях движения, которая может приводить к появлению осцилляций решения в областях с большими градиентами. На преодоление трудностей, связанных с нелинейностью системы уравнений Навье-Стокса, были направлены основные усилия исследователей [3]. В случае сильного преобладания конвекции над диффузией происходит ухудшение решения из-за жесткости, которую вносят в систему уравнений конвективные члены, и несимметричности матрицы системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Одним из наиболее трудоемких, с точки зрения затрат машинных ресурсов, этапов вычислительной процедуры является решение СЛАУ. Современные пакеты прикладных программ обычно используют линейаризацию исходных уравнений, а для решения получаемых СЛАУ применяют методы подпространства Крылова. Несмотря на то, что данные методы хорошо зарекомендовали себя, они обладают некоторыми проблемами в случаях существенной несимметричности матрицы СЛАУ, связанной, например, с переменными коэффициентами в дифференциальных уравнениях или с использованием сложных численных краевых условий.

Для решения сильно несимметричных (неэрмитовых) СЛАУ в работе используется класс треугольных и попеременно-треугольных кососимметричных (косоэрмитовых в общем случае) итерационных методов, предложенных и исследованных в [7]- [13].

II Итерационные методы решения СЛАУ с сильно неэрмитовой (несимметричной) матрицей

Итерационные методы решения больших разреженных СЛАУ с сильно неэрмитовой (несимметричной) положительно определенной матрицей коэффициентов рассмотрены в работах [5]- [13] и др.

Рассмотрим итерационное решение большой разреженной СЛАУ

$$Av = b, \quad v, b \in \mathbb{C}^n, \quad (2)$$

где $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ - неэрмитова положительно определенная матрица.

Матрицу A системы (2) представим в виде суммы эрмитовой и косоэрмитовой частей

$$A = A_0 + A_1, \quad (3)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{2}(A + A^*), \quad A_1 = \frac{1}{2}(A - A^*). \quad (4)$$

Пусть в некоторой матричной норме $||| \cdot |||$, $|||A_0||| \ll |||A_1|||$, т.е. матрица A является сильно неэрмитовой [5, 7]. Заметим, что $\text{diag}(A_1) = 0$, если элементы матрицы A вещественные.

Представим косоэрмитову часть A_1 матрицы A в виде

$$A_1 = K_L + K_U, \quad (5)$$

где K_L и K_U строго нижне- и верхнетреугольная матрица соответственно. Очевидно, что $K_L = -K_U^*$.

На основе расщеплений (3)-(5) в [7]- [13] предложены классы треугольных (ТКМ) и попеременно-треугольных (ПТКМ) косоэрмитовых (кососимметрических) итерационных методов для решения системы (2).

Метод ТКМ [7]- [10]. Пусть задано начальное приближение $v^{(0)}$ и положительные параметры ω и τ . Для $p = 0, 1, \dots$ до достижения сходимости последовательности приближений $\{v^{(p)}\}$ вычислять:

$$v^{(p+1)} = G(\omega, \tau)v^{(p)} + \tau B(\omega)^{-1}b,$$

где $G(\omega, \tau) = B(\omega)^{-1}(B(\omega) - \tau A)$, а $B(\omega) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ определяется следующим образом:

$$B(\omega) = B_c + \omega((1 + j)K_L + (1 - j)K_U), \quad j = \pm 1.$$

Здесь $B_c \in \mathbb{C}^{n \times n}$ - эрмитова матрица.

Метод ПТКМ [11]. Пусть задано начальное приближение $v^{(0)}$ и положительные параметры ω и τ . Для $p = 0, 1, \dots$ до достижения сходимости последовательности приближений $\{v^{(p)}\}$ вычислять:

$$v^{(p+1)} = G(\omega, \tau)v^{(p)} + \tau B(\omega)^{-1}b,$$

где $G(\omega, \tau) = B(\omega)^{-1}(B(\omega) - \tau A)$, а $B(\omega) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ определяется следующим образом:

$$B(\omega) = (B_c + \frac{\omega}{2}K_L)B_c^{-1}(B_c + \frac{\omega}{2}K_U).$$

Здесь $B_c \in \mathbb{C}^{n \times n}$ - эрмитова положительно определенная матрица.

В [12, 13] предложен двухшаговый косоэрмитов итерационный метод (ДКМ), даны достаточные условия сходимости метода и выбор оптимальных итерационных параметров. Матрица $B(\omega)$ для ДКМ имеет вид

$$B(\omega) = (B_c + \frac{\omega}{2}\widehat{K}_L)B_c^{-1}(B_c + \frac{\omega}{2}\widehat{K}_U), \quad (6)$$

где $\widehat{K}_L = K_L + H_0$, $\widehat{K}_U = K_U - H_0$, $H_0 \in \mathbb{C}^{n \times n}$ - некоторая эрмитова матрица, $B_c \in \mathbb{C}^{n \times n}$ - эрмитова положительно определенная матрица. Очевидно, что $\widehat{K}_L = -\widehat{K}_U^*$, $A_1 = (K_L + H_0) + (K_U - H_0) = \widehat{K}_L + \widehat{K}_U$.

В случае, когда $H_0 = 0$, ДКМ сводится к ПТКМ; специальный выбор матрицы H_0 [12, 13] позволяет улучшить сходимость метода.

Численные результаты, касающиеся решения модельного стационарного уравнения конвекции-диффузии с использованием указанных косэрмитовых (кососимметричных) итерационных методов решения СЛАУ (2), можно найти в работах [10]- [13]. В работе [14] данный класс методов использован для решения СЛАУ, возникающих при моделировании процессов переноса многокомпонентных смесей в воде.

Литература

1. Полежаев В.И., Бунэ А.В., Вerezуб Е.А. и др. Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье-Стокса. Москва: Наука, 1987. 273 с.
2. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. Москва: Наука, 1978. 592 с.
3. Hafez M. Numerical simulation of incompressible flows. World Scientific, 2002. 708 p.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. Москва: Наука, 1986. 736 с.
5. Bai, Z.-Z., Golub, G.H., Ng, M.K. Hermitian and skew-Hermitian splitting methods for non-Hermitian positive definite linear systems // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2003. Vol. 24. P. 603–626.
6. Bai, Z.-Z. Splitting iteration methods for non-Hermitian positive definite systems of linear equations // Hokkaido Math. J. 2007. Vol. 36. P. 801–814.
7. Крукиер Л.А. Неявные разностные схемы и итерационный метод их решения для одного класса систем квазилинейных уравнений. Изв. ВУЗов, Матем. 1979. № 7. с. 41–52.
8. Крукиер Л.А. Кососимметричные итерационные методы решения стационарного уравнения конвекции - диффузии с малым параметром при старшей производной. Изв. ВУЗов, Матем. 1997. № 4. с. 74–85.
9. Krukier L.A. Convergence acceleration of triangular iterative methods based on the skew-symmetric part of the matrix // Appl. Numer. Math. 1999. Vol. 30. P. 281–290.
10. Krukier L.A., Chikina L.G., Belokon T.V. Triangular skew-symmetric iterative solvers for strongly nonsymmetric positive real linear system of equations // Appl. Numer. Math. 2002. Vol. 41, P. 89–105.

11. *Бочев М.А., Крукиер Л.А.* Об итерационном решении сильно несимметричных систем линейных алгебраических уравнений // ЖВМ и МФ. 1997. № 37(11). с. 1283–1293.
12. *Krukier L.A., Martinova T.S., Bai Z.-Z.* Product-Type Skew-Hermitian Triangular Splitting Iteration Methods for Strongly Non-Hermitian Positive Definite Linear Systems // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2009. Vol. 232. N 1. P. 3–16.
13. *Бай З.З., Крукиер Л.А., Мартынова Т.С.* Двухшаговые итерационные методы решения стационарного уравнения конвекции-диффузии с малым параметром при старшей производной на равномерной сетке // ЖВМ и МФ. 2006. № 46(2). с. 295–306.
14. *L.G. Chikina, I.N. Shabas, T.S. Martynova* Simulation of the transfer process of multiphase substances in water // JP Journal of Heat and Mass Transfer. 2019. Vol. 16. Issue 1. P. 69–94.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ НЕЙРОНОВ ¹

Муратова Г.В., Бавин В.В., Хаишбашев Г.А.

*Институт математики, механики и компьютерных наук
им. И.И. Воровича ЮФУ, г. Ростов-на-Дону*

Современные достижения в области математического моделирования и вычислительной техники позволяют исследователям ставить и реализовывать сложные задачи. Одним из актуальных направлений исследований является исследование деятельности мозга. Широкое применение получили когнитивные системы на базе сверточных нейронных сетей, основанных на упрощенных биологических моделях нейронов. Задача исследования строения и функционирования мозга находит применение в решении проблем медицины, разработки эффективных схем лечения болезней, диагностики заболеваний.

Математическое моделирование как нормальных физиологических, так и патологических процессов является в настоящее время одним из самых актуальных направлений в научных исследованиях. Современная медицина представляет собой, в основном, экспериментальную науку с огромным эмпирическим опытом воздействия на ход тех или иных болезней различными средствами. Экспериментальное исследование подробного изучения процессов в биосредах является ограниченным, поэтому наиболее эффективным аппаратом их исследования представляется математическое моделирование [1].

Современный уровень развития методологии математического моделирования, вычислительных методов, вычислительных систем, достижения в экспериментальных исследованиях электрофизиологических характеристик позволили разработать множество моделей, описывающих электрическую активность мозга.

Более подробное исследование активности мозга приводит к значительному увеличению вычислительных затрат при моделировании, поскольку увеличение точности и биологической правдоподобности нейронной сети ведет к увеличению количества моделируемых нейронов и степени детализации моделируемого нейрона. Для изучения взаимодействия сигналов с входов нейрона и их влияния на потенциал необходима модель, учитывающая пространственную геометрию нервных клеток. Модели нейронов, на основе кабельной теории, обладают хорошей детализацией за счет сегментирования нейронных отростков и достаточной вычислительной простотой.

Кабельная теория [2] моделирует распространение импульса вдоль нервного волокна, составленного из эквивалентных электрических схем. Такой подход позволяет заменить точечную модель на сегментированную модель

¹Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Государственного фонда естественных наук Китая, грант 19-51-53013 ГФЕН

нейрона, дающую возможность моделировать распространение импульса, как вдоль нейрона, так и между нейронами.

Для численного моделирования процессов, описываемых такими моделями, требуется решение больших разреженных систем линейных алгебраических уравнений, полученных при дискретизации дифференциальных уравнений [3]. Решение полученных после дискретизации систем стандартными итерационными методами является вычислительно емкой задачей [4].

Многосеточный метод использует последовательности сеток различных уровней дискретизации, которые разрешают конфликты между компонентами решения, имеющими разный масштаб, что позволяет снизить вычислительный объем и, тем самым, повысить эффективность. В многосеточных методах применяются многоуровневые стратегии релаксации и грубо-сеточной коррекции.

В данной работе исследованы характеристики двух алгоритмов построения сеток: RS (Ruge-Stuben), PMIS (Parallel multigrid independent set) применительно к решению модельной задачи. Классический RS [5] алгоритм огрубления сетки базируется на двух эвристических критериях, которые позволяют добиться оптимальной сходимости и минимальных вычислительных затрат. Алгоритм PMIS [5] не следует строго первому критерию алгоритма RS, что дает преимущество в операторной сложности и позволяет распараллелить процесс построения сетки [6, 7].

В качестве модельного примера рассмотрена задача моделирования распространения потенциала действия вдоль нервного волокна на участке нейронной сети. Для описания распространения нервного импульса используется кабельное уравнение, которое позволяет представить нервную клетку в виде кабеля, размещенного внутри проводящей среды и имеющего изоляцию, роль которой играет клеточная мембрана.

Кабельное уравнение имеет следующий вид (1):

$$\frac{d^2V}{dx^2} \cdot \frac{1}{r_l} = \frac{V}{r_m} + c_m \cdot \frac{dV}{dt}, \quad (1)$$

где r_l , r_m – осевое и мембранное сопротивление, соответственно, c_m – емкость, мембранный потенциал – V .

Начальные условия – $V(X, 0) = V_r$, X – расчетная область.

Граничные условия – в случае, если в точке X окончание нервного волокна $\frac{dV}{dx}(X, 0) = 0$. Если в точке X синапс, то уравнение имеет вид $\frac{d^2V}{dx^2} \cdot \frac{1}{r_l} = \frac{V}{r_m} + c_m \cdot \frac{dV}{dt} + g(t) \cdot (V_k - V)$, где g – проводимость, V_k – возвращающий потенциал.

Ниже приведены результаты вычислительного эксперимента по моделированию распространения потенциала действия вдоль участка нервного волокна.

Таблица 1. Результаты работы АММ алгоритмов для сети размером > 900000 секций.

тип АММ	Операторная сложность	итераций	тустановки	трешения	t
RS	1.91	86	24.8	266.3	291.1
PMIS(GPU)	1.77	92	65.6	86.3	151.9

Таблица 2. Результаты работы АММ алгоритмов для сети размером > 10000 секций.

тип АММ	Операторная сложность	итераций	тустановки	трешения	t
RS	1.82	45	4.6	14.6	19.2
PMIS(GPU)	1.54	35	12.2	3.2	15.4

Таблица 3. Результаты работы АММ алгоритмов для сети размером > 1000 секций.

тип АММ	Операторная сложность	итераций	тустановки	трешения	t
RS	1.53	32	4.1	8.1	12.2
PMIS(GPU)	1.52	15	9.4	5.6	15.0

В данном исследовании были проведены численные эксперименты расчета модели распространения электрического сигнала вдоль участка нервного волокна. Применен алгебраический многосеточный метод для решения больших систем линейных алгебраических уравнений, полученных при дискретизации дифференциальных уравнений кабельной теории. Исследованы характеристики алгоритмов построения сеток RS, PMIS применительно к решению модельной задачи. Проведенные исследования показали эффективность использования алгебраического многосеточного метода с PMIS – алгоритмом огрубления сетки для решения кабельного уравнения.

Литература

1. Mathematical modeling in medicine and biology based on continuum mechanics models. МІРТ, 2009, no. 1, № 1. P. 5-16.
2. Methods in Neuronal Modeling: From Ions to Networks. Cambridge: MIT Press, 1998. P. 28-35.
3. Algebraic Multigrid Methods. Department of Computer Science University of Illinois at Urbana-Champaign Urbana. 2014. P. 4-5.
4. Parallel Algebraic Multigrid Methods – High Performance Preconditioners. Center for Applied Scientific Computing, Lawrence Livermore National Laboratory, 2006. P. 6-12.
5. An Introduction to Algebraic Multigrid. Computing in Science and Engineering, 2006. P. 3-5.

6. Coarse-grid selection for parallel algebraic multigrid. In Proc. of the Fifth International Symposium on: Solving Irregularly Structured Problems in Parallel, volume 1457 of Parallel AMG 27, Lecture Notes in Computer Science, 1998. P. 104-115.
7. Reducing complexity in parallel algebraic multigrid preconditioners. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 2004. P. 1019-1020. UCRLJRNL-206780

О МАГИСТЕРСКОЙ ПРОГРАММЕ МЕХМАТА ЮФУ “МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ”¹

Надолин К.А., Карякин М.И., Наседкин А.В.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

В работе обсуждается магистерская программа “Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ”, ориентированная на научно-исследовательскую профессиональную деятельность выпускников, а также их дальнейшее обучение в аспирантуре.

Магистерская программа разрабатывается в Институте математики, механики и компьютерных наук им. И.И.Воровича Южного федерального университета. Ее реализация планируется с сентября 2020 года, когда будут набраны первые 20 студентов.

Разработка магистерской программы была поддержана Благотворительным фондом Владимира Потанина в рамках грантового конкурса 2018/2019 г. стипендиальной программы Фонда для преподавателей магистратуры в номинации <Создание новой магистерской программы>.

Введение

Математическое моделирование, как современный способ проведения научных исследований и ключевой этап проектирования сложных технических устройств, требует подготовки специалистов, обладающих компетенциями как в предметной области, так и в вычислительной математике и в современных информационных технологиях, поскольку основным инструментом проведения вычислительных экспериментов является высокопроизводительный компьютер, оснащенный сложным наукоемким программным обеспечением.

Одна из проблем подготовки специалистов в области математического моделирования связана с тем, что до последнего времени молодые люди, поступающие в высшие учебные заведения, не видели карьерных перспектив в сфере, связанной с научными исследованиями, наукоемким проектированием и высокотехнологичным производством. Поэтому популярность математического образования среди студентов в последние годы существенно снизилась. Сейчас ситуация в России начинает меняться, в том числе, в связи с возрождением предприятий военно-промышленного комплекса. Растет спрос не только на специалистов в области информационно-коммуникационных технологий, но и в области прикладной математики и математического моделирования. Потребность рынка труда в кадрах высшей квалификации,

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Благотворительного фонда Владимира Потанина

владеющих методами математического моделирования, не только декларирована сейчас руководством страны, но уже проявляется на практике. В Ростове мы сталкиваемся с этим, сотрудничая с ПАО <Роствертол>, ФГАНУ НИИ <Спецвузавтоматика>, ОАО "Горизонт", Южным научным центром РАН и другими организациями.

Все это позволяют надеяться, что научно-исследовательская карьера станет привлекательной для выпускников университетов, а магистерская программа, сочетающая прикладную математику с современными информационными технологиями, заинтересует выпускников бакалавриата и привлечет дополнительных абитуриентов в магистратуру мехмата ЮФУ.

I Концепция магистерской программы

В настоящее время в России проходит реформа высшей школы, связанная, в том числе, с превращением аспирантуры в третью ступень высшего образования, причем обучение в аспирантуре увеличено до четырех лет. Суммарно сейчас обучение специалистов высшей квалификации длится десять лет (4 года в бакалавриате, 2 года в магистратуре и 4 года в аспирантуре), причем магистратура рассматривается как итоговая подготовка к профессиональной деятельности, учитывающая запросы рынка труда, а изучаемые в магистратуре дисциплины обеспечивают узкую специализацию в выбранной профессиональной сфере.

Данную ситуацию можно рассмотреть под другим углом зрения, когда обучение в магистратуре является подготовительным этапом для дальнейшего обучения в аспирантуре. В этом случае необходимо усилить дисциплины фундаментальной подготовки, а к организации проектной деятельности магистрантов следует привлекать аспирантов, усиливая научно-исследовательскую компоненту проектов.

Углубленное сочетание проектно-исследовательского и проектно-технологического содержания составляет суть концепции вариативно-модульного построения образовательной программы магистратуры "Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ", а основной задачей, решаемой при разработке этой образовательной программы, является создание на основе накопленного опыта, кадрового потенциала и имеющегося учебно-методического и материально-технического задела Института математики, механики и компьютерных наук ЮФУ научно-ориентированной магистерской программы, привлекательной для студентов, имеющих склонность к исследовательской деятельности и планирующих в дальнейшем поступление в аспирантуру, защиту диссертации и научно-педагогическую карьеру в наукоемких и высоко технологичных производствах, научно-исследовательских организациях и университетах.

II Учебно-методический задел, кадровая и материально-техническая база

Подготовка магистров в области математического моделирования в Институте математики, механики и компьютерных наук им. И.И.Воровича Южного федерального университета (до 2006 г. Ростовского государственного университета) проводится с 1995 года. В 2010 и в 2016 гг. магистерские программы мехмата ЮФУ по направлению подготовки 01.04.02 “Прикладная математика и информатика” получили международную аккредитацию в Институте аккредитации, сертификации и обеспечения качества ACQUIN (Германия). Эта аккредитация будет действовать до 30 сентября 2022 года.

Магистерская программа “Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ” учитывает накопленный педагогически и методически опыт и основывается на исследовательских традициях научных школ мехмата ЮФУ [1]- [5].

Научные школы мехмата ЮФУ являются тем фундаментом, на котором создавалась магистерская программа, содержательно ориентированная на широкий круг задач прикладной математики и информатики в таких областях, как механика деформируемого твердого тела, механика жидкости, газа и плазмы, процессы тепло- массопереноса, биомеханики, финансовой математики и других актуальных проблем, связанных в первую очередь с математическим моделированием и вычислительным экспериментом.

При создании программы “Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ”, с одной стороны, была сохранена преемственность предшествующим образовательным программам, а с другой стороны, были внесены существенные изменения, связанные, в первую очередь, с переходом на новые образовательные стандарты, более четким определением студенческой целевой аудитории, расширением использования образовательных информационных технологий.

Институт математики, механики и компьютерных наук ЮФУ располагает необходимыми для реализации программы кадрами, технологиями и материально-техническими ресурсами.

Профессорско-преподавательский состав Института насчитывает сто человек, из которых около пятидесяти докторов наук, профессоров и более пятидесяти кандидатов наук, доцентов.

В Институте имеется и используется в учебном процессе следующее оборудование, программное и информационной обеспечение:

- 12 компьютерных классов, оснащенных современными персональными компьютерами и презентационным оборудованием, включая интерактивные доски. Компьютерные классы и компьютеры кафедр и лабораторий соединены в единую локальную сеть, в составе которой функционируют мощные вычислительные кластеры.

- 4 Linux-кластера, обслуживаемые единой диспетчерской системой управления заданиями OpenPBS.
- 2 конференц-зала, оснащенные мощным стационарным презентационным оборудованием, включая оборудование для проведения видеоконференций.
- 4 большие лекционные аудитории, оснащенные мощным стационарным презентационным оборудованием.
- 15 кафедральных мобильных презентационных комплектов, включающих переносной экран и мультимедийный проектор, что позволяет организовать занятие-презентацию в любой аудитории.
- библиотека с читальным залом на 50 мест, оснащенным компьютерами для входа в библиотечную информационную сеть ЮФУ с возможностью подписного доступа к многочисленным электронным базам данных.
- бессрочные неограниченные лицензии использования современных и весьма дорогостоящих программных продуктов для сложных научных и инженерных расчетов (ANSYS, CFX, MSC Software, ABAQUS, COMSOL).

III Дисциплины специализации

Специфика магистерской образовательной программы «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» обусловлена ориентацией на образовательные программы аспирантуры по направлениям подготовки 01.06.01 – «Математика и механика» и 09.06.01 – «Информатика и вычислительная техника».

При структурировании учебных дисциплин применяется модульный проектно-ориентированный подход. Выбранная структура магистерской программы, а также большой набор предлагаемых дисциплин специализации с единой трудоемкостью 5 ECTS, позволит гибко строить индивидуальные траектории обучения студентов и формировать компетенции, относящиеся к выбранным направлениям дальнейшей подготовки в аспирантуре.

В таблице 1 представлены учебные модули и дисциплины специализации разрабатываемой магистерской программы

Заключение

Согласование компетенций второго (магистратура) и третьего (аспирантура) уровней высшего образования, а также применение модульного подхода при проектировании магистерской программы обеспечит оптимизацию

Таблица 1.

Дисциплины специализации и учебные модули		ECTS
Базовая часть		
Б1.Б.1	Современные проблемы прикладной математики и информатики	5
Б1.Б.2	Непрерывные математические модели	5
Б1.Б.3	Иностранный язык	4
Б1.Б.4	Современные компьютерные технологии	5
Б1.Б.5	Научно-исследовательский семинар	5
Вариативная часть (обязательные дисциплины)		
Б1.В.ОД.1	Дискретные математические модели	5
Б1.В.ОД.2	Современные проблемы математической физики	5
Б1.В.ОД.3	Современные численные методы математического моделирования	5
Б1.В.ОД.4	Численные методы линейной алгебры	5
Вариативная часть (дисциплины по выбору)		
Б1.В.ДВ.1	Модуль университетской академической мобильности	3
Б1.В.ДВ.2	Стохастическое моделирование и статистическая обработка данных	5
Б1.В.ДВ.3	Математические модели в биологии	5
Б1.В.ДВ.4	Параллельное и распределенное программирование	5
Б1.В.ДВ.5	Методы компьютерной алгебры и их приложения	5
Б1.В.ДВ.6	Математические основы распознавания образов и машинного обучения	5
Факультативные дисциплины		
Б1.В.ДВ.7	Разработка мобильных приложений	5
Б1.В.ДВ.8	Объектно-ориентированное проектирование и программирование на C++	5
Вариативная часть (НИР и практики)		
Б5.Н.1-4	Научно-исследовательская работа	30
Б5.П.1	Модуль проектной деятельности	9
Б5.П.2	Преддипломная научно-исследовательская практика	9

содержания подготовки профессиональных исследователей и преподавателей высшей школы. Формой интеграции магистерской программы “Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ” и образовательных программ аспирантуры по направлениям подготовки 01.06.01 Математика и механика и 09.06.01 Информатика и вычислительная техника выступают совместные учебно-научные коллективы аспирантов и магистрантов, участвующих в совместных исследованиях в рамках научно-образовательных проектов.

В заключении отметим, что предложенная магистерская программа поз-

волит реализовать процесс формирования исследовательских и преподавательских компетенций в рамках единой образовательной траектории, нацеленной в перспективе на подготовку и защиту кандидатской диссертации, что соответствует приоритетам Программы развития Южного федерального университета.

Литература

1. *Надолин К.А., Наседкин А.В.* Перспективы подготовки магистерской образовательной программы по математическому моделированию и компьютерной механике // V Всеросс. шк.-сем. <Математическое моделирование и биомеханика в современном университете>, 1-5 июня 2009. Ростов-на-Дону: Изд-во <Терра Принт>, 2009. С. 76–77.
2. *Карякин М.И., Надолин К.А., Наседкин А.В.* Блок ИТ-дисциплин как связующая основа магистерских программ двойных дипломов по прикладной математике и инженерии // Научно-методич. конф. "Современные информац. технологии в образовании: Южный Федеральный округ 11-13 мая 2011. Ростов-на-Дону: Изд-во ЦВВР, 2011. С. 151–152.
3. *Nadolin K.* ICARUS — Internationalized Curricula Advancement at Russian Universities in the Southern region / В кн. <Интернационализация учебных планов на уровне магистра в российских вузах южного региона>. ЮФУ. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2014. С. 29–49.
4. *Карякин М.И., Надолин К.А., Наседкин А.В.* Англоязычная магистерская программа мехмата ЮФУ "Computational Mechanics and Informational Technologies" // <Современные проблемы математического моделирования>, пос. Абрау-Дюрсо, 11-16 сентября 2017 г. - Сборник трудов XVII Всероссийской конференции-школы молодых исследователей / Южный федеральный университет – Ростов-на-Дону – Таганрог: Изд-во ЮФУ, 2017. С. 76–83.
5. *Nadolin K., Karyakin M., Nasedkin A.* Virtual academic mobility in the context of the master's program "Computational mechanics and information technologies" in the Southern Federal University // 20th European Conference on Mathematics for Industry (ECMI 2018), 18-22 June 2018, Budapest, (Hungary). Book of Abstracts. Budapest, European Consortium for Mathematics in Industry, 2018. P. 60.

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ В ОБЛАСТИ УДАРНОГО СЖАТИЯ ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ТЕЛ¹

Острик А.В., Николаев Д.Н.

Институт проблем химической физики РАН, г. Черноголовка

Введение

Уравнения состояния (УРС) [1, 2] требуются, прежде всего, для решения задач механики сплошных сред (МСС) численными методами [3]. В достаточно общем случае их удобно представлять в виде зависимостей удельной внутренней энергии и давления от плотности и температуры [3, 4]. При построении УРС в таком виде возникает необходимость удовлетворения условия термодинамической совместности.

Для поликристаллических тел построение УРС облегчается их изотропией и возможностью применения теории теплоемкости Дебая. В то же время класс поликристаллических тел включает важные для практики конструкционные материалы (в частности, металлы и их сплавы), для которых накоплен представительный набор данных, требующихся при построении УРС.

При численном решении уравнений МСС (законов сохранения) они, как правило, замыкаются табличными широкодиапазонными полуэмпирическими УРС [2, 5], что порождает ряд проблем [4, 6]. К основным из них относятся большие затраты машинного времени и нарушение условия термодинамической совместности при аппроксимации на двумерной сетке температур и плотностей. Требования к табличным УРС и их аппроксимациям сформулированы в [3, 4].

Для разработки эффективных численных кодов требуются широкодиапазонные, но полуаналитические УРС, в которых нет необходимости в аппроксимации на двумерных сетках. Разработке упрощенных вариантов аналитических УРС для решения задач МСС посвящено значительное количество работ (применительно к области ударного сжатия см., например, [7, 8, 9]). В отличие от этих работ предлагается строить функции холодного давления и Грюнайзена при абсолютном нуле в зависимости от плотности в табличном виде (сетка – одномерная). Методам построения этих функций и УРС на их основе с учетом вклада электронной компоненты в удельную теплоёмкость и посвящена настоящая работа.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 18-08-00964-а, 18-08-00094-а)

I Основные соотношения

При построении уравнений состояния вещества традиционно используются данные ударно-волновых экспериментов в сочетании с данными о его теплофизических свойствах, в частности, зависимости удельной теплоемкости от плотности и температуры. Уравнение состояния строится в виде соотношений типа Ми-Грюнайзена:

$$E = E(\rho, T) = E_c(\rho) + E_T(\rho, T) = E_c(\rho) + \int_0^T C_V(\rho, T) dT, \quad (1)$$

$$P = P(\rho, T) = P_c(\rho) + \Gamma(\rho, T)\rho E_T = \rho^2 \frac{dE_c}{d\rho} + \Gamma(\rho, T) \int_0^T C_V(\rho, T) dT, \quad (2)$$

где ρ – плотность вещества; E, E_c, E_T – полная, холодная и тепловая удельные энергии; P, P_c, P_T – полное, холодное и тепловое давления; $\Gamma = \Gamma(\rho, T)$ – функция Грюнайзена; C_V – удельная теплоемкость.

В УРС вида (1), (2) входят две неизвестные функции $E_c(\rho)$ и $\Gamma(\rho, T)$ (зависимость удельной теплоемкости от плотности и температуры считается известной), которые должны быть построены из данных ударно-волновых экспериментов с учетом основного термодинамического тождества:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial(1/\rho)} \right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho - P. \quad (3)$$

Подставляя (1), (2) в (3), получаем уравнение для определения коэффициента Грюнайзена

$$\left(\frac{\partial T E_T \Gamma}{\partial T} \right)_\rho - 2 \frac{T E_T \Gamma}{T} = \left(\frac{\partial E_T}{\rho \partial(1/\rho)} \right)_T. \quad (4)$$

Интегрируя (4) с начальным условием (учли, что $T \rightarrow 0$ и $C_V \rightarrow 0$)

$$\frac{E_T \Gamma}{T} \Big|_{T=0} = 0,$$

получаем

$$\Gamma(\rho, T) = \frac{T}{E_T(\rho, T)} \int_0^T \left(\frac{\partial E_T(\rho, T)}{\rho \partial(1/\rho)} \right)_T \frac{dT}{T^2} \quad (5)$$

или (подставляем выражение тепловой энергии через теплоемкость и интегрируем по частям)

$$\Gamma(\rho, T) = \frac{E_{T0}}{E_T} \frac{T}{T_0} \left(\Gamma_0(\rho) + \left(1 - \frac{T_0}{T} \right) \frac{dE_{T0}}{E_{T0} \rho dv} \right) + \frac{T}{E_T} \int_{T_0}^T \left(\frac{\partial C_V}{\rho \partial v} \right)_T \frac{dT}{T} - \frac{1}{E_T} \int_{T_0}^T \left(\frac{\partial C_V}{\rho \partial v} \right)_T dT, \quad (6)$$

где $v = 1/\rho$, $\Gamma_0(\rho)$ – функция Грюнайзена при нормальной температуре (здесь и далее индексом ноль отмечаются величины, относящиеся к нормальным условиям).

Отметим, что в простых моделях УРС (см., например, [7, 8, 9]) в области сжатия иногда принимается постоянное значение теплоемкости, начиная с нормальной температуры T_0 ($E_T(T) = E_{T_0}(\rho) + C_v(T - T_0)$). Тогда из (6) следует

$$\Gamma(\rho, T) = \frac{E_{T_0}}{E_T} \frac{T}{T_0} \left(\Gamma_0(\rho) + \left(1 - \frac{T_0}{T}\right) \frac{dE_{T_0}}{E_{T_0} \rho dv} \right), \quad (7)$$

т.е. в этом случае, либо функция Грюнайзена зависит только от плотности, но тогда она определяется тепловой энергией $E_{T_0}(\rho)$ (это следует из (7) при $\Gamma(\rho, T) \equiv \Gamma_0(\rho)$)

$$\Gamma(\rho) = \Gamma_0(\rho) = \frac{1}{C_v T_0 - E_{T_0}} \frac{dE_{T_0}}{\rho dv}, \quad (8)$$

либо (например, если $\Gamma_0(\rho)$ берется независимо из экспериментальных данных) эта функция зависит и от T , согласно (7).

Для Дебаевского приближения, когда $E_T(\rho, T) = T e_T(\theta_D(\rho)/T)$ и $C_v(\rho, T) = C_v(\theta_D(\rho)/T)$ из (5) получаем, интегрируя по частям

$$\Gamma(\rho) = \Gamma_{00}(\rho) = -\frac{d \ln \theta_D}{d \ln(1/\rho)}, \quad (9)$$

где $\Gamma_{00}(\rho)$ – функция Грюнайзена при абсолютном нуле. В соответствии с (9) в Дебаевском приближении функция Грюнайзена не зависит от температуры.

Таким образом, соотношение (9) обеспечивает выполнение условия термодинамической совместности.

В более общем случае, с учетом вклада в теплоемкость электронной компоненты удельная внутренняя энергия определяется соотношением

$$E_T(T) = T e_T \left(\frac{\theta_D(\rho)}{T} \right) + \frac{C_e T^2}{2} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{\gamma_e}, \quad (10)$$

где ρ_0 – плотность вещества при нормальных условиях; C_e – коэффициент электронной теплопроводности; γ_e – электронный аналог коэффициента Грюнайзена. Из (5), (9), (10) получаем

$$\Gamma(\rho, T) = \frac{T}{E_T(\rho, T)} \left[\Gamma_{00}(\rho) e_T \left(\frac{\theta_D(\rho)}{T} \right) + \gamma_e \frac{C_e T}{2} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{\gamma_e} \right]. \quad (11)$$

Согласно (11) при учете вклада электронной теплоемкости функция Грюнайзена зависит и от температуры, но по-прежнему определяется функциями одной переменной $\theta_D(\rho)$, $\Gamma_{00}(\rho)$ (только для этих функций требуется задание в табличном виде).

II Определение удельной холодной энергии и функции Грюнайзена в области сжатия

Функция $E_c = E_c(\rho)$ связана с ударной сжимаемостью $P_H = P_H(\rho)$. Из соотношения Гюгонио на фронте ударной волны имеем:

$$E - E_0 = \frac{1}{2}(P_H(\rho) + P_0) \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho} \right),$$

откуда, используя (1), (2), в случае Дебаевского приближения $\Gamma(\rho) = \Gamma_{00}(\rho)$, получаем

$$E_T(\rho, T_H(\rho)) = \psi(\rho) - E_c^*, \quad (12)$$

$\psi(\rho) = (P_H(\rho) + P_0)(1/\rho_0 - 1/\rho)/2 + E_{T0}$, $E_{T0} = E_T(\rho_0, T_0)$, $E_c^* = E_c(\rho) - E_c(\rho_0)$, где $T_H(\rho)$ – температура на ударной адиабате.

Отметим, что если экспериментальная ударная адиабата задана линейной зависимостью $D = \alpha + \beta U$ между волновой и массовой скоростями (D – волновая скорость; U – массовая скорость, α, β – экспериментально определяемые коэффициенты), то ударная сжимаемость рассчитывается по известному соотношению

$$P_H(\rho) = P_0 + \rho_0 D U = P_0 + \rho_0 \frac{\alpha^2(1 - \rho_0/\rho)}{[1 - \beta(1 - \rho_0/\rho)]^2}.$$

Поскольку на ударной адиабате уравнения состояния также выполняются, то в случае Дебаевского приближения ($\Gamma(\rho) = \Gamma_{00}(\rho)$)

$$-\frac{dE_c^*}{d(1/\rho)} + \Gamma_{00}(\rho)\rho E_T(\rho, T_H(\rho)) = P_H(\rho). \quad (13)$$

Для поликристаллического тела функция $\Gamma_{00}(\rho)$ рассчитывается из известного соотношения ($t = 0$ – теория Ландау – Слэтера; $t = 1$ – теория Дуглейла – Макдональда; $t = 2$ – теория свободного объема) ($\gamma = 2t/3$)

$$\Gamma_{00}(\rho) = -\frac{2-t}{3} - \frac{1}{2\rho} \frac{\frac{d^2}{d(1/\rho)^2}(\rho^{-\gamma} P_c(\rho))}{\frac{d}{d(1/\rho)}(\rho^{-\gamma} P_c(\rho))}. \quad (14)$$

Входящий в (14) параметр t может быть определен по условию наличия касания третьего порядка между ударной адиабатой и нулевой изэнтропой

$$\Gamma_{00}(\rho_{00}) = 2\beta - \frac{2+t}{3}.$$

Из (12)-(14) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка для определения удельной холодной энергии в зависимости

ОТ ПЛОТНОСТИ

$$\frac{d^3 E_c^*}{d\rho^3} = 2 \left(\frac{2+t}{3} + \frac{P_H(\rho) - \rho^2 dE_c^*/d\rho}{\rho(\psi(\rho) - E_c^*)} - 3 \right) \left(\frac{d^2 E_c^*}{\rho d\rho^2} + (2-\gamma) \frac{dE_c^*}{\rho^2 d\rho} \right) + (3-\gamma)(2-\gamma) \frac{dE_c^*}{\rho^2 d\rho}. \quad (15)$$

Начальные условия для уравнения (15) задаются при нормальной плотности $\rho = \rho_0$:

$$E_c^*|_{\rho=\rho_0} = 0, \quad \left. \frac{dE_c^*}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_0} = \frac{P_0}{\rho_0^2} - \frac{\Gamma_0 E_{T0}}{\rho_0}, \quad \left. \frac{d^2 E_c^*}{d\rho^2} \right|_{\rho=\rho_0} = - \left. \frac{dP_H}{\rho^2 d\rho} \right|_{\rho=\rho_0} - \frac{2P_0}{\rho_0^3} - \frac{\Gamma_0 E_{T0}}{\rho_0^2} (\Gamma_0 - 2).$$

Первое условие – очевидно из определения E_c^* . Второе условие следует из (13). Третье условие для второй производной может быть получено из условия касания ударной адиабаты и изэнтропы $(\partial P/\partial \rho)_{H0} = (\partial P/\partial \rho)_{S0}$.

Полученное дифференциальное уравнение (15) записывается в виде системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и интегрируется численно методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности с переменным шагом по плотности.

После определения функции $E_c^* = E_c^*(\rho)$ и её производных находятся температура Дебая

$$\theta_D(\rho) = \theta_{D0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) \sqrt{\frac{d(\rho^{-\gamma} P_c)/d\rho}{d(\rho^{-\gamma} P_c)/d\rho|_{\rho=\rho_0}}}, \quad P_c = - \frac{dE_c^*}{d(1/\rho)}$$

и температура на ударной адиабате из решения уравнения (12)

$$T_H(\rho) e_T(\theta_D(\rho)/T_H(\rho)) = \psi(\rho) - E_c^*(\rho).$$

В более общем случае с учетом вклада в удельную теплоемкость электронной компоненты (см. (10), (11)) получается система пяти дифференциальных уравнений (добавляются дифференциальные уравнения для функций $T_H(\rho)$ и $\theta_D(\rho)$ с соответствующими начальными условиями).

III Уравнения состояния сапфира

Сапфир широко используется в опытах по измерению температур ударного сжатия металлов и их сплавов [10, 11, 12, 13]. До настоящего времени ударная сжимаемость сапфира экспериментально определялась в диапазоне давлений 80 – 340 ГПа, создаваемых двухступенчатыми газовыми пушками [14]. Действие излучения мощных лазеров применялось для измерения ударной сжимаемости при давлениях 0,7 – 2 ТПа [15, 16, 17].

Область давлений 340 – 700 ГПа экспериментально не изучалась. Для создания давлений этого диапазона мы использовали кумулятивный генератор ударного сжатия [18]. Температура за фронтом ударной волны, распространяющейся в сапфире, измерялась методами оптической пирометрии.

При построении УРС сапфира в области сжатия использовалась аппроксимация ударной адиабаты $D - U$, представленная в [19]. Удельная теплоемкость сапфира рассчитывалась по теории Дебая. Вклад электронной компоненты не принимался во внимание, так как при нормальных условиях сапфир является диэлектриком.

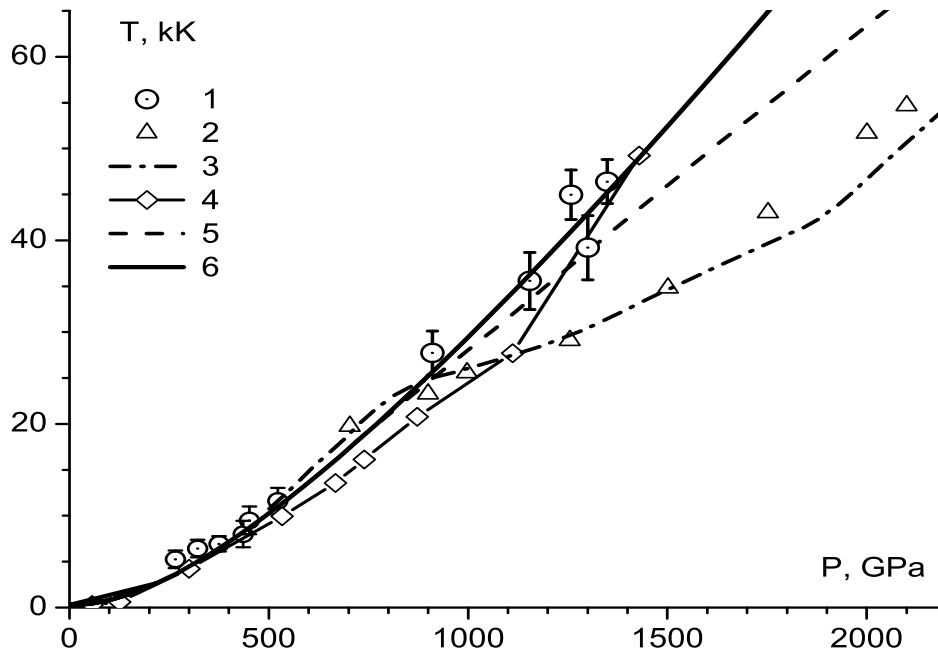


Рис. 1. Зависимость температуры от давления ударного сжатия сапфира. Эксперимент: 1 – данная работа, температура с учетом отражательной способности фронта [15, 20]; 2 – [20]. Расчеты: 3 – [19]; 4 – [21]; 5 – модель УРС SESAME 7411 [19]; 6 – модель УРС, данная работа

На рис. 1 показано сравнение расчетных и экспериментальных данных для температур сапфира при ударном сжатии. В наших расчетах использовался УРС, построенный по предложенному методу. Видно, что результаты этих расчетов согласуются с экспериментальными данными, полученными пирометрическими методами.

Выводы

1. Предложен новый подход к построению УРС поликристаллических материалов, при котором результаты ударных экспериментов воспроизводятся с требуемой на практике точностью (как правило, экспериментальные данные по динамической сжимаемости вещества имеют точность $\approx 5\%$).

2. Предложенный полуаналитический вид УРС удобен для решения задач МСС численными методами.

3. Получено удовлетворительное согласие расчетных и экспериментальных данных для температур за фронтом ударной волны сапфира.

Литература

1. Бушман А.В., Ломоносов И.В., Фортон В.Е. Уравнения состояния металлов при высоких плотностях энергии. Черногловка: ИХФЧ РАН. 1992. 196 с.
2. Фортон В. Е. Уравнения состояния вещества от идеального газа до кварк-глюонной плазмы. М.: Физматлит. 2012. 492 с.
3. Куропатенко В.Ф. Модели механики сплошных сред. Челябинск: Челябинский гос. Университет. 2007. 302 с.
4. Ким В.В., Ломоносов И.В., Острик А.В. Численная реализация табличных уравнений состояния компонентов композиционных материалов в современных гидрочислах // Конструкции из композиционных материалов. 2015. Вып. 2 (138). С. 39-45.
5. Сапожников А.Т., Герщук П.Д., Малышкина Е.Л. и др. Широкодиапазонное табличное уравнение состояния ГЛОБУС и его применение для описания термодинамических свойств меди // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1991. Вып. 1. С. 9-16.
6. Прокопов В.Г. Загадка метода Годунова // ВАНТ, сер. Математическое моделирование физических процессов. 2005. Вып. 4. С. 98-101.
7. Бельхеева Р.К. Уравнение состояния пористой смеси конденсированных компонентов при динамических нагрузках // Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ., 9:3 (2009). С. 23-32.
8. Кинеловский С.А., Маевский К. К. Модель поведения алюминия и смесей на его основе при ударно-волновом воздействии // ТВТ, 2014, том 52, № 6. С. 843 - 851.
9. A. V. Ostriak, A. V. Utkin Calculation of a shock adiabat curve for syntactic foam taking into account presence of gas component localized in hollow microspheres // J. Materials Physics and Mechanics. Vol. 31. No 1-2. 2017. pp. 48-51.
10. Tan H., Ahrens T.J. Shock temperature measurements for metals. High Pressure Research. 1990. Vol. 2. No. 3. P. 159-182.
11. McQueen R.G., D.G. Isaak Characterizing windows for shock wave radiation studies. Journal of Geophysical Research. 1990. Vol. 95. No. 21. pp. 753-765.
12. Anderson W.A., Ahrens T.J. Shock temperature and melting in iron sulfides at core pressures. Journal of Geophysical research. 1996. Vol. 101. No B3. P. 5627-5642.
13. D.E. Hare, D.J. Webb, S.-H. Lee, N.C. Holmes Optical extinction of sapphire shock-loaded to 250 - 260GPa. AIP Conf. Proc. Vol. 620. 2002. Vol. 2. P. 1231-1234.
14. D. Erskine. High pressure hysteresis of sapphire. High-Press. Sci. Techn.-1993, ed. S. C. Schmidt et al, AIP Press, NY. 1994, pp. 141-143.
15. D.G. Hicks, P.M. Celliers, G.W. Collins, et al Shock-induced transformation of Al₂O₃ and LiF into semiconducting liquids. PRL, 2003, Vol. 91. No 3, P. 035502.
16. Root S., Magyar R., Lemke R., Mattsson T. Shock compression of cryogenic noble gas mixtures: Xenon – Krypton. Topical Conference on the Shock Compression of Matter 2013.
17. Ozaki N, Nellis WJ, Mashimo T, et al. Dynamic compression of dense oxide (Gd₃Ga₅O₁₂) from 0.4 to 2.6TPa: Universal Hugoniot of fluid metals. Scientific Reports. 2016; 6:26000.
18. Nikolaev D., Ternovoi V., Kim V., et al. Plane shock compression generators utilizing convergence of conical shock waves // Journal of Physics: Conference Series. 2014. № 14. P. 1-5.
19. Gerald I. Kerley Equation of State and Constitutive Models for Numerical Simulations of Dust Impacts on the Solar Probe. arXiv:1306.6877 (2009).
20. J. Miller et al. High-pressure equation-of-state studies using laser-driven decaying shocks. Presentation at http://www.lle.rochester.edu/media/publications/presentations/documents/APS06/Miller_APS (2006).
21. Hanyu Liu, John S. Tse, W. J. Nellis The electrical conductivity of Al₂O₃ under shock-compression. Scientific Reports 5:12823 (2015).

МОДЕЛЬ ТЕМПОВ РОСТА ДЛЯ ФАЗЫ ВСПЫШКИ ЧИСЛЕННОСТИ ПОПУЛЯЦИИ ВРЕДИТЕЛЕЙ¹

Переварюха А.Ю.

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН, Санкт-Петербург

Введение

Статья посвящена разработке вычислительной модели популяционно-го процесса в условиях развития инвазионной вспышки численности у насекомых-фитофагов. Описывается метод использования расчетов вспомогательного показателя для вычисления изменений численности. Для необходимого внешнего показателя используются расчеты темпов роста особей поколения. Цель построения модели заключается в описании влияния онтогенетических изменений на численность половозрелой генерации — имаго $N(T)$. Взаимные связи действуют в системе «численность $N(t) \Leftrightarrow w(t)$ темпы роста особей» во время неоптимального состояния популяции. Эффективность прироста личинок зависит от прямой конкуренции — во время вспышки численности вредителей леса резко усиливается. Темпы роста особей смежных поколений не могут быть постоянными по ходу быстро меняющегося процесса захвата нового ареала. Вычислительное исследование разработанных систем уравнений предполагается проводить в рамках решаемых прикладных задач популяционной динамики инвазивных видов с использованием формализма гибридных автоматов. Метод успешно использован нами ранее в проекте РФФИ по анализу искусственного выращивания и результатов выпуска в море осетровых рыб Каспийского моря. В той работе мы приблизительно представляли, как может измениться выживаемость молоди от гидрологических условий Волги. При анализе инвазии задача несколько сложнее. Основная идея метода моделирования — изменяться по ходу процесса будут не репродуктивный потенциал вида (или удельная плодовитость самок), а выживаемость особей поколений. На разных стадиях онтогенеза выживаемость различна и меняется скачкообразно. Мы не можем в модели заранее указывать пороговые значения численности, при которых будут видны критические изменения выживаемости (из-за факторов конкуренции или исчерпания ресурсов). Одна из задач моделирования — именно предсказать и показать на графике существование таких пороговых значений. Условия изменений выживаемости в расчетах необходимо находить из состояния сопутствующих факторов. Прирост численности $\Delta N(T)$ в такой

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ N,17-07-00125.

модели составит разни́ца от начальной до конечной на интервале времени фиксированного жизненного цикла. Возможно итоговое $\Delta N(T) < 0$. В уравнениях $\dot{N} = f(N(t), w(t))$, $f < 0 \forall t$ по определению.

I Проблема стабильности популяционных соотношений

Новая гибридная модель $N_{\rightleftharpoons w}$ строится с учетом специфических условий протекания репродуктивного цикла и формирования поколений в раннем онтогенезе насекомых, что отмечено на примере жука-листоеда *Zygodramma suturalis* в фазах пика всплеск или популяционных волн [1]. Модели распространения волновых фронтов популяций обсуждались в [2], [3].

Популяционные характеристики биологических моделей не обязательно должны сохранять постоянство, что давно известно и актуально для случая новых видов в среде. Прямое изменение коэффициентов моделей, как обычно исследуют уравнения для моделей популяций Хатчинсона или Николсона, выглядит очень нереалистично и притянута искусственно, ведь мы не можем заранее узнать на сколько изменится r -параметр воспроизводства. Мы можем в расчетах прямо менять параметры дифференциальных уравнений, вызывать бифуркации. Не составляет проблемы реализовать переход системы к хаотическому движению, как оригинально предложил в докладе на нашей конференции в Дюрсо В.П. Варин для уравнения Ван дер Поля [5]. Все бифуркации в таких уравнениях типичны и давно изучены, и это будет очень далеко от сущности идеи предсказания начала опасных природных явлений. Например, можно записать популяционное уравнение с запаздыванием, в котором произойдет разрушение циклической траектории:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N(t - \tau_1)}{K} \right) (H - N(t - \tau_2)). \quad (1)$$

Модель (1) строится с двумя временными последствиями: $\tau_1 > \tau_2$ — регуляционным и конкурентным запаздываниями. В (1) возникает релаксационный цикл. Свойства цикла предсказуемы, как показано в обзоре [4]. При увеличении $r\tau$ увидим релаксационные колебания, где срыв решения (собственно «релаксация») к максимальному (или минимальному) значению $N_*(t)$ будет не столь резким, как в уравнении Николсона. При сильном увеличении значения $r\tau$ произойдет другое резкое изменение поведения траектории от $N(0) < K$. Траектория при увеличении амплитуды не устоявшихся колебаний не будет в итоге притягиваться к замкнутому подмножеству фазового пространства, цикл разрушится. Потеря неустановившегося режима колебаний считается катастрофической. В (1) предполагается наличие некоторого значимого порогового уровня $L < H < K$, при котором реализация репродуктивного r -потенциала максимальна: $r \rightarrow \mathfrak{R}$, $N(t) \rightarrow H$. Вне биотического сопротивления многие виды с огромной плодовитостью способны заполнить все жизненное пространство, потому мы говорим о максимально до-

пустимом репродуктивном потенциале \mathfrak{R} и о репродуктивном r -параметре, который собственно используется во всех уравнениях динамики популяций. Разрушение среды обитания — актуальный сценарий для инвазионных процессов, особенно на северных островах. Однако, для наших задач анализа завершающихся всплесков было бы хорошо получить значение H в расчетах из других популяционных величин, так как в реальности эта величина заранее не определена, и является не причиной, а следствием нарушения балансового равновесия в среде. Опишем иной подход к моделированию нелинейных эффектов в биосистемах, но метод потребует дискретно-непрерывного алгоритмического метода.

II Идея метода опосредованных изменений

Более тонкий метод моделирования смены фаз процесса — опосредованные изменения, которые касаются минимум двух величин. Темпы роста оказывают возмущающее воздействие на параметры репродуктивного потенциала, которые в традиционных моделях задаются постоянными характеристиками. Если скорость накопления биомассы личинками оптимальна, то эта характеристика — параметр размерного развития может и не оказывать влияние на выживаемость. Наша цель — рассматривать экстремальные явления в экологии инвазионных видов (вспышки насекомых и коллапсы запасов рыб), где рост не тождественен развитию. В большинстве случаев так и происходит, мы не видим конкурентного отклонения для обычной популяции. Опыт исследования проблем выращивания молоди осетровых рыб в прудах не показывает влияния скопления на рост, пока плотность не превышает критическую, далее заметен сдвиг в размерном распределении. В гибридной модели стадийного онтогенеза через расчет убыли от начальной генерации именно рост определяет переходы между стадиями. Одновременно модельный рост непосредственно влияет на убыль, то есть влияние этого показателя двойственно, когда мы задаем его одним феноменологическим уравнением. Тогда все изменения будут происходить при выполнении группы условий, что связано и с априорными особенностями онтогенеза насекомых и с условиями их биотического окружения. Назовем такой метод предикативным переопределением популяционной ситуации изнутри. Все модели в таком подходе необходимо будет рассматривать как сценарии в вычислительных экспериментах. Для построения модели будет задано «гибридное», точнее инкапсулированное событийное время — это внутреннее представление времени, которое можно пересчитать например в сезоны рыболовного промысла или другие актуальные единицы.

III Форма гибридно-событийного времени

Для нашего метода моделирования популяций требуется специальное представление времени в вычислительной среде, так как нужна алгоритмическая реализация переключений формы правой части уравнения, разрешенного относительно производной. Цель сложной формы времени — инкапсулировать и пронумеровать события. Событийность и непрерывность можно совмещать в прикладном моделировании. Существует несколько типов систем с переключениями, которые называют «гибридными» вычислениями, но «гибридная модель» стал слишком широкий термин. Мы предпочитаем говорить о предикативно-переопределяемых или в других случаях о событийно-управляемых модельных системах и сценарных алгоритмах. В современных условиях развития вычислительной математики для решения задачи можно выбрать формализацию времени как мультимножества.

Изучение биологических особенностей насекомых-вредителей привело к выводам о существенном влиянии быстрых изменений в их онтогенезе, имеющем экспериментальное подтверждение в работах по исследованию смены этапов развития организмов. Для модели, учитывающей метаморфозы в жизненном цикле, целесообразно воспользоваться представлением модельного времени так:

$$\Upsilon = \bigcup_n \{Gap_pre_n, [T_{n-1}, t^i, \dots, t^{i+1}, T_n], Gap_post_n\},$$

где Gap_pre — «временная щель» для вычисления согласованных начальных условий и проверки предиката на левом конце промежутка очередного длительного поведения; Gap_post — аналогичная «щель», где определяются новые начальные условия на правом конце текущего n -промежутка Υ_n для решения следующей по порядку или выбранной по условиям предиката задачи Коши. T_n — время срабатывания перехода, t^i — порядок внутрикадрового события. Фактически тут две иерархии дискретности над непрерывным интервалом. Есть кадры и внутри кадров происходят события. В момент события становится истинным предикат данного из всего набора возможных событий. События приводят к смене поведения, формы правых частей уравнений. Таким образом, модельное гибридно-событийное время определяется упорядоченной последовательностью кадров, в которых непрерывная составляющая времени перемежается пронумерованными дискретными отсчетами. Непрерывно-дискретное время моделей — частный случай, когда все кадры не зависят от внешних иных параметров модели, или еще проще — заведомо представляют равные интервалы.

При достижении особых состояний в пространстве переменных состояния (событий) могут изменяться значения параметров основного уравнения — коэффициенты в правых частях, форма правой части или даже число уравнений. События описываются предикатами, определенными на решениях дифференциальных уравнений. Мы по многим причинам для задач мате-

матической биологии предпочитаем использовать вспомогательные уравнения для предикатов. Можно использовать расчеты скорости роста организмов, концентрации питательных веществ или кислорода. Так мы создадим правила для вычислительной среды и будем выделять из всего множества состояний системы то, которое приводит к изменению поведения. Конечное множество интервалов между событиями и будут соответствовать моделируемым стадиям развития. Для исследования гибридных систем разработаны специальные численные алгоритмы. Удобной формой представления непрерывно-дискретных систем является гибридный автомат, расширение идеи дискретных карт состояний с условными переходами. Вершинам графической формы сопоставлены процессы, описываемые дифференциальными уравнениями, а направленным дугам — события. Теперь опишем схему переопределяемой структуры в трех уравнениях.

IV Схема базовой гибридной модели онтогенеза

Для задачи описания численности поколений у насекомых используем уравнение убыли на интервале жизненного цикла, которое свяжем со вспомогательными уравнениями темпов размерного развития и пищевых ресурсов. Модель описывает размножение фитофагов в вечнозеленых лесах с однократным размножением. Для бореальных лесов ситуация усложнится из-за разной длины жизненного цикла у смежных поколений. Используем два параметра естественной смертности, квадратичная α -убыль и линейная β -убыль без учета стадийности. Первая модификация расчетов выживаемости до половозрелой стадии на интервале $[0, T]$:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = -(\alpha w(t)N(t) + \theta(S)\beta) N(t) \\ \frac{dw}{dt} = \frac{g}{N + \zeta}, \theta(S) = \frac{1}{1 - \exp(-cS)} \\ \frac{dg}{dt} = rg - \frac{rg^2}{G} - \nu N(t), \end{cases} \quad (2)$$

где: S — величина нерестового запаса; $w(t)$ — отражает уровень размерного развития поколения, влияющий на увеличение пищевых потребностей; В третьем уравнении g — описывает динамику количества доступных кормовых объектов согласно логистическому уравнению с учетом уничтожения запасов корма $\nu N(t)$. Особая убывающая функция $\theta(S) \rightarrow 1$ при $S \rightarrow \infty$, слабо влияет на вычисление итогового пополнения $N(T)$, если численность колонии насекомых достаточно велика — дополнение предназначено для моделирования резкого снижения эффективности воспроизводства при деградации популяции. Триггерная функция от начальных условий $N(0) = \lambda S$ важна для колониальных видов насекомых. ζ — параметр, учитывающий ограничение темпов развития, не зависящие от численности; c — параметр,

характеризующий степень выраженности эффекта колониальной группы (тлей, псиллид, кокцид, муравьев и др.). Основной показатель α – мгновенный коэффициент компенсационной смертности; β – мгновенный коэффициент антикомпенсационной смертности. Терминологию и идею о важности разделения типов смертности в ювенальном онтогенезе ввел 1954 г. Ф. Нив для расчета пополнения горбуши Британской Колумбии. Забытая идея актуальна для многих других видов, создающих высокую плотность в местах размножения. Связать прирост молоди рыб с выживаемостью поколения в модели предложил еще в 1980 г. Е.А. Криксунов в Докладах АН СССР [6]. Прирост в модели Криксунова описывался условно-феноменологически $\dot{w} = \delta/N(t)$ и метод необходимо модифицировать. $t \in [0, T]$ – специфичный для биологического вида интервал онтогенеза [7].

Из модели (2) можно получить функциональную зависимость $\Psi = N(T)$, $\Psi = \varphi(N(0))$, которую потом использовать в итерационной модели $\Psi_{n+1} = \varphi(\Psi_n)$ поколений. От свойств $\varphi(N(0))$ будет зависеть бифуркации и нелинейная динамика. Для бимодальной модели с альтернативными равновесиями актуален график зависимости, полученный при численном решении задачи Коши для всех $S \in \mathbb{Z}^+$ с начальными условиями $w(0) = w_0$, $g(0) = 0.5G$, $N(0) = \lambda S$, где λ – средняя плодовитость особей. В простом бимодальном случае $\varphi(N(0))$ тут представляет унимодальную кривую с уменьшающимся наклоном ниспадающей правой ветви (при параметрах $\alpha = 0.8 \times 10^{-14}$, по средней плодовитости самок за время наблюдений $\lambda = 227 \times 10^3$, $c = 2.5 \times 10^{-3}$, $G = 125000$, $T = 60$ сут.). Кривая должна иметь ненулевую горизонтальную асимптоту, две точки перегиба и две нетривиальные точки пересечения с биссектрисой координатного угла. Так как в сценариях мы планируем использовать дискретную траекторию – набор точек итераций на плоскости, то важными становятся собственно собственные значения производной в этих равновесиях. Количество нетривиальных равновесий играет большую роль, ведь с каждым равновесием $R^* = \psi(R^*)$ связано множество точек-прообразов. Если равновесие станет неустойчивым, то точки-прообразы не будут притягиваться к другому аттрактору, так как они инвариантно для динамической системы множество и так они будут «выкалывать» непрерывную область притяжения альтернативного аттрактора.

Оригинальная идея метода заключается в описании резких изменений скорости роста при смене этапов, что опосредованно влияет на выживаемость. Именно скорость роста особей определяет момент выхода поколения из-под действия превалирующих на данном этапе онтогенеза факторов смертности, связанных с хищничеством в отношении яиц, гусениц или нимф.

Традиционные модели скорости роста хорошо описывают рост уже сформировавшихся организмов. Известная зависимость связи роста от времени, в форме, которая используется в промысловой ихтиологии: $W_t = W_\infty (1 - \exp(-kt - x))^3$, где указывается предельный вес организма W_∞ не подходит задачам о вспышках и инвазиях. Вполне оправдано разделять

уравнения для условного размерного развития на ранних стадиях онтогенеза и роста уже сформировавшихся особей. Рост насекомых в начальный период жизни происходит неравномерно — на первых стадиях жизненного цикла происходит помимо роста формирование систем жизнедеятельности организма. На последующих рост и половое созревание взрослой особи — имаго. Повышенная скорость чередуется с замедленной перед метаморфозами. К временной депрессии роста приводят условия конкуренции за пищевые ресурсы, так как кладки яиц откладываются кучно особенно при инвазиях в локальных очагах. После приспособления органов к активному питанию и формирования органов движения происходит вновь увеличение прироста массы при активном поиске кормовых растений.

Второе вспомогательное уравнение для скорости размерного развития — конкурентного $w_N(t)$ из системы (2) заменим гибридной структурой (3) с дважды предикативно переопределяемой правой частью:

$$\frac{dw}{dt} = \begin{cases} q, 0 < t < \gamma \\ \varsigma \frac{g}{\sqrt{N + \zeta}}, t > \gamma, w(t) < w_{k1} \\ \eta \sqrt[3]{w(t)^2} - \mathfrak{B} \sqrt{w(t)}, w_{k1} < w(t) < w_k \end{cases} \quad (3)$$

где $[0, \gamma)$ — длительность периода развития организма до полного израсходования запасов питательных веществ яйца. У личинок некоторых видов организмов существует смешанный тип питания. γ определяется биологическими особенностями семейства насекомых. q необязательно может быть отличным от нуля положительным числом, так как никто не гарантирует именно положительный прирост. w_k — интерпретируется как уровень развития, при достижении которого изменяется характер метаболизма из-за увеличения активности питания, что влияет на выход из под атак доминирующего паразита. Так темпы роста определяют и продолжительность интервала уязвимости. При переходе к третьей модельной стадии развития полагается, что скорость роста свободно мигрирующих личинок может описываться известным уравнением Лео фон Берталанфи, где коэффициенты баланса анаболизма η и катаболизма \mathfrak{B} рассчитаны для многих видов животных. В уравнении Берталанфи нет внутривидовых факторов.

Мы разработали стадийную модель взаимосвязи роста и описания выживаемости вплоть до момента, когда там роста не определяется более плотностью поколения — без фактора конкуренции. Использовать модель мы предполагаем для вычисления отклонения \mathfrak{W} конкурентного роста $w_N(t)$ от свободного W_t , определенного только доступностью ресурсов. Подобное отклонение $\mathfrak{W} = \sqrt{(W_t - w_N)^2 / w_N}$ мы будем включать в базовую модель темпов убыли поколения (2). Модель предполагается использовать для ситуаций, когда численность популяции будет чрезмерно велика либо образуется фронт популяционной волны высокой плотности при агрессивной инвазии. Фронт волны в реальности неустойчивое явление и скоро распадается под

действием факторов ограничивающих рост особей, потому уравнения вида Колмогорова-Петровского-Пискунова не очень подходят. В настоящее время развиваются альтернативные методы моделирования неоднородностей распространения вида, такие как клеточные автоматы с запаздыванием в [9] и «игра Белки» с троичным состоянием клеток в [10].

Выполнено в СПИИРАН по проекту РФФИ N 17-07-00125.

Литература

1. *Ермолаев И.В.* Непериодическая популяционная волна на примере лиственничной чехлоноски *Protocryptis sibiricella* (Lepidoptera, Coleophoridae) // Зоологический журнал. 2014. Т. 93. № 8. С. 967–981.
2. *Колпак Е.П., Горбунова Е.А., Жукова И.В.* Математическая модель популяционной волны // Естественные и математические науки в современном мире. 2014. № 16. С. 25-41.
3. *Аматов М.А., Аматова Г.М.* Математическое моделирование популяционных волн // Вопросы современной науки и практики. Университет им. В.И. Вернадского. 2015. № 2 (56). С. 170-177.
4. *Ruan S.* Delay Differential Equations in Single Species Dynamics // Delay Differential Equations and Applications. Springer, Berlin, 2006, pp. 477-517.
5. *Варин В.П.* Интегрирование ОДУ на римановых поверхностях с неограниченной точностью // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2019, 001, 24 с.
6. *Криксунов Е.А., Снетков М.А.* Модель формирования пополнения нерестового стада с учетом весового роста рыб // Доклады Академии наук СССР. 1980. Т. 253. № 3. С. 759–761.
7. *Perevaryukha A.Y.* A model of development of a spontaneous outbreak of an insect with aperiodic dynamics // Entomological Review. 2015. Т. 95. № 3. С. 397-405.
8. *Переварюха А.Ю.* Моделирование неустойчивого критического равновесия в популяционной динамике // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. 2013. № 45. С. 82-91.
9. *Nikitina A.V.* Mathematical modeling of the delay process in regulation of population dynamics based on the theory of cellular automation // Computational Mathematics and Information Technologies. 2019. Т. 1. № 1. С. 35-49.
10. *Переварюха А.Ю.* Запаздывание в регуляции популяционной динамики — модель клеточного автомата // Динамические системы. 2017. Т. 7 (35). № 2. С. 157-165.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКТИВНО-ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В ИЗОТРОПНОЙ И АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДАХ¹

Пичугина О.А.

*Региональный научно-образовательный математический
центр Южного федерального университета, Ростов-на-Дону*

Введение

Многие установившиеся процессы различной физической природы приводят к дифференциальным уравнениям в частных производных эллиптического типа. Достаточно указать стационарные задачи теплопроводности и диффузии, задачи о потенциальном течении жидкости, задачу о распределении тока в проводящей среде, задачи электростатики и магнитостатики, задачи теории упругости, теории фильтрации и т.д. Точные решения краевых задач для эллиптических уравнений удастся получить лишь в частных случаях, приходится находить их решение приближенно.

I Постановка задачи

Рассмотрим эллиптическое уравнение конвекции-диффузии второго порядка общего вида с переменными коэффициентами и смешанными производными в области Ω с границей $\partial\Omega$. На границе области заданы однородные краевые условия первого рода. Конвективные члены в уравнении записаны в «симметричном виде» [2].

$$-Pe^{-1}L_2u + L_1(u) + L_0u = f, \quad u(x, y)|_{\partial\Omega} = u_0, \quad (1)$$

$$L_2u = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (K_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta}), \quad (2)$$

$$L_1u = \frac{1}{2} (K_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial K_1 u}{\partial x_1} + K_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial K_2 u}{\partial x_2}), \quad (3)$$

$$L_0u = K_0u, \quad (4)$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ, проект № 1.13558.2019/13.1

Pe - число Пекле, $K_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta}(x_1, x_2)$, $\alpha, \beta = 1, 2$, $K_\gamma = K_\gamma(x_1, x_2)$, $\gamma = 0, 1, 2$, $K_0(x_1, x_2) \geq 0$, $K_{12} = K_{21}$, $f = f(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in \Omega$. Предполагается, что выполнены условия эллиптичности:

$$c_1 \sum_{\alpha=1}^2 \xi_\alpha^2 \leq \sum_{\alpha,\beta=1}^2 K_{\alpha\beta}(x) \xi_\alpha \xi_\beta \leq c_2 \sum_{\alpha=1}^2 \xi_\alpha^2.$$

где $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ - постоянные, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ - произвольный вектор, причем $0 < c_1 \leq K_{\alpha\alpha} \leq c_2$, $\alpha = 1, 2$.

Будем также полагать, что $Div K = 0$, $K = \{K_1, K_2\}$.

К настоящему моменту разработаны различные методы решения уравнения конвекции-диффузии, о чем свидетельствуют множество работ, посвященных этой тематике. Однако, исследователи, в основном, рассматривают случай изотропной среды, а смешанные производные в диффузионной части обобщенного эллиптического оператора опускают. Тем не менее задача, включающая в себя конвективно-диффузионный перенос в анизотропной среде имеет многочисленные практические приложения. Анизотропные среды широко распространены в природе и имеют большое значение при моделировании различных процессов и явлений.

II Аппроксимация

Введем в области Ω равномерную прямоугольную сетку

$$\omega_h = \{x_{ij} = (ih_1, jh_2), \quad 0 \leq i \leq N_1, \quad 0 \leq j \leq N_2, \quad h_\alpha N_\alpha = l_\alpha, \quad \alpha = 1, 2\}.$$

Аппроксимируем на сетке ω_h краевую задачу (1).

Оператор $L_{\alpha\beta}u$ аппроксимируем согласно [3] разностным оператором

$$\Lambda_{\alpha\beta}u = \frac{1}{2}[(K_{\alpha\beta}u_{\bar{x}\beta})_{x\alpha} + (K_{\alpha\beta}u_{x\beta})_{\bar{x}\alpha}],$$

определенным при $\alpha \neq \beta$ на 7-точечном шаблоне:

$$(x_1, x_2), (x_1 \pm h_1, x_2), (x_1, x_2 \pm h_2), (x_1 - h_1, x_2 + h_2), (x_1 + h_1, x_2 - h_2).$$

Здесь $u_{\bar{x}_i} = (u(x_i) - u(x_i - h_i))/h_i$ - левая разностная производная в точке x_i , $u_{x_i} = (u(x_i + h_i) - u(x_i))/h_i$ - правая разностная производная в точке x_i .

Для аппроксимации первых производных будем использовать центральные разности:

$$u_{x_i^0} = (u(x_i + h_i) - u(x_i - h_i))/2h_i.$$

Доказано, что в этом случае получается кососимметрический разностный оператор [1] и такая форма записи конвективных членов играет существенную роль при решении полученной после дискретизации СЛАУ итерационными методами [2].

III Вычислительный эксперимент

Итак, после аппроксимации уравнения конвекции-диффузии и установки порядка перебора узлов сеточной области мы получили систему линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b. \quad (5)$$

Полученная система решалась двумя методами вариационного типа: BiCG и GMRES(10). Расчеты были выполнены с помощью системы MatLAB, которая содержит набор достаточно эффективных алгоритмов для решения подобных задач.

В уравнение (1)–(4) были подставлены постоянные значения коэффициентов диффузии $K_{11} = K_{22} = 1$. $K_0 = 0$. Заметим, что для симметричности матрицы диффузионного оператора необходимо выполнение условия $K_{12} = K_{21}$.

Были проведены вычислительные эксперименты для четырех модельных задач с различными векторами скорости движения среды, представленными в Таблице 1. Данные тестовые задачи позволяют достаточно хорошо описать

Таблица 1. Коэффициенты вектора скорости

№ Задачи	K_1	K_2
1	1	-1
2	$1 - 2x_1$	$2x_2 - 1$
3	$x_1 + x_2$	$x_1 - x_2$
4	$\sin(2\pi x_1)$	$-2\pi x_2 \cos(2\pi x_1)$

различные классы функций, задающих поле скоростей. В первой задаче модуль и направление вектора скорости не зависят от точки плоскости. Данная задача описывается постоянными коэффициентами при конвективных членах. Вторая задача содержит разделяющиеся, а третья задача - линейные коэффициенты при конвективных членах. В четвертой задаче поле скоростей моделирует вихревое движение. Последние две задачи наиболее сложны для численного решения.

Правая часть уравнения и краевые условия выбирались таким образом, чтобы его аналитическим решением была функция $u(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2} \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2)$. Аппроксимация проводилась на сетке 32×32 . Число Пекле изменялось в пределах от 10 до 10^6 , что при больших значениях ($Pe > 10^3$) приводило к системе линейных алгебраических уравнений с сильно несимметричной матрицей (т.е. кососимметричная составляющая матрицы намного больше ее симметричной составляющей в некоторой норме [1]).

Были проведены 2 группы вычислительных экспериментов.

Вариант 1. Задача без смешанных производных: $K_{12} = K_{21} = 0$. В этом случае получалась СЛАУ с пятидиагональной ленточной матрицей.

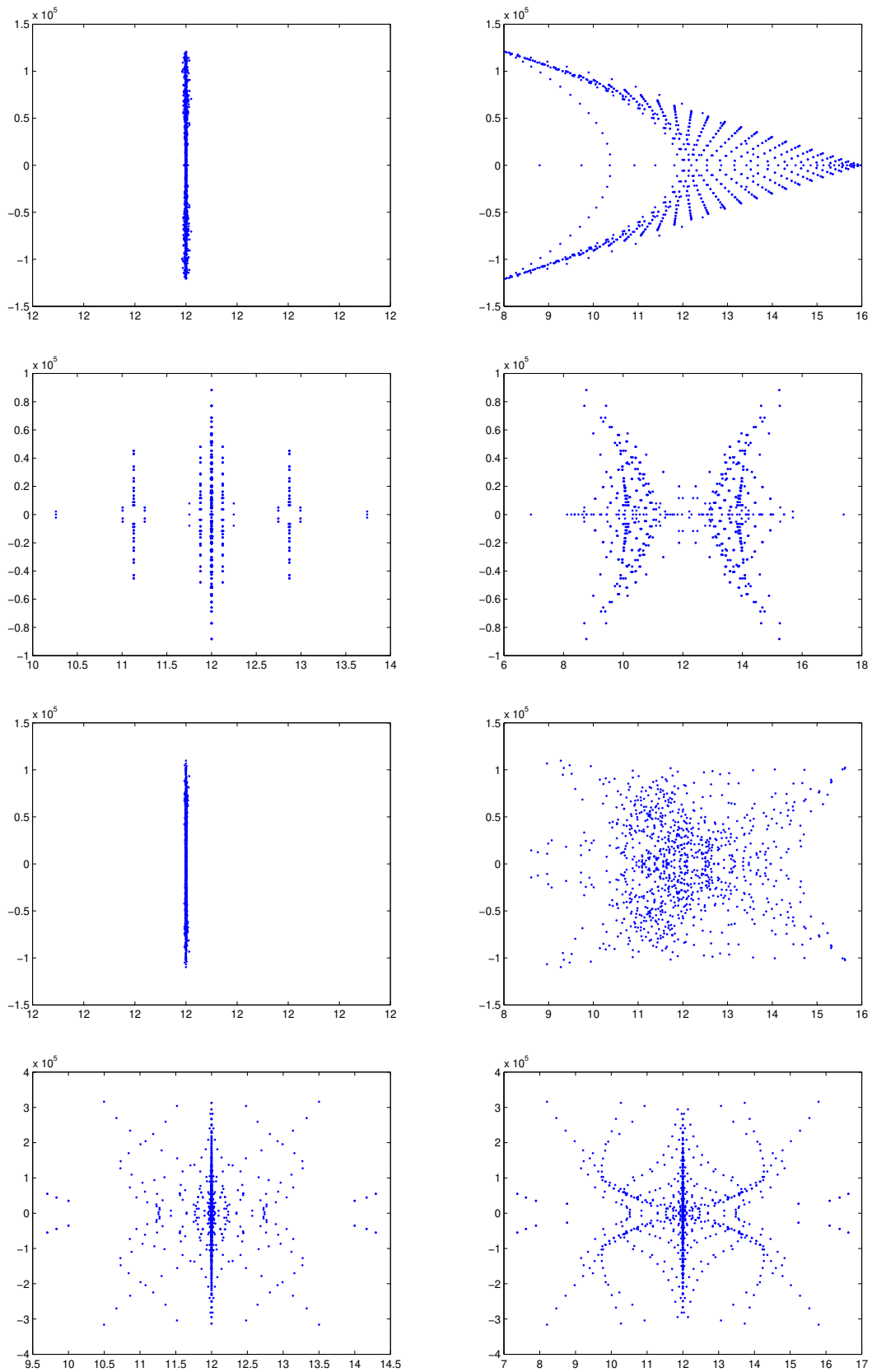


Рис. 1. Слева - распределение собственных значений для задач без смешанных производных, справа - для задач со смешанными производными, $Re = 10^6$, сетка 32×32 , Задачи 1-4 сверху вниз соответственно

Таблица 2. Слева – количество внешних (внутренних) итераций метода GMRES(10), справа – количество итераций метода BiCG

Pe	Вариант 1	Вариант 2	Pe	Вариант 1	Вариант 2
Задача 1			Задача 1		
10	2 (1)	31 (4)	10	11	181
10^3	16 (9)	22 (2)	10^3	129	191
10^6	7497 (2)	6684 (6)	10^6	857	1346
Задача 2			Задача 2		
10	1 (10)	38 (8)	10	11	184
10^3	16 (7)	33 (3)	10^3	101	212
10^6	6526 (7)	8086 (7)	10^6	527	902
Задача 3			Задача 3		
10	1 (10)	27 (7)	10	10	203
10^3	20 (7)	37 (10)	10^3	197	364
10^6	8917 (8)	8558 (5)	10^6	2524	3100
Задача 4			Задача 4		
10	2 (3)	24 (9)	10	17	208
10^3	44 (8)	71 (8)	10^3	380	628
10^6	7423 (4)	7438 (2)	10^6	1690	1784

Вариант 2. Задача со смешанными производными: $K_{12} = K_{21} = 1$ привела к семидиагональной ленточной матрице.

Результаты вычислений представлены в Таблице 2 и на Рисунке 1.

IV Выводы

Проведенные численные эксперименты для методов GMRES(10) и BiCG продемонстрировали, что они достаточно эффективно решают систему (5) и сходятся даже в тех случаях, когда матрица системы теряет диагональное преобладание и становится сильно несимметричной. Однако, присутствие смешанных производных в уравнении сильно увеличивает общее число итераций обоих методов при небольших значениях числа Пекле и практически не влияет на количество итераций методов при больших Pe .

На основании численных тестов видно, что количество итераций, необходимых для сходимости методов GMRES(10) и BiCG зависит от числа Пекле или точнее от числа кососимметрии $k = Pe * h/4$ и от распределения собственных чисел (Рис. 1).

Заметим, что для разреженных матриц объем вычислительных затрат на одной итерации метода GMRES(10) превосходит объем затрат в методе BiCG. Стоимость алгоритма GMRES(10) достаточно велика за счет хранения всех ортогональных векторов и метод BiCG выигрывает по сравнению с

методом GMRES(10) благодаря простоте своего алгоритма. Однако не стоит забывать, что метод BiCG является менее стабильным по сравнению с методом GMRES(10) и, соответственно, менее предсказуемым, поэтому его нельзя рекомендовать для решения несимметричных систем всех типов.

Можно сделать общий вывод, что выбранные методы эффективны не только в условиях изотропной среды, но и в случае появления анизотропии.

Литература

1. Крукиер Л. А. Неявные разностные схемы и итерационный метод их решения для одного класса систем квазилинейных уравнений // Известия ВУЗов. Математика. 1979. № 7. С. 41–52.
2. Крукиер Л. А., Мартынова Т. С. О влиянии формы записи уравнения конвекции–диффузии на сходимость метода верхней релаксации // Вычислительная математика и математическая физика. 1999. Т. 39. № 11. С. 1821–1827.
3. Самарский А.А. Теория разностных схем. Москва: Наука, 1989. 616 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНО-ГРАДИЕНТНЫХ СРЕД ПОСРЕДСТВОМ РЯДА ТЕЙЛОРА¹

Саянкина М.К.

Институт проблем нефти и газа РАН, Москва

Введение

Линейно-градиентные модели достаточно широко используются в различных разделах инженерно-технического направления науки, например, в машиностроении и материаловедении [1]. В линейной регрессии эти модели являются простым инструментом для приближения линейными функциями распределения численных значений экспериментальных данных.

В сейсмических средах скорость в пределах одного слоя может быть постоянной. Часто исследуются среды, состоящие из нескольких слоёв, имеющих определённые геофизические свойства. Возрастая с глубиной, численные значения сейсмической скорости могут быть приближены линейной функцией, имеющей два основных параметра: значение функции на нулевой глубине и значение наклона, которое указывает направление, или градиент. В статье анализируются результаты метода [2], разработанного для выбора одномерной скоростной модели, которая наилучшим образом отражает линейно-градиентные характеристики среды. Метод представляет собой пример применения разложения Тейлора для прикладных задач, в частности, для функции времени пробега сейсмической волны от источника сейсмических колебаний к регистрирующему приёмнику. В статье анализируется проблема, возникающая при использовании метода.

I Метод нахождения минимальной одномерной линейной градиентной модели

Метод разработан Т.А. Смагличенко и содержит два основных шага [2,3]. Первый шаг включает применение ряда Тейлора к отдельно взятому наблюдению. Значение искомой функции приближено суммой следующих значений: значения функции в точке, соответствующей стартовой линейно-градиентной модели, значения производной функции в данной точке, умноженной на смещение первого параметра относительно стартовой модели и значения производной функции, умноженной на смещение второго параметра относительно стартовой модели. Второй шаг заключается в использовании разложения Тейлора для всех наблюдений. Это позволяет записать

¹Работа выполнена в рамках темы НИР №АААА-А19-119013190038-2

систему линейных уравнений, решая которую методом наименьших квадратов, можно найти два параметра- поправки к стартовой модели. Проверкой адекватности параметров является близость к нулевым значениям двух статистических оценок (математического среднего и среднеквадратичного отклонения) значений, представляющих собой разности наблюдаемых значений, полученных в результате проведения экспериментов и модельных, определяемых двумя найденными параметрами. Если одновременная близость оценок к нулю не достигается, то процесс повторяется.

В отличие от предыдущего использования разложения Тейлора в сейсмологии [4–6] в методе [2] существует условие на равенство нулю математического среднего, то есть оценка должна быть лучшей несмещённой оценкой. Второе отличие в том, что разложение осуществляется только по двум параметрам, в то время как в работе [4] ищутся три поправки к каждому из определяемых гипоцентров, в уравнении, рассмотренном в [5], добавляются поправки к неизвестным параметрам 3D скоростной модели, в [6] число параметров зависит от числа слоёв в слоистой модели. Заметим, что поиск только двух параметров даёт возможность для лучшей численной устойчивости результатов.

II Проблема моделирования

Проблема моделирования возникает при оценке полученных в результате работы метода данных невязок времён пробега, которые могут соответствовать сложным средам. Не вся изучаемая площадь может характеризоваться линейными свойствами. Применяя метод [2], можно достичь малых численных значений статистических оценок, указывающих на линейность, однако смещение значений вокруг нулевой линии при этом может иметь место. Рисунок 1 иллюстрирует распределение невязок времён пробега сейсмической волны для одного из районов Исландии. Для построенной линейно-градиентной модели были получены следующие числовые характеристики: среднее (*mean*) равное 0.008 и среднеквадратичное отклонение (*std*), равное 0.06. Несмотря на достаточную в пределах существующей ошибки в данных близость к нулю оценок, можно видеть, что облако точек смещено в сторону отрицательных значений. Таким образом, линейно-градиентную модель для рассматриваемого района можно считать построенной, но с некоторой погрешностью. Для того, чтобы улучшить точность модели, предполагается продолжение итерационного процесса метода для одновременного достижения малых значений и несмещённости разности модельных и наблюдаемых значений относительно нулевой оси. Следовательно, вычисления модели по программным продуктам, обеспечивающим знание числовых характеристик процесса, являются недостаточными, необходимо создание программ с промежуточной графической визуализацией последовательных приближений к наиболее адекватной модели.

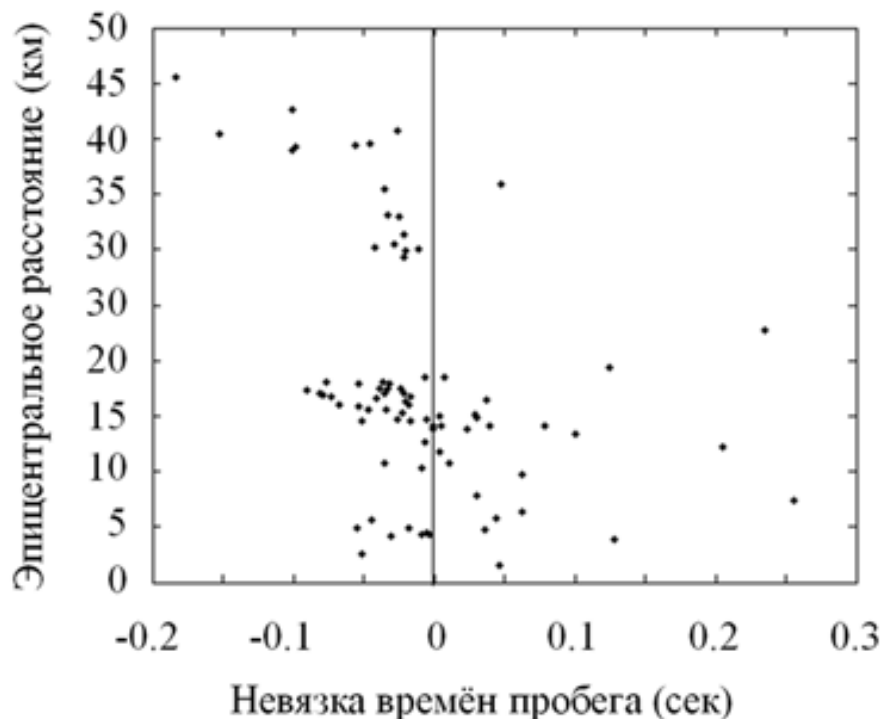


Рис. 1. Пример данных невязок времён пробега сейсмической волны. Из-за смещения облака точек влево модель определена неточно

Пример построения модели, отражающей линейные свойства среды, показан на рис. 2. Визуализация данных подтверждает несмещенность значений вокруг нулевой оси при достижении малых значений статистических оценок ($mean = 0.0022$; $std = 0.072$).

III Обсуждение исходных данных

Метод, анализируемый в данной статье, может быть применён для целей сейсморазведки, как к данным взрывов, так и локальных сейсмических событий, в том числе индуцированных землетрясений. Преимущество данных взрывов в том, что заведомо известно положение источника сейсмических колебаний. Однако сама взрывная сейсмология требует определённых финансовых вложений и не является дешёвой. Данные землетрясений записываются сетью постоянно действующих станций и могут быть использованы практически в свободном доступе. Существуют разные противоречивые мнения по поводу влияния разного рода взрывов на возникновение сильных землетрясений. Но неоспоримым является факт загрязнения окружающей среды [7].

В работе [8] был сделан сравнительный анализ результатов применения метода поиска минимальной линейно-градиентной модели к данным локальных сейсмических событий и результатов методов взрывной сейсмологии для двух геотермальных районов, подобных по своему геологическому составу:

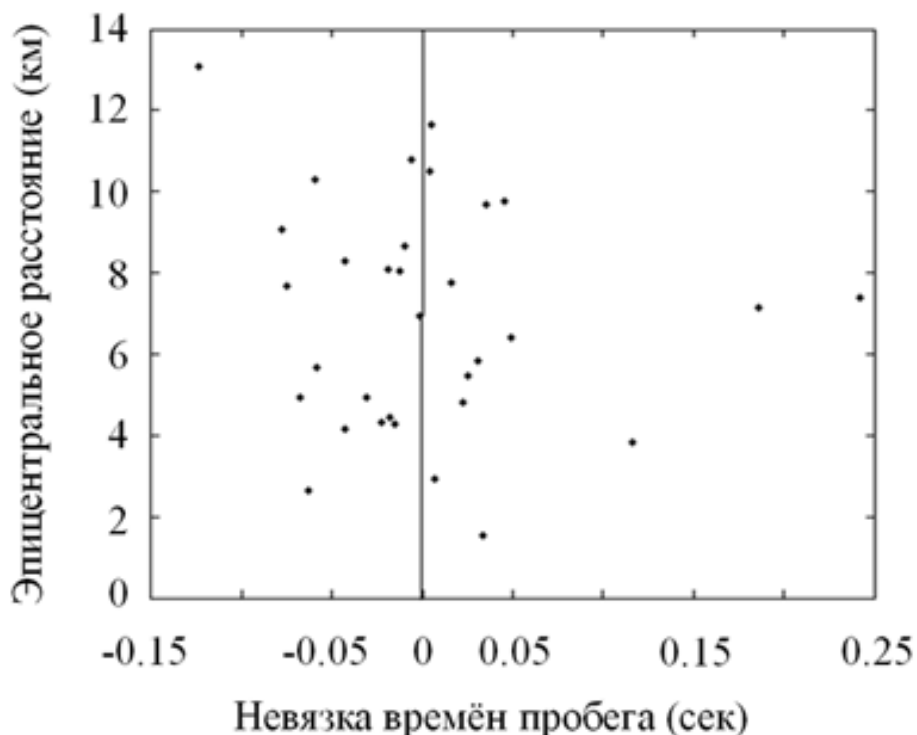


Рис. 2. Пример данных, хорошо определяющих линейно-градиентную модель

района Монте-Амиата, Италия и района Хайдаренди, юг Исландии. Оба района сложены из карбонатных пород приблизительно равного геологического возраста. Исследования показали, что до 3 км глубины численные значения сейсмических скоростей по слоям были приблизительно одинаковы. Это говорит о том, что обработка данных локальных сейсмических событий может дать результаты, сопоставимые с данными глубинного сейсмического зондирования. С другой стороны, и с экологической, и с экономической точки зрения лучше использовать информацию о микроземлетрясениях нежели проводить взрывные работы.

Благодарности

Выражаю благодарность оргкомитету XVIII Всероссийской Конференции-школы молодых исследователей (Абрау-Дюрсо-2019) за гибкость в решении вопросов, а также участникам обсуждения доклада.

Литература

1. *Audoly B., Hutchinson J.W.* Analysis of necking based on a one-dimensional model // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2016. Vol. 97. P. 68–91 .

2. Смагличенко Т.А., Соколова Н.В., Смагличенко А.В., Генкин А.Л., Саянкина М.К. Поиск градиентных моделей энергетически важных районов с учётом системы зон разуплотнения на земной поверхности // Управление развитием крупномасштабных систем MLSD'2019. Материалы двенадцатой международной конференции (1-3 октября 2019 г., Москва, Россия). Москва: ИПУ РАН, 2019. С. 630–633.
3. Smaglichenko T., Bjarnason I., Smaglichenko A., Jacoby W.R. Method to find the minimum 1D linear gradient model for seismic tomography // Fundamenta Informaticae. 2016. N 146. P. 211–217.
4. Geiger L. Herdbestimmung bei Erdbeben aus den Ankunftszeiten. Nachrichten von der Kёoniglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Goettingen // Math. Phys. Klasse. 1910. P. 331–349.
5. Aki K., Lee W.K.H. Determination of three-dimensional velocity anomalies under a seismic array using first, P-arrival times from local earthquakes, 1, A homogeneous initial model // J. geophys. Res. 1976. Vol. 81. P. 4381–4399.
6. Kissling E. Geotomography with local earthquake data // Reviews of Geophysics. 1988. Vol. 26. P. 659–698.
7. Добрынин А.А., Добрынин И.А. Экологическое влияние взрывов промышленных ВВ на окружающую среду // Взрывное дело. 2018. Вып. 120. N 77 С. 211–231.
8. Саянкина М.К. Два подхода для изучения районов природной и техногенной сейсмичности // Материалы Десятой международной научно-практической конференции: Анализ, прогноз и управление природными рисками с учетом глобального изменения климата "ГЕОРИСК-2018"(23-24 октября 2018 г., Москва, Россия). Москва: Российский университет дружбы народов, 2018. Том 1. С. 103–108.

ПОВЫШЕНИЕ КАЧЕСТВА РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕЙ ОЦЕНКИ СХОДСТВА СИГНАЛОВ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА РАСПОЗНАВАНИЯ ПАР СХОДНЫХ ЧИСЛОВЫХ СТРОК¹

Смагличенко А.В.

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
Москва*

Введение

В настоящее время проблемы, связанные с цифровой обработкой сигналов, охватывают не только технические, но и программные прикладные области, необходимые для решения большого спектра задач: в радиотехнике для оптимального приема сигналов и их распознавания [1]; в ультразвуковой дефектоскопии при когерентной обработке данных [2]; в теории спектрального анализа [3].

Автором был разработан численный метод распознавания пар сходных строк, который использовался для сравнения степени сходства сигналов. Метод был успешно опробован на различных сейсмических данных, однако, как показали исследования, в некоторых случаях актуальным является доработка алгоритма для получения более точного результата.

I Метод распознавания пар сходных числовых строк

На сегодняшний день в обработке данных широко используется применение статистических оценок. В большинстве случаев применение усредненных значений положительно влияет на результаты, поскольку снижается погрешность вычислений. Однако при генерации сигналов нередко возникают какие-либо искажения, обусловленные как технологическими факторами (различные шумы, невозможность сохранения точных параметров эксперимента), так и сбоями в работе оборудования или программного обеспечения. Также могут возникнуть такие аномалии, как например фазовый сдвиг. Проблемам точного определения разности фаз посвящено немало работ в различных областях [4, 5]. Таким образом, некоторые данные, полученные в результате эксперимента, могут существенно отличаться от основного набора других сигналов. Несмотря на уменьшение значений статистических оценок, такие данные необходимо исключить из расчетов. В противном случае могут возникнуть серьезные ошибки вычисления.

¹Работа выполнена в рамках темы НИР №10.331-17

Для решения подобных проблем автором был разработан численный метод распознавания пар сходных строк. Изначально метод применялся для анализа множества спектров мощности сейсмических сигналов, с целью выявления степени сходства [6]. Был разработан накопительный алгоритм, позволяющий произвести оценку сходства пар спектров. Затем метод применялся к данным сигналов.

Суть метода в следующем. Исходная матрица обрабатывается с помощью простых математических операций, позволяющих вычислить количество минимально разнящихся значений отдельно взятого сигнала от всех остальных. Для каждой строки матрицы (отдельный сигнал) вычисляется накопительный вектор-столбец, содержащий суммарные значения количества минимальных элементов. С помощью объединения всех вектор-столбцов, строится результирующая матрица. Для каждого исследуемого сигнала существует два значения, с помощью которых производится оценка сходства пары сигналов. Наиболее схожими сигналами, принято считать пары с максимальными значениями элементов результирующей матрицы.

II Тестирование метода на данных сейсмического сигнала

Тестирование разработанного алгоритма проводилось на данных, полученных в результате сейсмического эксперимента. Автором был создан специальный измерительный комплекс (Рис. 1), состоящий из пьезоэлектрических акселерометров с высокой полосой пропускания (0 – 20), стабилизирующей платы, обеспечивающей независимую работу каждого измерительного канала, и аналогово-цифрового преобразователя Е14-440 с программным обеспечением фирмы LCard [7].



Рис. 1. Созданный программно-измерительный комплекс для сбора данных [7]

Оборудование прошло тестирование посредством оригинального способа метрологической проверки, разработанного автором [8]. Для проведения эксперимента была выбрана площадка, расположенная на дне песчаного карьера в Московской области. Схема была построена таким образом, чтобы

максимально приблизить сбор данных в однородной среде к лабораторным условиям, тем самым ограничив воздействие на записываемые сигналы каких либо внешних факторов. Изначально поток данных от импульсных сигналов записывался в непрерывном виде, каждый массив записей содержал в себе миллионы элементов. В последующем сигналы были идентифицированы с помощью разработанного программного обеспечения [9]. Каждый сигнал представляет собой вектор амплитудных значений, имеющий длину 2000 элементов.

III Оценка работы алгоритма

В 2018 году была проведена исследовательская работа, в которой сравнивались результаты работы корреляционного метода с предлагаемым алгоритмом [10]. Применение метода позволило выделить именно те сигналы, которые максимально характеризуют стохастический процесс. Анализ результативности работы метода позволил понять, что элементы результирующей матрицы, более четко обозначают разницу в сигналах, чем метод корреляционного анализа. Тем не менее, метод корреляционного анализа оказался наиболее эффективен в определении сигналов с фазовым сдвигом.

Однако в процессе исследования была выявлена пара сигналов, которая не имела ярко выраженного визуального сходства (Рис. 2), но определялась методом как пара сходных строк. При этом корреляционная оценка сходства сигналов показала аналогичный результат. Другими словами, оба метода выявили проблемы моделирования. Для предотвращения подобных аномалий предполагается включение в работу программного алгоритма инструментов, которые позволят ограничить максимально допустимую разницу между двумя сигналами.

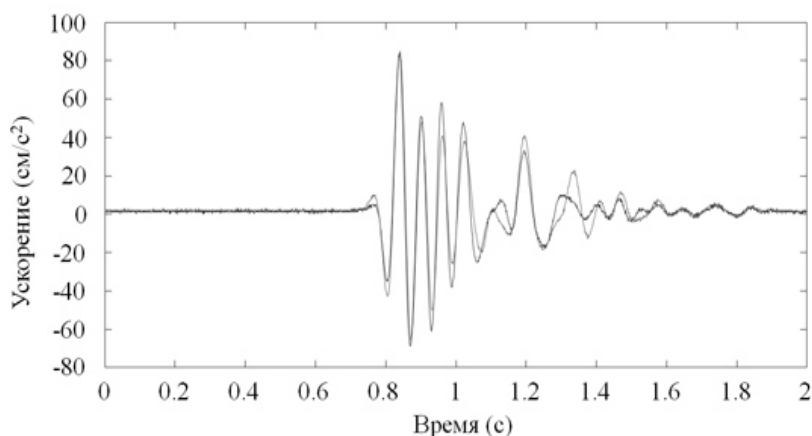


Рис. 2. Пара сигналов, не имеющая ярко выраженного визуального сходства

Благодарности

Хочу выразить благодарность организаторам XVIII Всероссийской Конференции-школы молодых исследователей (Абрау-Дюрсо, 2019) за квалифицированную помощь и радушный прием.

Литература

1. *Тропченко А.Ю., Тропченко А.А.* Цифровая обработка сигналов методы предварительной обработки. Учебное пособие по дисциплине "Теоретическая информатика" Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, 2009. 88 с.
2. *Бадалян В.Г.* Разработка когерентных методов и средств ультразвуковой дефектометрии металлов. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 05.11.13. Москва: Научно Производственный Центр Неразрушающего Контроля "Эхо+" 2006. 296 с.
3. *Лукин А.* Введение в цифровую обработку сигналов (математические основы). Лаборатория компьютерной графики и мультимедиа. Москва: Издательство МГУ, 2002. 44 с
4. *Varypaev A., Kushnir A.* Algorithm of micro-seismic source localization based on asymptotic probability distribution of phase difference between two random stationary Gaussian processes // GEM - International Journal on Geomathematics. 2018. Vol. 9. Is. 2 P. 335–358.
5. *Яковлева Т.В.* Метод определения фазового сдвига квазигармонических сигналов, основанный на анализе огибающей // Компьютерная оптика. 2017. Том 41. N 6 С. 950–956.
6. *Смагличенко А.В., Смагличенко Т.А., Саянкина М.К.* Подход к разработке жадных алгоритмов выделения неискажённых данных в задачах сейсмической разведки // Эвристические алгоритмы и распределенные вычисления. 2015. Том 2. N 1 С. 45–56.
7. *Смагличенко А.В.* Программно-измерительный комплекс для оценки локализации неоднородности по сейсмическим данным // Сейсмические приборы. 2014. Том 50. N 2 С. 20–38.
8. *Смагличенко А.В.* Способ метрологической проверки измерительных каналов для сигналов высокой частоты // Вектор Науки ТГУ. 2014. N 1 С. 66–70.
9. *Смагличенко А.В.* Программный алгоритм выделения данных сигнала: пример сейсмической информации // Современные информационные технологии: тенденции и перспективы развития. Материалы XXVI

научной конференции (Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, 18-19 апреля 2019 г.) Ростов-на-Дону - Таганрог: Издательство Южного федерального университета, 2019. С. 248–252.

10. *Smaglichenko A.V., Smaglichenko T.A., Genkin A.L., Melnikov B.F.* An Investigation on Signal Comparison by Measuring of Numerical Strings Similarity // АЕТА 2018 - Recent Advances in Electrical Engineering and Related Sciences: Theory and Application. Lecture Notes in Electrical Engineering. Ostrava: Springer, 2019. Vol. 554. P. 185–194.

ТЕСТИРОВАНИЕ ПРЕДПОЛАГАЕМЫХ СТРУКТУР КАК ОПРЕДЕЛЯЮЩИЙ ФАКТОР РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНВЕРСИОННЫХ ПРОБЛЕМ¹

Смагличенко Т.А.

Институт проблем нефти и газа РАН, Москва

Введение

Обращение данных инструментальных наблюдений имеет широкое применение при решении прикладных задач в различных областях, например, при моделировании нефтяных резервуаров, электрических цепей, энергосистем и т.д. В каждом случае существует своё физическое уравнение, связывающее реальное измерение с параметрами задаваемой модели. Для множества измерений при возможности линейной аппроксимации возникает необходимость решения систем линейных уравнений. На адекватность решения системы влияют: 1) ошибка параметризации (размер сетки), приводящая к проблеме неединственности решения [1]; 2) ошибка в наблюдаемых данных в правой части системы, норму которой невозможно оценить (см., например, [2]); 3) численные проблемы, связанные с ошибкой округления при решении больших и разреженных систем [3]. В данной статье наше внимание фокусируется на проблеме (1), которая напрямую связана с масштабом определяемой структуры.

I Разрешение мелко и крупномасштабных структур

Известно, что при условии малости ошибок измерений для методов псевдообращения решения систем вида $Ax = b$ в качестве характеристики близости получаемого решения к минимальному решению в смысле метода наименьших квадратов используются параметры разрешения [4].

$$R = (A^T A)^{-1} A^T A \quad (1)$$

В то же время для проверки разрешения модели не исключают применение так называемого теста "шахматной доски" [5], когда неизвестный вектор задаётся чередованием отрицательных и положительных значений, равных по модулю. Такие структуры считают мелкомасштабными. Например, для частного случая вектора малой размерности имеем:

¹Работа выполнена в рамках темы НИР №АААА-А19-119013190038-2

$$x^c = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Умножая матрицу A на данный вектор, мы получаем отклик системы, некий вектор b^* . Используя этот вектор в качестве правой части, мы восстанавливаем решение x^* с помощью инверсионной схемы и исследуем его разницу с введённым вектором x^c . Такой способ стал достаточно популярным инструментом для проверки точности инверсионного метода при восстановлении решения для исследуемого набора экспериментальных данных. Более того согласно утверждению, сделанному в [6]: если метод позволяет точно восстановить мелкомасштабную структуру, то он тем более способен восстановить крупномасштабную структуру, то есть заданную, например, вектором вида:

$$x^l = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Данное утверждение, как и применение теста "шахматной доски" было подвергнуто резкой критике в [7]. В качестве метода восстановления использовался метод Ланцоша, который является базой LSQR алгоритма, широко применяемого для решения больших и разреженных систем [8]. Бидиагонализация Ланцоша предполагает последовательное построение комбинации ортогональной системы векторов для симметричной матрицы, таких, что результирующий вектор будет равен правой части системы. Скалярные коэффициенты определяются из условия равенства нулю производной функционала в смысле метода наименьших квадратов (мнк). Несмотря на последовательное (итерационное) приближение к решению, метод Ланцоша относится к проекционным методам, что позволяет построить рекуррентные формулы для прямого вычисления решения [8–10]. Это обуславливает его связь с методом псевдообращения. Согласно доказательства в [11] псевдоортогональная система векторов может быть получена из проекционной системы при соответствующих условиях на матрицу Грама. Таким образом, прямая связь метода Ланцоша и метода псевдообращения очевидна. В [12] показано, что при решении практических задач использование LSQR при малом числе итераций аналогично использованию процедуры метода псевдообращения.

Согласно эксперименту, проведённому в [7], метод Ланцоша достаточно эффективен для восстановления теста "шахматной доски", имитирующей мелкомасштабную структуру, но не способен восстановить решение, определяемое сложной крупномасштабной структурой, то есть вектором x^l . Поэтому авторы [7] призвали активно использовать параметры разрешения,

заданные, в том числе уравнением (1), вместо применения тестов.

II Инновационный алгоритм для разрешения однородной крупномасштабной структуры

В работе [13] был проведён численный эксперимент, идентичный тому, что был рассмотрен в [7]. Было доказано, что модель простой однородной крупномасштабной структуры может быть восстановлена с помощью разработанного алгоритма возможных направлений покоординатного спуска. Однородная крупномасштабная структура может быть представлена, например, произвольным вектором вида:

$$x^h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Инновационный численный алгоритм [13] является аналогом метода последовательного вычитания, известного в геофизике. Однако выбор численного решения осуществляется на основе дополнительного критерия, разработанного автором настоящей статьи, и полученного автором доказательства сходимости метода. В общепринятом методе спуска координата решения ищется из условия равенства нулю производной функционала мнк и его минимального значения (см. [14]). В [13] приведены математические выражения для вычисления координат, на которых минимум функционала для матрицы произвольного вида может достигаться.

III Новая модификация метода исключения Гаусса для разрешения сложной крупномасштабной структуры

В работе [15] представлена другая разработка автора настоящей статьи: новый метод для решения больших и разреженных систем линейных уравнений. Исходная матрица разбивается на подматрицы, начиная с малого размера при условии максимального заполнения подматриц ненулевыми элементами. Для соответствующих подсистем методом Гаусса-Жордана находятся «решения-кандидаты», отвечающие критерию совместности (теорема Кронекера-Капелли). Для каждой из неизвестных координат строится числовая последовательность, состоящая из «решений-кандидатов», выделяется сходящаяся под-последовательность с последующим утверждением

решения. После утверждения решения значение найденной координаты исключается из правой части системы. Процесс определения следующих подсистем повторяется. В [16] метод был успешно протестирован для восстановления сложной крупномасштабной структуры (см. секцию I) при равных условиях эксперимента, рассмотренного в [7]. Применение метода к 8049 сейсмическим событиям района Нагано (Япония), системе размерности 103148×19399 , позволило достаточно точно определить положение в пространстве зоны разлома толщиной 100 м [16]. В [17] метод прошёл проверку на сложной крупномасштабной модели северо-востока Исландии при использовании экспериментальных данных локальных землетрясений (матрица размерности 4000×380).

Важно отметить, что при обращении данных для крупномасштабных структур параметры разрешения общепринятого метода Ланцоша действительно проявили его неспособность восстановить модель, в то время как параметры разрешения инновационных технологий также верно отразили их высокую разрешающую способность в отношении данных структур. Таким образом, тезис о решающей роли параметров разрешения, найденных только сингулярным разложением, является ограниченным. Решая систему уравнений, исследователь не знает, какова реальная структура изучаемого объекта. Автор полагает, что фактором, определяющим качественное решение системы, является создание в каждом случае своей тестовой модели, наиболее приближенной к реальной структуре, путём использования всей имеющейся априорной информации об объекте. Комбинирование как широко применяемых, так и инновационных алгоритмов поможет выработать стратегию, необходимую для восстановления такой модели путём обращения искусственных данных и соответственно для последующего поиска адекватного решения системы с реальными измерениями.

Благодарности

Искренне благодарю организаторов XVIII Всероссийской Конференции-школы молодых исследователей (Абрау-Дюрсо, 2019) за высокий технический уровень представления материалов и за анализ новых результатов. Особую благодарность выражаю Муратовой Г.В., а также Шабас И.Н. за исключительное внимание к участникам и помощь.

Литература

1. Тихонов А.Н. О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивом методе их решения // Доклады Академии наук СССР. 1965. Том 163. № 3 С. 591–594

2. *Pavlis G.L.* Appraising earthquake hypocenter location errors: a complete practical approach for single-event locations // *Bull. Seism. Soc. Am.* 1986. Vol. 76. P. 1699–1717.
3. *Капорин И.Е.* Использование внутренних итераций метода сопряженных градиентов при решении больших разреженных нелинейных задач оптимизации // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2003. Vol. 43. N 6. P. 802–807.
4. *Courant R., Hilbert D.* *Methods of Mathematical Physics.* New York: Interscience Publisher, 1953. 561 p.
5. *Humphreys E., Clayton R.W.* Adaptation of back projection tomography to seismic travel time problems // *Journal of Geophysical Research.* 1988. Vol. 93. P. 1073–1085.
6. *Fukao Y., Obayashi M., Inoue H., Nenbai M.* Subducting slabs stagnant in the mantle transition zone // *J. Geophys. Res.* 1992. Vol. 97. P. 4809–4822.
7. *Leveque J.J., Rivera L., Wittlinger G.* On the use of the checkerboard test to assess the resolution of tomographic inversions // *Geophys. J. Int., Wiley-Blackwell Publishing.* 1993. Vol. 115. P. 313–318.
8. *Paige C.C., Saunders M.A.* LSQR: an algorithm for sparse linear equations and sparse least squares // *ACM Trans. Math. Soft.* 1982. Vol. 8. N 1. P. 43–71, 195–209.
9. *Lanczos C.* *Applied Analysis.* NJ: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1956. 524 p.
10. *Баландин Н.Ю., Шурина Н.П.* Методы решения СЛАУ большой размерности. Новосибирск: изд. НГТУ, 2000. 70 с.
11. *Воеводин В.В.* *Линейная алгебра.* М: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980. 401 с.
12. *Yao Z.S., Roberts R.G., Tryggvason A.* Calculating resolution and covariance matrices for seismic tomography with the LSQR method // *Geophys. J. Int.* 1999. Vol. 138. P. 886–894.
13. *Smaglichenko T.A., Nikolaev A.V., Horiuchi S., Hasegawa A.* The method for consecutive subtraction of selected anomalies: the estimated crustal velocity structure in the 1996 Onikobe (M = 5.9) earthquake area, northeastern Japan // *Geophys. J. Int., Wiley-Blackwell Publishing.* 2003. Vol. 153. P. 627–644.
14. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* *Численные методы.* М: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1987. 600 с.
15. *Smaglichenko T.A.* Modification of Gauss elimination for the complex seismic data // *Numer. Anal. Appl. Math. ICNAAM 2011AIP Conf. Proc., American Institute of Physics* 978-0-7354-0956-9/30.00. 2011. Vol. 1389. P. 1003–1006.

16. *Smaglichenko T.A., Horiuchi S., Kaori T.* A differentiated approach to the seismic tomography problem: method, testing and application to the western Nagano fault area (Japan) // Int. J. Appl. Earth Obs. Geoinf., Elsevier Publisher. 2012. Vol. 16. P. 27–41.
17. *Смагличенко Т.А., Николаев А.В., Якоби В.Р.* Раздельное определение скоростной структуры и параметров гипоцентров землетрясений на основе дифференцированного подхода // Доклады Академии Наук. 2010. Том 433. N 4. С. 1–5.

ЭКОНОМИЧНЫЙ ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБРАТНОЙ К ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Сорокин С.Б.

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, г. Новосибирск,
Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск*

Введение

Широко известны экономичные алгоритмы численного решения прямой задачи для уравнения Лапласа в стандартных областях (прямоугольник, круг), основанные на методе разделения переменных. Цель данного исследования состоит в построении экономичного прямого алгоритма для численного решения некорректной задачи - задачи Коши для эллиптического уравнения допускающего разделение переменных.

Существующие прямые алгоритмы решения задачи Коши для эллиптического уравнения применимы только для случая постоянных коэффициентов и основаны на наличии аналитического решения задачи продолжения в стандартной области. Представленный в работе алгоритм можно применять к эллиптическому оператору с переменными коэффициентами (конечно, специального вида). В этом случае нельзя рассчитывать на аналитическое решение. Алгоритм позволяет получить решение дискретной задачи за число операций порядка N , где N – число уравнений в дискретной задаче.

I Практическая задача (теплопроводность)

Тело, занимающее область $\Omega = (a, b) \times (c, d)$, тепло изолировано по всем участкам границы, кроме правой.

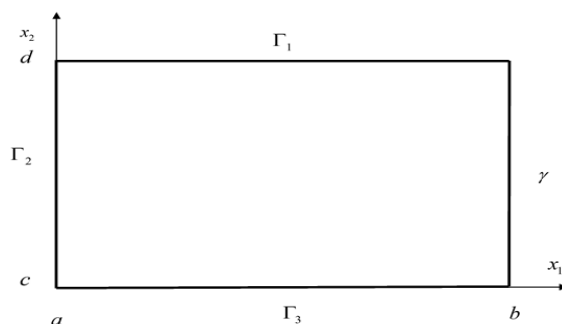


Рис. 1. Область $\Omega = (a, b) \times (c, d)$

Имеется возможность измерить температуру на левой стороне границы. Требуется определить температуру на правой, недоступной части границы.

II Математическая модель (Задача продолжения)

В области $\Omega = (a, b) \times (c, d)$ найти решение задачи Коши (K - тензор теплопроводности)

$$-div(K grad u) = 0, \quad (x_1, x_2) \in \Omega,$$

$$u(x_1, x_2)|_{\Gamma_2} = u_0(x_2), \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3} = 0.$$

Подлежащая определению температура на границе γ есть след решения задачи Коши на этой границе:

$$u(x_1, x_2)|_{\gamma} = ?$$

III Редукция задачи продолжения к обратной задаче

Задача Коши для эллиптического уравнения является одной из классических некорректных задач. Одним из широко применяемых подходов к решению этой задачи является сведение ее к обратной задаче [1], [2]:

Определить функцию $q(x_2)$ из отношений

$$-div(K grad u) = 0, \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} = 0, \quad u(x_1, x_2)|_{\gamma} = q(x_2), \quad (3)$$

используя дополнительную информацию

$$u(x_1, x_2)|_{\Gamma_2} = u_0(x_2). \quad (4)$$

Другими словами, среди всех задач (1)-(3), отличающихся друг от друга функцией $q(x_2)$, необходимо указать такую задачу (такую функцию $q(x_2)$) что решение $u(x_1, x_2)$ задачи (1)-(3) удовлетворяет равенству (4) – дополнительная информация.

Хорошо известно, что в случае когда тензор теплопроводности имеет вид $K = diag(k_1(x_1), k_2(x_1))$, для численного решения прямой задачи (1)-(3)

существуют экономичные прямые методы, основанные на методе разделения переменных.

Оказывается, для обратной задачи (1)-(4) метод разделения переменных тоже позволяет в рассматриваемом случае строить экономичные прямые алгоритмы.

Далее для задачи (1)-(4) с $K = \text{diag}(k_1(x_1), k_2(x_1))$ предлагается экономичный прямой численный метод, основанный на широко известном алгоритме – разложение в однократный ряд [4].

IV Дискретизация обратной задачи

Введем сетки

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_1 &= \{x_{1,i} = x_{1,i-1} + h_1, 1 \leq i \leq N_1 + 1, x_{1,0} = a, x_{1,N_1+1} = b, h_1 = \frac{b-a}{N_1+1}\}, \\ \bar{\omega}_2 &= \{x_{2,j} = x_{2,j-1} + h_2, 1 \leq j \leq N_2 + 1, x_{2,0} = c, x_{2,N_2+1} = d, h_2 = \frac{d-c}{N_2+1}\}, \\ \bar{\omega} &= \{x_{i,j} = (x_{1,i}, x_{2,j}) \in \bar{\Omega}, x_{1,i} \in \bar{\omega}_1, x_{2,j} \in \bar{\omega}_2\}.\end{aligned}$$

Скалярные произведения в гильбертовых пространствах сеточных функций $H_{\bar{\omega}_1}, H_{\bar{\omega}_2}$ и $H_{\bar{\omega}}$ определенных на сетках $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$ и $\bar{\omega}$, соответственно зададим следующим образом

$$\begin{aligned}(u^h, v^h)_{\bar{\omega}_1} &= \frac{h_1}{2} u^h(x_{1,0}) v^h(x_{1,0}) + \sum_{i=1}^{N_1} u^h(x_{1,i}) v^h(x_{1,i}) h_1 + \frac{h_1}{2} u^h(x_{1,N_1+1}) v^h(x_{1,N_1+1}), \\ (u^h, v^h)_{\bar{\omega}_2} &= \frac{h_2}{2} u^h(x_{2,0}) v^h(x_{2,0}) + \sum_{j=1}^{N_2} u^h(x_{2,j}) v^h(x_{2,j}) h_2 + \frac{h_2}{2} u^h(x_{2,N_2+1}) v^h(x_{2,N_2+1}), \\ (u^h, v^h)_{\bar{\omega}} &= (1, (u^h, v^h)_{\bar{\omega}_2})_{\bar{\omega}_1}.\end{aligned}$$

Дискретный аналог обратной задачи (1)-(4) сформулируем следующим образом: среди всех задач

$$\Lambda_1 u^h(x_{1,i}, x_{2,j}) + k_2(x_{1,i}) \Lambda_2 u^h(x_{1,i}, x_{2,j}) = 0, \quad i = \overline{0, N_1}, j = \overline{0, N_2 + 1} \quad (5)$$

$$u^h(x_{1,N_1+1}, x_{2,j}) = q^h(x_{2,j}), \quad j = \overline{0, N_2 + 1} \quad (6)$$

необходимо указать такую задачу (такую функцию $q^h(x_{2,j})$), что решение $-u^h(x_{1,i}, x_{2,j})$ задачи (5)-(6) удовлетворяет равенству

$$u^h(x_{1,0}, x_{2,j}) = u_0(x_{2,j}), \quad x_{2,j} \in [c, d], \quad (7)$$

(дополнительная информация).

Здесь действие операторов Λ_1 и Λ_2 определяется следующим образом [3], [4]:

$$\Lambda_1 y^{(1)}(x_{1,i}) = \begin{cases} -\frac{2}{h_1} k_1(x_{1,0} + \frac{h_1}{2}) y_{x_1}^{(1)}(x_{1,0}), & i = 0, \\ -(k_1(x_{1,i} - \frac{h_1}{2}) y_{\bar{x}_1}^{(1)})_{x_1}(x_{1,i}), & i = \overline{1, N_1}, \end{cases}$$

$$\Lambda_2 y^{(2)}(x_{2,j}) = \begin{cases} -\frac{2}{h_2} y_{x_2}^{(2)}(x_{2,0}), & j = 0, \\ -y_{\bar{x}_2 x_2}^{(2)}(x_{2,j}), & j = \overline{1, N_2}, \\ \frac{2}{h_2} y_{\bar{x}_2}^{(2)}(x_{2, N_2+1}), & j = N_2 + 1. \end{cases}$$

V Численное решение дискретной задачи

V.1 Общая схема алгоритма

Для изложения алгоритма нам понадобится спектральная задача

$$\Lambda_2 \mu^{(2)}(x_{2,j}) = \lambda^{(2)} \mu^{(2)}(x_{2,j}), \quad j = \overline{0, N_2 + 1}, \quad (8)$$

собственные числа и собственные функции которой выписываются в явном виде [3], [4]:

собственные функции $\mu_m^{(2)}$, $m = 0, 1, \dots, N_2 + 1$:

$$\mu_m^{(2)}(x_{2,j}) = \sqrt{\frac{2}{d-c}} \cos\left(\frac{m\pi(x_{2,j}-c)}{d-c}\right), \quad m = 1, 2, \dots, N_2, \quad j = \overline{0, N_2 + 1}$$

$$\mu_0^{(2)}(x_{2,j}) = \sqrt{\frac{1}{d-c}}, \quad j = \overline{0, N_2 + 1}$$

$$\mu_{N_2+1}^{(2)}(x_{2,j}) = \sqrt{\frac{1}{d-c}} \cos\left(\frac{(N_2+1)\pi(x_{2,j}-c)}{d-c}\right), \quad j = \overline{0, N_2 + 1},$$

$$(\mu_m^{(2)}, \mu_l^{(2)})_{\bar{\omega}_2} = \delta_{ml}$$

собственные числа:

$$\lambda_m^{(2)} = \frac{4}{h_2^2} \sin^2\left(\frac{m\pi h_2}{2(d-c)}\right), \quad m = 0, 1, \dots, N_2 + 1.$$

Разложим сеточную функцию $q^h(x_{2,j})$ из (6) по базису составленному из собственных функций этой спектральной задачи

$$q^h(x_{2,j}) = \sum_{k=0}^{N_2+1} \alpha_k \mu_k^{(2)}(x_{2,j}). \quad (9)$$

Тогда решение задачи (5)-(6) представимо, в силу ее линейности, в виде линейной комбинации

$$u^h(x_{1,i}, x_{2,j}) = \sum_{k=0}^{N_2+1} \alpha_k w_k(x_{1,i}, x_{2,j}) \quad (10)$$

решений $w_k(x_{1,i}, x_{2,j})$ базисных задач ($k = \overline{0, N_2 + 1}$)

$$\Lambda_1 w_k(x_{1,i}, x_{2,j}) + k_2(x_{1,i}) \Lambda_2 w_k(x_{1,i}, x_{2,j}) = 0, \quad i = \overline{0, N_1}, \quad j = \overline{0, N_2 + 1}, \quad (11)$$

$$w_k(x_{1, N_1+1}, x_{2,j}) = \mu_k^{(2)}(x_{2,j}), \quad j = \overline{0, N_2 + 1}. \quad (12)$$

Очевидно, что отыскание $q^h(x_{2,j})$ эквивалентно отысканию коэффициентов α_k разложения (9). А их, после того как решены задачи (11)-(12), можно определить из дополнительного условия (7)

$$u^h(x_{1,0}, x_{2,j}) = \sum_{k=0}^{N_2+1} \alpha_k w_k(x_{1,0}, x_{2,j}) = u_0(x_{2,j}).$$

V.2 Численное решение базисной задачи

Краевые условия Дирихле (12) задачи (11)-(12) учтем в правой части. В результате получим задачу

$$\Lambda_1 w_k(x_{1,i}, x_{2,j}) + k_2(x_{1,i}) \Lambda_2 w_k(x_{1,i}, x_{2,j}) = f_k(x_{1,i}, x_{2,j}), \quad i = \overline{0, N_1}, \quad j = \overline{0, N_2 + 1}, \quad (13)$$

$$w_k(x_{1, N_1+1}, x_{2,j}) = 0, \quad j = \overline{0, N_2 + 1}, \quad (14)$$

с правой частью задаваемой формулой

$$f_k(x_{1,i}, x_{2,j}) = \begin{cases} 0, & i = \overline{0, N_1 - 1}, \quad j = \overline{0, N_2 + 1}, \\ k_1(x_{1, N_1} + \frac{h_1}{2}) \frac{\mu_k^{(2)}(x_{2,j})}{h_1^2}, & i = N_1, \quad j = \overline{0, N_2 + 1}. \end{cases} \quad (15)$$

Задачу (13)-(15) будем решать методом разложения в однократный ряд [4].

Рассматривая сеточные функции $w_k(x_{1,i}, x_{2,j})$ и $f_k(x_{1,i}, x_{2,j})$ при фиксированном i как сеточные функции аргумента j , разложим их по базису $\mu_m^{(2)}$, $m = 0, 1, \dots, N_2 + 1$:

$$w_k(x_{1,i}, x_{2,j}) = \sum_{m=0}^{N_2+1} w_{k,m}(i) \mu_m^{(2)}(x_{2,j}), \quad w_{k,m}(i) = (w_k(x_{1,i}, x_{2,j}), \mu_m^{(2)}(x_{2,j}))_{\bar{\omega}_2}, \quad (16)$$

$$f_k(x_{1,i}, x_{2,j}) = \sum_{m=0}^{N_2+1} f_{k,m}(i) \mu_m^{(2)}(x_{2,j}), \quad f_{k,m}(i) = (f_k(x_{1,i}, x_{2,j}), \mu_m^{(2)}(x_{2,j}))_{\bar{\omega}_2}.$$

Подставляя эти разложения в уравнение (13) и учитывая (8) имеем

$$\left[\sum_{m=0}^{N_2+1} \Lambda_1 w_{k,m}(i) + \lambda_m^{(2)} k_2(x_{1,i}) w_{k,m}(i) \right] \mu_m^{(2)}(x_{2,j}) = \sum_{m=0}^{N_2+1} f_{k,m}(i) \mu_m^{(2)}(x_{2,j}).$$

Используя линейную независимость собственных функций, получаем для каждого номера $m = 0, 1, \dots, N_2 + 1$ систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} \Lambda_1 w_{k,m}(i) + \lambda_m^{(2)} k_2(x_{1,i}) w_{k,m}(i) &= f_{k,m}(i), \quad i = \overline{0, N_1}, \\ w_{k,m}(N_1 + 1) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

В соответствии с введенными скалярными произведениями и видом $f_k(x_{1,i}, x_{2,j})$ (смотри (15)) для каждого фиксированного номера k имеем

$$f_{k,m}(i) = (f_k(x_{1,i}, x_{2,j}), \mu_m^{(2)}(x_{2,j}))_{\bar{\omega}_2} = \begin{cases} 0, & i = \overline{0, N_1 - 1}, m = \overline{0, N_2 + 1}, \\ k_1(x_{1, N_1 + \frac{h_1}{2}}) \left(\frac{\mu_k^{(2)}}{h_1^2}, \mu_m^{(2)} \right)_{\bar{\omega}_2} = \frac{k_1(x_{1, N_1 + \frac{h_1}{2}})}{h_1^2} \delta_{km}, \\ i = N_1, m = \overline{0, N_2 + 1}. \end{cases} \quad (18)$$

Поэтому при фиксированном k все системы (17) (предназначенные для определения коэффициентов Фурье $w_{k,m}(i)$, $i = \overline{0, N_1}$; $m = \overline{0, N_2 + 1}$) для номеров $m \neq k$ будут однородными. Следовательно их решения тождественно равны нулю:

$$w_{k,m}(i) = 0, \quad i = \overline{0, N_1}, \quad \forall m \neq k.$$

Единственной неоднородной системой из (17) будет система с номером $m = k$. Имея ввиду (18), эта система записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 w_{k,k}(i) + \lambda_k^{(2)} k_2(x_{1,i}) w_{k,k}(i) &= 0, \quad i = \overline{0, N_1 - 1}, \\ \Lambda_1 w_{k,k}(N_1) + \lambda_k^{(2)} k_2(x_{1, N_1}) w_{k,k}(N_1) &= k_1(x_{1, N_1 + \frac{h_1}{2}}) \frac{1}{h_1^2}, \\ w_{k,k}(N_1 + 1) &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Суммируя вышесказанное, решение (16) базисной задачи (13)-(15) с номером k записывается в форме

$$w_k(x_{1,i}, x_{2,j}) = w_{k,k}(i) \mu_k^{(2)}(x_{2,j}). \quad (20)$$

V.3 Решение дискретной обратной задачи

Как было отмечено ранее, решение задачи (5)-(6) представимо в виде линейной комбинации

$$u^h(x_{1,i}, x_{2,j}) = \sum_{k=0}^{N_2+1} \alpha_k w_k(x_{1,i}, x_{2,j})$$

решений $w_k(x_{1,i}, x_{2,j})$ базисных задач (13)-(15) ($k = \overline{0, N_2 + 1}$). С учетом (20) имеем

$$u^h(x_{1,i}, x_{2,j}) = \sum_{k=0}^{N_2+1} \alpha_k w_{k,k}(i) \mu_k^{(2)}(x_{2,j}).$$

На левой границе сеточной области полученное решение принимает вид

$$u^h(x_{1,0}, x_{2,j}) = \sum_{k=0}^{N_2+1} \alpha_k w_{k,k}(0) \mu_k^{(2)}(x_{2,j}).$$

Разложим по базису $\mu_k^{(2)}(x_{2,j})$, $k = \overline{0, N_2 + 1}$ дополнительную информацию (7)

$$u_0(x_{2,j}) = \sum_{k=0}^{N_2+1} \beta_k \mu_k^{(2)}(x_{2,j}).$$

Приравняем, в соответствии с (7), два последних разложения

$$\sum_{k=0}^{N_2+1} \alpha_k w_{k,k}(0) \mu_k^{(2)}(x_{2,j}) = \sum_{k=0}^{N_2+1} \beta_k \mu_k^{(2)}(x_{2,j}).$$

А значит, искомые коэффициенты α_k равны

$$\alpha_k = \frac{\beta_k}{w_{k,k}(0)}. \quad (21)$$

Подставляя их в (9), получаем решение дискретной обратной задачи (5)-(6)

$$q^h(x_{2,j}) = \sum_{k=0}^{N_2+1} \frac{\beta_k}{w_{k,k}(0)} \mu_k^{(2)}(x_{2,j}).$$

VI Алгоритм решения дискретной обратной задачи

Сформулируем основные этапы решения дискретной обратной задачи методом разложения в одинарный ряд.

1. Вычислить коэффициенты Фурье β_k дополнительной информации (БПФ): стоимость порядка $N_2 \ln N_2$ операций;

2. Вычислить методом прогонки решения $w_{k,k}(i)$ задач (19): стоимость порядка $N_1 N_2$ операций;

3. Вычислить коэффициенты Фурье α_k (21) искомой функции $q^h(x_{2,j})$: стоимость $N_2 + 2$ операций;

4. Вычислить значения функции $q^h(x_{2,j})$ в узлах сетки (БПФ): стоимость порядка $N_2 \ln N_2$ операций.

VII Заключение

В работе представлен экономичный прямой алгоритм численного решения некорректной задачи – задачи Коши для эллиптического уравнения допускающего разделение переменных. Алгоритм позволяет получить решение дискретной задачи за число операций порядка N , где N – число уравнений в дискретной задаче.

Метод применим:

1. Для различных типов граничных условий, в том числе неоднородных;
2. Для неравномерных сеток в одном направлении;
3. В цилиндрических координатах с переменными коэффициентами зависящими от r ;
4. Метод обобщается на трехмерный случай;
5. Нетрудно указать класс некорректных задач, связанных с параболическими уравнениями, для которых описанный метод может быть использован в качестве одного из этапов численного решения.

Литература

1. *Kabanikhin S.I., A.L. Karchevsky A.L.* Method for solving the Cauchy Problem for an Elliptic Equation // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. 1995. Vol. 3. N 1. P. 21-46.
2. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи, Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 457 с.
3. *Самарский А.А., Андреев В.Б.* Разностные методы для эллиптических уравнений. Москва: Наука, 1976. 353 с.
4. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. Москва: Наука, 1978. 592 с.

МЕТОД КАННИ ДЛЯ ГИПЕРСПЕКТРАЛЬНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ¹

Турлапов В.Е., Романенко А.А., Пухкий К.К.

Университет им.Н.И.Лобачевского, Нижний Новгород

Благодаря наличию сотен каналов, охватывающих широкую полосу от видимого света до довольно глубокого инфракрасного (например, 360-2500нм), гиперспектральные изображения (ГСИ) позволяют провести детальную классификацию по каждому пикселю изображения (сигнатуре) и решать многие задачи: от мониторинга состояния сельскохозяйственной растительности и исследования биологии клетки, до диагностики глазных болезней и классификации материалов зданий. Наличие сотен каналов ведет к резкому увеличению объемов изображений (порядка гигабайта на изображение) и использованию специальных структур и форматов для его хранения. Есть и другие особенности: представление значений двухбайтовыми целыми; весьма высокая коррелированность изображений соседних каналов; зависимость яркости от номера канала сильно промодулирована влиянием атмосферы Земли; снижение точности до 2-5% (Landgrebe, 1999) из-за шума влияния атмосферы; часть каналов из-за поглощения атмосферой может содержать только шум; может иметь бликовые пиксели.

Одной из главных задач обработки ГСИ является задача детектирования контуров объектов изображения [1]. Лучшим алгоритмом ее решения для полутонных изображений является известный Canny edge detector (1986), построенный на оценке градиента яркости изображения. Однако, в случае ГСИ вместо яркости мы имеем n -мерный вектор сигнатуры, что делает решение задачи существенно зависимым от выбранного способа оценки сигнатуры, и оптимальный способ здесь пока не найден. В работе исследуются свойства границ объектов, построенных на основе двух оценок: градиента модуля вектора сигнатуры и градиента коэффициента корреляции Пирсона, который является основой физической спектральной классификации и использует n -мерный угол для сравнения n -мерных сигнатур пикселей с обучающими данными. Показано, что детектирование границ на основе коэффициента Пирсона позволяет детектировать естественные границы между классами, а на основе модулей сигнатур - границы между подклассами. Исследование выполнено на одном из самых сложных по многообразию содержания ГСИ Moffett Field. Программное обеспечение анализа ориентировано на массивнопараллельные вычисления на GPU.

Литература

1. Genyun Sun et al. Gravitation-Based Edge Detection in Hyperspectral Images // Remote Sens. 2017, 9(6), 592.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 16-11-00068П)

ВЛИЯНИЕ ОСОЛОНЕНИЯ ВОСТОЧНОЙ ЧАСТИ ТАГАНРОГСКОГО ЗАЛИВА НА ГИДРОЛОГИЧЕСКИЙ РЕЖИМ УСТЬЯ ДОНА¹

Чикин А.Л.* , Клещенок А.В.* , Чикина Л.Г.**

* Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону

** Южный федеральный университет , Ростов-на-Дону

В отличие от Средиземного и Чёрного морей, для Азовского моря характерна значительная пространственная неоднородность солёности: на участке от дельты Дона до Керченского пролива солёность возрастает от 0.5–0.7‰, до 13–14‰. Самый резкий градиент солёности до 10‰, формируется в Таганрогском заливе, где происходит сложное взаимодействие донских речных и трансформированных морских вод. Сокращение стока Дона до исторических минимумов, наряду с интенсивной циклонической деятельностью и аномальной адвекцией черноморских вод приводит к тому, что в последнее время зона смешения морских и речных вод из Таганрогского залива часто перемещается в рукава дельты Дона.

Экстремальные нагоны воды в дельту Дона приводят к тому, что возрастает солёность воды на водозаборах в Азове, Таганроге и Ростове-на-Дону [1]. Внедрение флоры и фауны в места, где их никогда не было: черноморские дельфины наблюдались в акватории порта Азов, а керченская тюлька оставалась в огородах приазовья после прекращения нагона. Подъём солёной воды по рукавам Дона приводит к осолонению почвы, что снижает её плодородие.

В ЮНЦ РАН создана система постоянно действующих гидропостов, оборудованных датчиками температуры и электропроводности, метеостанцией и уровнемером. Передача данных осуществляется в режиме реального времени на сервер ЮНЦ РАН. Для исследования пространственного распределения температуры и солёности морской воды ходе рейсов НИС "Денеб" в Азовское море и Таганрогский залив проводилась непрерывная запись данных о состоянии среды термосоленографом SBE 21 SEACAT.

Данные, получаемые с помощью указанных измерительных приборов, дают значения лишь в одной точке, где эти приборы установлены, а в случае использования термосоленографа только вдоль линии его следования. Целью данной работы было исследование пространственного распределения солёных вод в Таганрогском заливе и расчёт динамики изменения концентрации соли в районе дельты Дона. Анализ, выполненный с использованием математического моделирования, дополняет результаты наблюдений.

Чтобы не ставить граничные условия на открытой границе Таганрогского залива в районе Должанской косы, расчёт проводился по всему Азовскому

¹ Публикация подготовлена в части анализа термохалинной структуры вод в рамках реализации ГЗ ЮНЦ РАН № гр. проекта АААА-А18-118122790121-5, в части численного моделирования при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 18-05-80025.

морю, где граничные условия ставятся достаточно легко. В качестве начального распределения концентрации использовалось поле солёности, полученное с помощью термосоленографа.

На всей акватории Азовского моря, включая Таганрогский залив, была построена прямоугольная сетка 523×341 с шагами по горизонтали 660 м и вертикали 685 м. Ячейка с индексом (1;1) была привязана к координате 45.2780° с.ш. и 34.7977° в.д. Шаги по горизонтали и вертикали, выраженные в радианах, были равны соответственно 0,0087684 и 0,0060088. Составленная программа привязывала координаты движущегося профилировщика и наблюдаемую солёность к соответствующим ячейкам разностной сетки.

Так как данные, полученные профилировщиком, лежат вдоль одной линии, то поле солёности строилось с помощью экстраполяции в предположении однородности его вдоль нормали к траектории профилировщика.

Математическая модель состоит из двух составляющих: гидродинамической и транспортной. Гидродинамическая составляющая модели описывается уравнениями мелкой воды, как и верхний слой в [2]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \Omega v = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \nu_{xy} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\tau_{sx}}{H} - \frac{\tau_{bx}}{H}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \Omega u = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \nu_{xy} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\tau_{sy}}{H} - \frac{\tau_{by}}{H}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial H u}{\partial x} + \frac{\partial H v}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

В уравнениях (1) – (3) $u = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\zeta} U dz$, $v = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\zeta} V dz$ – осредненные по глубине компоненты скорости; $H = h + \zeta$; h – глубина водоема; ζ – перепад уровня воды; ν_{xy} – коэффициент вязкости; τ_{sx}, τ_{sy} – проекции на оси ОХ и ОУ силы трения ветра о поверхность водоема; τ_{bx}, τ_{by} – проекции на оси ОХ и ОУ силы трения жидкости о дно. Эти величины зависят от скорости ветра $\mathbf{W}_B = \{W_x; W_y\}$ и течения $\mathbf{W}_T = \{u; v\}$ и определяются так

$$\tau_s = \gamma |\mathbf{W}_B| \mathbf{W}_B, \tau_b = \beta |\mathbf{W}_T| \mathbf{W}_T$$

где

$$|\mathbf{W}_B| = \sqrt{W_x^2 + W_y^2}, |\mathbf{W}_T| = \sqrt{u^2 + v^2}.$$

Транспортная составляющая модели описывается уравнением конвекции-диффузии в предположении отсутствия источников внутри области расчета:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} = \mu_{xy} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right),$$

где S – соленость; μ_{xy} – коэффициент диффузии.

Граничные условия для гидродинамической составляющей задаются условием скольжения на твердой границе и значением скоростей течения в местах втекания и вытекания. Для транспортной составляющей задается условие $\frac{\partial S}{\partial n} = 0$ на твердой границе и $\mu_{xy} \frac{\partial S}{\partial n} + uS = q$, где q – боковой приток соли, в местах втекания и вытекания.

Расчетные значения сравнивались с наблюдениями в трех точках: А – восточная часть Таганрогского залива (область устьевого взморья Дона); В – центральная часть Таганрогского залива (район Кривой косы); С – западная часть Таганрогского залива (район косы Долгой) (рис. 1).



Рис. 1. Точки сравнения расчетных и наблюдаемых значений солености в Таганрогском заливе

Рассматривались натурные данные, полученные в рейсах с апреля по декабрь месяца 2017 года (табл. 1). При проведении численных экспериментов значение солености в начале периода использовалось как начальное распределение, а значение солености в конце периода как контрольное. В табл. 1 приведены относительные ошибки расчетов для каждой из трех точек наблюдений.

Приемлемыми (погрешность до 20%) результатами можно признать расчеты для станций в точках В и С. Неудовлетворительное согласование расчетных и наблюдаемых данных в области устьевого взморья (точка А) можно объяснить тем, что в эту часть залива поступает большое количество пресной воды из Дона. В настоящий момент представленная модель не в полной мере учитывает данный факт.

Таблица 1. Относительные ошибки (%) в расчетных точках для рассматриваемых периодов 2017 года

Период рейсов	А	В	С
13.04-19.04.2017	–	3,93	2,91
11.05-18.05.2017	13,47	0,2	–
09.06-17.06.2017	0,37	16,34	1,92
17.06-24.06.2017	88,76	5,93	2,6
24.06-06.07.2017	5,72	18,19	5,86
25.07-29.07.2017	43,96	12,26	0,42
09.09-21.09.2017	23,68	8,45	2,57
29.11-05.12.2017	44,24	4,43	19,1

Использование математической модели позволяет увидеть динамику изменения солености в наблюдаемой точке в зависимости от ветровой ситуации. На рис. 2 представлено изменение солености в точке В на период с 11.05.17 по 18.05.17.

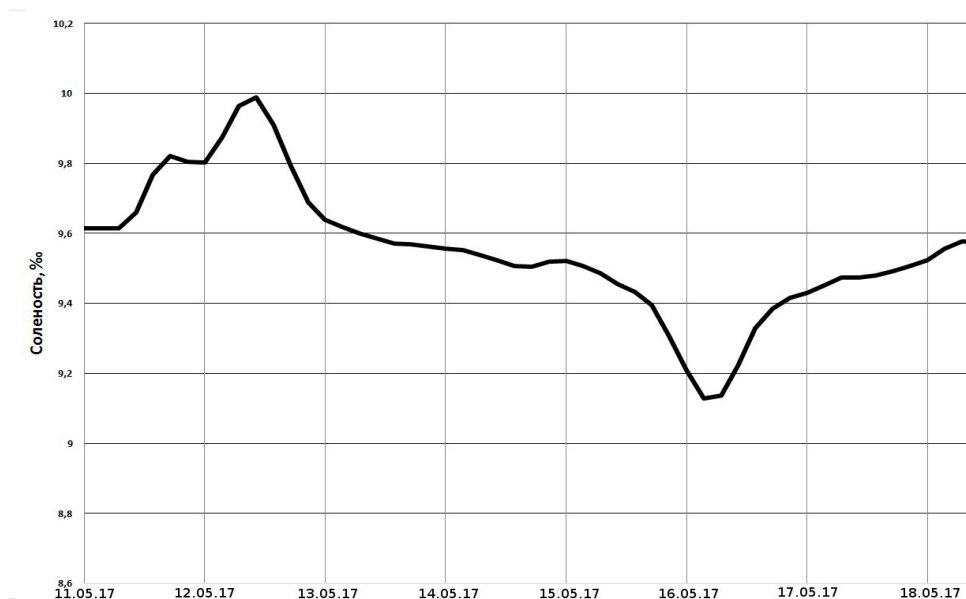


Рис. 2. Изменение концентрации соли в точке В в период 11.05-18.05.2017

Проведенные расчеты показали, что данная модель позволяет достаточно адекватно описывать процесс перемещения соленых масс воды под действием ветра в Таганрогском заливе, что дает возможность "доопределять" значения солености в интересующих нас точках, где датчики учета солености не были установлены. Кроме того, данный подход позволяет прогнозировать картину возможного распределения концентрации соли при определенных ветровых ситуациях. Однако, в устьях рукавов Дона, где также наблюдалось

увеличение концентрации соли, удовлетворительные расчетные результаты получить не удалось, так как модель пока не учитывает процесс затопления дельты Дона.

Литература

1. МАТИШОВ Г.Г., ЧИКИН., А.Л., БЕРДНИКОВ С.В., ШЕВЕРДЯЕВ И.В. Экстремальное наводнение в дельте Дона (23-24.03.13) и факторы, его определяющие. ДАН, География, 2014, том 455, № 3. С. 342-345.
2. ЧИКИН А.Л. Об одном из методов расчета параметров течений в водоемах с большой неоднородностью глубин.// Водные ресурсы, 2005, т. 32. № 1, с. 55-60.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА С ПОМОЩЬЮ ТЕНЗОРНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Чикиткин А.В., Корнев Е.К.

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный

Введение

Работа посвящена численному методу решения уравнения Больцмана с приближённым интегралом столкновений с использованием формата Tensor-Train для представления 3-х мерных массивов (тензоров).

Уравнение Больцмана является сложным интегро-дифференциальным уравнением высокой размерности. При его численном решении возникают большие объёмы данных и вычислений, поэтому есть необходимость искать способы упростить вычисления за счет различных приближений с сохранением удовлетворительной точности.

В данной работе исследуется возможность упрощения вычислений при решении уравнения Больцмана с модельным интегралом столкновений за счет применения формата Tensor-Train (тензорный поезд). Этот формат позволяет получать малоранговые аппроксимации тензоров большой размерности с заранее заданной точностью, что позволяет существенно сократить объём данных, давая выигрыш как по памяти, так и по количеству вычислений.

I Математическая модель

Состояние разреженного газа в некотором объёме задаётся распределением частиц по направлениям и скоростям: $f = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$. В данной работе математической моделью для течений разреженного газа является уравнение Больцмана с приближённым интегралом столкновений или S-модель [1]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = J(f, \mathbf{v}, \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)). \quad (1)$$

Макроскопические переменные - числовая плотность n , средняя скорость \mathbf{u} , температура T , поток тепла \mathbf{q} и т. д., ищутся как интегралы по пространству скоростей от функции распределения, умноженной на степени

компонент скорости, т.е. как моменты распределения:

$$\begin{aligned} n &= \int f d\mathbf{v}, \quad n\mathbf{u} = \int \mathbf{v} f d\mathbf{v}, \quad \frac{3}{2}mnR_gT + \frac{1}{2}mnu^2 = \frac{1}{2}m \int v^2 f d\mathbf{v}, \\ \mathbf{q} &= \frac{1}{2}m \int \mathbf{v} v^2 f d\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v} - \mathbf{u}, \quad \rho = mn, \quad p = \rho R_g T, \\ u^2 &= \sum_{i=1}^3 u_\alpha u_\alpha, \quad v^2 = \sum_{i=1}^3 v_\alpha v_\alpha, \quad v^2 = \sum_{i=1}^3 v_\alpha v_\alpha, \quad d\mathbf{v} = dv_x dv_y dv_z. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь R_g – газовая постоянная, m – масса одной молекулы.

Конкретный вид функции J находится из условия, что какое-то количество первых моментов, вычисленных по точному и приближенному интегралу, совпадают:

$$\int \phi(\mathbf{v}) I(f, f) d\mathbf{v} = \int \phi(\mathbf{v}) J(f, \mathbf{a}) d\mathbf{v}, \quad \phi(\mathbf{v}) = 1, \mathbf{v}, v^2, \mathbf{v}v^2 \dots \quad (3)$$

В случае восьми моментов получается следующий модельный интеграл

$$\begin{aligned} J &= \nu(f_S - f), \quad \nu = \frac{p}{\mu} \\ f_S &= f_M \left[1 + \frac{4}{5}(1 - Pr) S_\alpha c_\alpha (c^2 - \frac{5}{2}) \right], \quad S_i = \frac{1}{n} \int c_i c^2 f d\mathbf{v}, \\ f_M &= \frac{n}{(2\pi R_g T)^{3/2}} \exp(-c^2), \quad \mathbf{c} = \mathbf{v} / \sqrt{2R_g T}, \quad c^2 = \sum_{i=1}^3 c_\beta c_\beta \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\mu = \mu(t)$ – динамическая вязкость, $Pr = 2/3$ – число Прандтля для одноатомного газа, f_M – максвелловская (равновесная) функция распределения, R_g – газовая постоянная. По одинаковым индексам подразумевается суммирование.

II Метод дискретных скоростей (базовый метод)

Метод дискретных скоростей заключается в том, что вместо интегрирования по всему пространству скоростей производится численное интегрирование по разбиению некоторой ограниченной области, вид которой определяется видом задачи и требованиями к точности решения. В нашем случае мы берём равномерную трёхмерную сетку. Основное требование к сетке – вычисление возникающих в задаче интегралов с удовлетворительной точностью.

Таким образом, функция распределения $f(t, \mathbf{x}, v_1, v_2, v_3)$ оказывается представлена в виде трехмерного массива (тензора) $\hat{f}(t, \mathbf{x})$ размера $n_v \times$

$n_v \times n_v$, где $\hat{f}(t, \mathbf{x})(i, j, k)$ соответствует числу частиц, обладающих скоростями, лежащими в скоростной ячейке. Происходит замена точных интегралов квадратурными формулами. В данном случае используется многомерная формула прямоугольников с центральной точкой.

Записав уравнение для каждого узла скоростной сетки, получаем систему уравнений:

$$\frac{\partial \hat{f}(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\hat{v}_\alpha \circ \hat{f}) = \hat{J} = \nu(\hat{f}^{(S)} - \hat{f}) \quad (5)$$

\hat{v}_α – матрица, заполненная α -компонентами скоростной сетки.

Далее, область пространства разбивается на L ячеек гексаэдральной формы, образованных шестью четырёхугольными гранями каждая. Индексом i будет обозначать номер ячейки пространства.

Для получения дискретных уравнений конечно-объёмного метода уравнение интегрируется по объёму ячейки Vol_i , затем, в соответствии с формулой Гаусса - Остроградского, интеграл по объёму преобразуется в сумму потоков через грани, спроецированных на нормали:

$$\frac{\hat{f}_i^{n+1} - \hat{f}_i^n}{\Delta t} = \hat{R}_i = -\frac{1}{|Vol_i|} \sum_{l=1}^6 \hat{\Phi}_{li} + \hat{J}_i \quad (6)$$

Здесь

$$\hat{f}_i^n = \frac{1}{|Vol_i|} \int_{Vol_i} \hat{f}(t_n, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

- интегральное среднее функции распределения в ячейке с индексом i на шаге по времени n , $t_n = \tau n$, τ - шаг по времени. $\hat{\Phi}_{li}$ - численный поток через l -ю грань i -й ячейки пространства.

III Тензорные разложения

В этом разделе описаны основные свойства тензорного разложения tensor-train (тензорный поезд), которые были использованы при разработке метода.

Основные идеи, лежащие в основе всех тензорных разложений, можно пояснить на примере тензора размерности 2 (т.е. матрицы). В этом случае самым простым разложением, является сингулярное разложение матрицы

$$A = \sum_{\alpha=1}^r \sigma_\alpha \mathbf{u}_\alpha \mathbf{v}_\alpha^*, \quad A(i, j) = \sum_{\alpha=1}^r \sigma_\alpha \mathbf{u}(i)_\alpha \mathbf{v}(j)_\alpha^*$$

где r - ранг A . Его отличительной особенностью является то, что по теореме Эккарта - Янга наилучшим приближением матрицей с фиксированным

рангом $k < r$ в смысле минимума Фробениусовой нормы ошибки является матрица

$$A_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^*.$$

Таким образом происходит некоторое «сжатие» данных, так как часть сингулярных векторов отбрасывается, и матрица, как функция 2-х индексов, представляется в виде суммы небольшого числа слагаемых в виде произведения двух функций одного индекса. Таким образом осуществляется разделение переменных.

Сингулярное разложение является частным случаем канонического разложения. Каноническое разложение представляет d -мерный тензор A в виде

$$A(i_1, i_2, \dots, i_d) = \sum_{\alpha=1}^r u_1(\alpha, i_1) u_2(\alpha, i_2) \dots u_d(\alpha, i_d)$$

Минимальное число r для которого существует такое представление называется тензорным рангом.

Существует несколько различных тензорных форматов, обобщающих идею разделения переменных на большие размерности. В данной работе используется разложение tensor-train (тензорный поезд) [2]. Это разложение имеет вид:

$$A(i_1, \dots, i_d) = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_{d-1}} G_1(i_1, \alpha_1) G_2(\alpha_1, i_2, \alpha_2) \dots G_d(\alpha_{d-1}, i_d), \alpha_k = 1, \dots, r_k \quad (7)$$

G_k называются ядрами разложения. Два ядра – первое и последнее – являются матрицами, а все остальные – 3-х мерными тензорами. Числа r_k называются ТТ-рангами.

Существует несколько различных тензорных форматов, обобщающих идею разделения переменных на большие размерности. В данной работе используется разложение tensor-train (тензорный поезд) [2]. Это разложение имеет вид:

$$A(i_1, \dots, i_d) = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_{d-1}} G_1(i_1, \alpha_1) G_2(\alpha_1, i_2, \alpha_2) \dots G_d(\alpha_{d-1}, i_d), \alpha_k = 1, \dots, r_k \quad (8)$$

G_k называются ядрами разложения. Два ядра – первое и последнее – являются матрицами, а все остальные – 3-х мерными тензорами. Числа r_k называются ТТ-рангами.

Можно записать это разложение в более кратком виде, как произведение матриц:

$$A(i_1, \dots, i_d) = G_1(i_1) G_2(i_2) \dots G_d(i_d) \quad (9)$$

Здесь $G_1(i_1)$ – вектор строка, $G_d(i_d)$ – вектор столбец, остальные $G_k(i_k)$ – матрицы.

Для применения ТТ-разложения в методе дискретных скоростей важны следующие свойства:

1. Есть алгоритм для вычисления приближения B с минимальными рангами в ТТ-формате к тензору A с заданной точностью

$$\|A - B\|_F \leq \epsilon \|A\|_F$$

$\|\cdot\|_F$ – норма Фробениуса (корень квадратный из суммы квадратов всех элементов)

2. Если тензоры A и B одинакового размера заданы в ТТ формате, т.е.

$$A(i_1, \dots, i_d) = A_1(i_1) \dots A_d(i_d), \quad B(i_1, \dots, i_d) = B_1(i_1) \dots B_d(i_d)$$

т.е. поэлементная сумма двух тензоров $C = A + B$ представима в ТТ-формате с ядрами:

$$C_k(i_k) = \begin{bmatrix} A_k(i_k) & 0 \\ 0 & B_k(i_k) \end{bmatrix}, \quad k = 2, \dots, d-1$$

$$C_1(i_1) = [A_1(i_1) \ B_1(i_1)], \quad C_d(i_d) = \begin{bmatrix} A_d(i_d) \\ B_d(i_d) \end{bmatrix}$$

Т.е. поэлементное сложение не требует никаких вычислений, при этом ранги суммы равны сумме рангов слагаемых, т.е. ранги складываются.

3. Поэлементное (адамарово) произведение $C = A \circ B$ двух тензоров представимо в ТТ-формате с ядрами вида

$$C_k(i_k) = A_k(i_k) \otimes B_k(i_k)$$

где \otimes – кронекерово произведение матриц.

Это означает, что такая операция требует $O(dnr^4)$ операций, и ранги перемножаются.

4. Есть алгоритм для вычисления округления тензора в ТТ-формате, т.е. для тензора A в ТТ-формате с рангами r_k можно найти тензор B с меньшими рангами, такой что

$$\|A - B\|_F \leq \epsilon \|A\|_F$$

Алгоритм состоит из последовательности сингулярных разложений и QR разложений вспомогательных матриц разверток, и имеет сложность $O(dnr^3)$

Все упомянутые свойства позволяют переписать алгоритм метода дискретных скоростей в виде последовательность операций с тензорами в ТТ-формате: поэлементные операции заменяются на их ТТ-аналоги, и после каждой операции добавляется операция округления, чтобы предотвратить рост ТТ-рангов. Целесообразность применения тензорных разложений, в частности ТТ-формата, можно обосновать несколькими соображениями:

1. Во многих ячейках расчетной области функция распределения близка к локально-максвелловской, а у этой функции переменные разделяются (далее приведен упрощенный вид функции):

$$f_M(v_1, v_2, v_3) = \exp(-|\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2) = e^{-(v_1-u_1)^2} e^{-(v_2-u_2)^2} e^{-(v_3-u_3)^2} \quad (10)$$

т.е. тензор из значений локально-максвелловской функции на скоростной сетке представим в любом тензорном формате с рангами 1.

2. Локально-максвелловская функция – гладкая (C^∞). Есть теоретические оценки, показывающие что тензоры из значений гладких функций на равномерных сетках имеют малые ранги.

IV Тестовые разложения

Структура одномерной ударной волны

На рисунке 1 показаны профили макропараметров, полученных методом на основе ТТ-разложение. В данном расчете использовалось округление ТТ тензоров с относительной ошибкой $\epsilon = 10^{-7}$. При такой ошибке профили макропараметров совпадают с профилями, рассчитанными обычным методом. Эксперименты показали, что заметное различие появляется только при ошибках округления больше 10^{-3} . Вместе с профилями макропараметров показано распределение средних рангов по пространству. Видно, что вблизи границ, где распределение максвелловское, ранги малы, и возрастают при приближении к центру ударной волны.

Обтекание цилиндра

На рисунке 2 показано сравнение распределений температуры, полученных в базовом методе, и в методе с использованием ТТ-разложения. Качественно результаты близки, но видно, что в расчете с ТТ-разложением немного изменилась форма фронта головной ударной волны.

V Заключение

Результаты сделанного исследования показали, что алгоритм метода дискретных скоростей может быть легко адаптирован для применения различных тензорных разложений. Для этого необходимо заменить процедуры

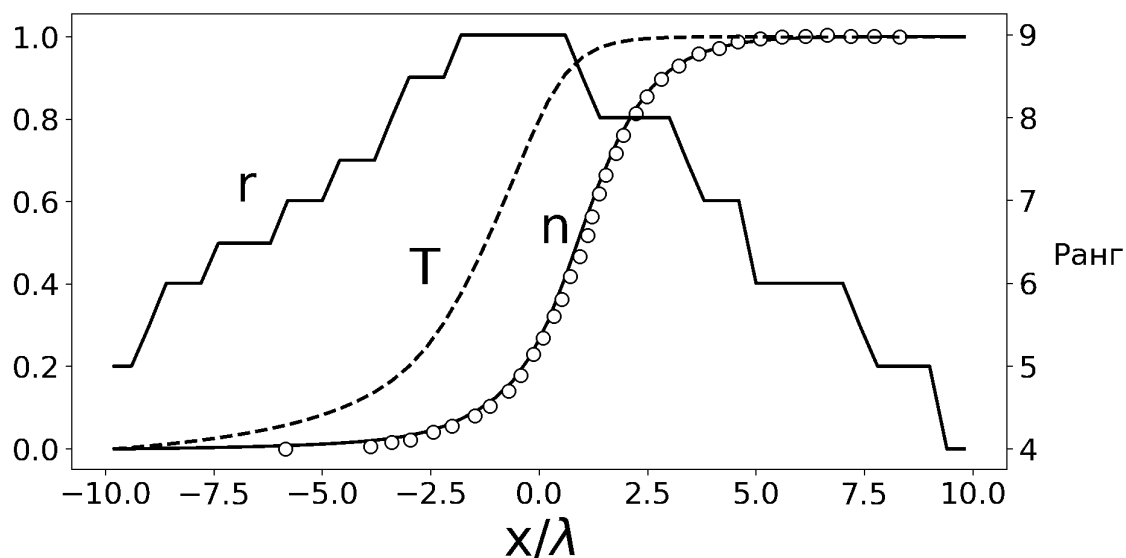


Рис. 1. Профили нормированных макропараметров и распределение средних ТТ-рангов в задаче о структуре ударной волны. Символами показаны результаты из [3]

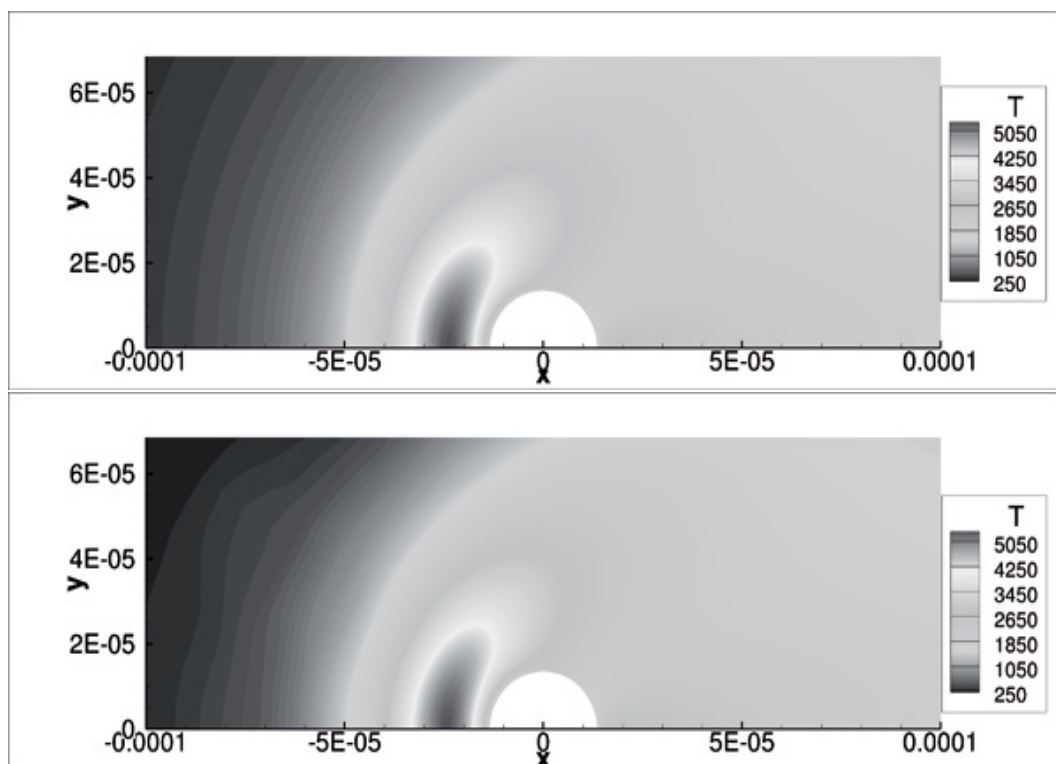


Рис. 2. Распределение температуры в плоскости $z = const$. Вверху - расчет базовым методом без тензоров, внизу - расчёт с тензорами.

вычисления поэлементной суммы, произведения полных тензоров а также вычисления суммы элементов тензора на аналогичные процедуры в конкретном тензорном формате, и добавить округление, чтобы ранги не накапливались.

Литература

1. *Фролова, А. А.* Численное сравнение решений кинетических модельных уравнений. Математика и математическое моделирование, 2015. Т. 6, 61 с.
2. *Oseledets I. V.* Tensor-train decomposition // SIAM Journal on Scientific Computing. - 2011. - V. 33. - N 5. P 2295-2317.
3. *Додулад, О. И., Черемисин, Ф. Г.* Расчеты структуры ударной волны в одноатомном газе с контролем точности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. В. 53. Н. 6. С. 1008–10026.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ГИДРОХИМИИ В МЕЛКОВОДНЫХ ВОДОЕМАХ ¹

Шабас И.Н.

ИММиКМ им.И.И. Воровича ЮФУ, Ростов-на-Дону

Азовское море является уникальным водоемом по многим своим характеристикам. Море относится к мелководным водоемам и характеризуется малой соленостью, что является одним из факторов его высокой рыбопродуктивности. Но активная хозяйственная деятельность человека приводит к значительному загрязнению вод впадающих в Азовское море рек и вод самого моря. К значительным потерям в рыбном хозяйстве бассейна приводит заселение вод моря гребневиком, который выедает в больших количествах не только кормовой зоопланктон, но также икру и личинок азовских рыб.

Среди основных абиотических факторов, тесно связанных с биологической продуктивностью гидроэкосистем, особое место принадлежит растворённому кислороду. Одной из особенностей современного экологического состояния водоемов Азово-Черноморского региона является регулярное цветение воды в июле-августе и расширение зон дефицита кислорода, что приводит к ухудшению условий водозабора и водоснабжения, а также к заморным явлениям в экосистемах.

Соленость вод водоема влияет на плотность вод, а значит и на многие гидрохимические процессы проходящие в водоеме. Важной характеристикой вод является температура, которая влияет на скорости всех рассматриваемых процессов.

В работе представлены результаты трехмерного математического моделирования транспорта многокомпонентных загрязняющих веществ (нефть [5], радионуклиды [1, 3]), моделирования поведения полей солености, изменения кислородного режима [2]. Основой моделирования является система трехмерных нелинейных уравнений конвекции-диффузии. При моделировании гидродинамики использовалась двухслойная математическая модель [3]. Численный алгоритм основан на методе расщепления по физическим процессам. В начальный момент времени задаются распределения всех искомым переменных. Полученные системы уравнений решаются конечно-разностными методами с использованием неявных схем.

На основе построенных моделей создан программный комплекс "GFAM". Он реализован на многопроцессорных вычислительных системах с распределенной памятью в среде параллельного программирования MPI. Для решения систем линейных алгебраических уравнений, возникающих при дискретизации исходных дифференциальных уравнений, используется библиотека параллельных подпрограмм Aztec. Визуализация расчетов проведена с использованием свободно распространяемого пакета Gnuplot [4].

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ, Базовая часть государственного задания, тема: "Фундаментальные и прикладные задачи математического моделирования №1.5169.2017/8.9

При правильном подборе коэффициентов и методов решения предлагаемые математические модели достаточно точно описывают процессы распространения и переноса веществ, а программный комплекс может быть использован в научных исследованиях и для оперативного прогнозирования опасных природных явлений в регионе Азовского моря.

Литература

1. *Zheleznyak M.J.* The mathematical modelling of radionuclide transport by surface water flow from the vicinity of the Chernobyl Nuclear Power Plant. *Condensed Matter Physics*, №12, 1997, pp.37-50.
2. *Селютин В.В., Шабас И.Н., Кулыгин В.В.* Математическое моделирование риска заморных явлений в водоёмах, подвергающихся эвтрофированию // Математическое моделирование в экологии / Материалы Пятой Национальной научной конференции с международным участием, 16-20 октября 2017 г. Пущино, ИФХиБПП РАН, 2017. С. 197-198.
3. *А.Л. Чикин, И.Н. Шабас, С.Г. Сидиропуло* Математическая модель распространения радионуклидов в Цимлянском водохранилище в случае их залпового выброса // Вестник Южного научного центра, Т.2, №3, 2006, с.78-81.
4. *Шабас И.Н.* Визуализация результатов расчетов решения задач переноса вещества. // Сб. трудов XVI молодежной конференции-школы с международным участием "Современные проблемы математического моделирования Ростов-на-Дону, Изд-во ЦВВР, 2011г., с.306-312.
5. *Шабас И.Н., Чикина Л.Г.* Математическое моделирование распространения нефтяного загрязнения в водоеме с учетом изменений температуры // Сборник трудов XVI Всероссийской конференции-школы молодых исследователей "Современные проблемы математического моделирования Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ, 2015г., с.239-243

СОЦИАЛЬНЫЕ КОНСТАНТЫ В ДИНАМИКЕ ЦЕННОСТНЫХ ОРИЕНТАЦИЙ РОССИЙСКОГО СОЦИУМА (РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ НА КЛЕТОЧНОМ АВТОМАТЕ)

Шведовский В.А.

МГУ им. М.В.Ломоносова, ф-ты ВМиК, ВШСШ, Москва

Введение

Мотивацией данной публикации оказался неожиданно удачный прогноз выборов президента – 2018 на модели информационного противоборства [7].

Цель статьи — показать:

- 1) существование инвариантов в моделировании клеточными автоматами (КА) динамики отношений взрослого населения России к её власти;
- 2) что погрешность прогноза этой динамики с учётом таких констант цепи из K клеточных автоматов, соединяемых в одну последовательность переходными процессами, имеет вполне приемлемую величину для $K \leq 10$.

Известна точность прогнозов президентских выборов основателя школы прогнозирования в социологии Дж. Гэллапа $< 3\%$. Для поставленной перед нами задачи допустима погрешность на порядок выше.

Модель «Вероятного избирателя» Дж. Гэллапа и П. Перри имеет ряд особенностей и недостатков, например, многократные электоральные замеры 75 вопросами не следует завершать за две недели, а лишь за 2-3 дня; она не прогнозирует явку и не пригодна для региональных выборов. [2] В модели «Likely voters», в группе объективных факторов указаны маркеры территориальной привязки и укоренённости (опыт голосования на избирательном участке) в данном социальном окружении избирателя, а среди группы субъективных факторов отмечены его «политические пристрастия», как влияющие на вероятность голосования, например, «за X и против Y ». Подобные факторы учитываются и в модели — перколяционно-клеточном автомате (ПКА) — разновидности КА, где цветом обозначены «традиционалистские» — (красные клетки) и «либеральные» — (синие клетки) ценности, для которых процентным соотношением задаётся их распространённость, а также индекс укоренённости (глубина состояния). Кроме того, процентом белых клеток учтена аполитичная масса населения, оцениваемая процентом неявки избирателей. В качестве *объекта исследования* была выбрана динамика рейтинга президента РФ Путина В. В., представленная как таблицами, так и графиками.

Методами исследования выбраны вычислительный (математический) эксперимент и эргодическая теория динамических систем, применённая к ПКА.

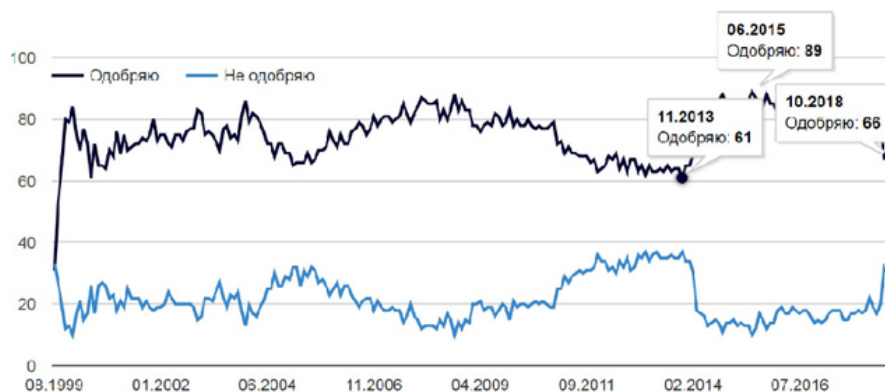


Рис. 1. Динамика рейтинга Путина за 18 лет (Левада – центр) — президентский срок В. В. Путина начался с 2000 г.

Ниже 10% «неодобрения» не опускаются — это **радикальные противники (Contr)**; **23-25%** — «колеблющиеся» — **Osc**, т.е. **Pro** — большинство ~ **65%**.

Из графика обнаружено не только наличие указанных процентов, но и

- 1) 3-х областей пульсирования индекса с последовательностью временных интервалов (5 – 7 – лет), что предполагает влияние циклов Китчина (3 – 5 лет), Жюгляра (7 – 11 лет);
- 2) фрактальной «бахромы», стимулирующей расчёт размерности Хаусдорфа, а также
- 3) *отсутствие* социально – экономического «тектонического сдвига»¹. Последнее нами связывается с основной социологической гипотезой. В соответствии с ней двумя главными факторами, определяющими итог голосования на президентских выборах, являются *уровень социально – экономического благосостояния* населения РФ и *баланс его двух фундаментально – исторических ценностных ориентаций* – аналогов противостояния «западников» и «славянофилов», – центрирующихся, соответственно, на либерально-индивидуалистических и традиционалистских ценностях.

Центральным вопросом – *предметом исследования* – является вопрос об *источнике ошибки прогноза*, об её оценке возможности регулирования, детерминируемых:

¹Под таким сдвигом понимается масштабное изменение социально-экономического статуса больших социальных групп или слоёв, например, массовое переселение из села в город, сопряжённое с радикальным изменением образа жизни.

- 1) преобразованием «перекладывания»;
- 2) флуктуацией плотностей белых и цветных клеток на рабочем поле ПКА;
- 3) энтропией ПКА как дискретной динамической системы на двумерной ориентированной замкнутой поверхности;
- 4) энтропией ПКА как приготовления дискретной динамической системы на двумерной ориентированной замкнутой поверхности реализацией случайного гауссового процесса размещения цветных клеток на рабочем поле ПКА;

Пусть задано конечное множество состояний одной клетки. Для простоты будем считать, что каждая цветная клетка имеет $p \geq 2$ состояний, при этом «красная» со знаком «+», а «синяя» со знаком «-». «Белая» клетка неизменна и не пропускает никакое воздействие.

Разместим цветные клетки равномерно случайно по рабочему полю согласно условию: $N(s)_K + N(s)_c + N(s)_\sigma = N_0 - \text{const}$, где $N(s)_{\text{к.с.б.}}$ — число клеток данного цвета в момент времени s , при этом $N(s)_\sigma, N_0 - \text{const}$.

Каждая клетка с координатами (i, j) «опрашивает» своих соседей по окрестности Мура с $r = 2$ об их цвете: если цвета совпадают, то состояния клеток не меняются; если цвета разные, то работает алгоритм изменений [8].

Сеанс вычислительных экспериментов (ВЭ) протекал следующим образом: на рабочем поле ПКА случайным образом, но фиксированно на все серии ВЭ, размещались белый клетки с плотностью, пропорциональной неявке избирателей. Всего в каждой серии ВЭ реализовывалось 50 пусков. Для каждого пуска на свободных от белых по случайному закону размещались цветные клетки так, чтобы клетки каждого из 2-х цветов по своей плотности соответствовали проценту распространённости альтернативных ценностей. Каждый ВЭ завершался выдачей усреднённого по числу пусков динамического графика. В каждом из 50 пусков на счёт выход на плато локального равновесия считался завершённым, если в течении ряда итераций значения рассчитываемого показателя не отличались более, чем на 1%.

Уже из этого описания ВЭ с ПКА следует, что источниками погрешности в прогнозе эволюции исследуемого показателя могут быть как ошибка точности задания начального ансамбля клеток (гауссов случайный процесс), так и погрешность алгоритма расчёта самого ПКА.

Ключевым методологическим моментом в построении интерпретации ПКА с позиций эргодической теории динамических систем является то, что отображение метрического компакта Ω^2 в себя $T F : \Omega^2 \rightarrow \Omega^2$ обладает слабым перемешиванием [3–5]. Из этого вытекает, что оно же обладает свойством эргодичности, т.е. хаотизация взаимодействий между клетками ведёт от детерминистского клеточного автомата к статистическому описанию динамической системы. На наш взгляд, наиболее удобным инструментом целостного подхода к описанию источников погрешности как детерминистской,

так и статистической фазы эволюции ПКА, является топологическая энтропия, поскольку она мажорирует другие виды энтропийной оценки [1]. h_{top} (В) является мерой роста разнообразия траекторий, генерируемых ПКА. [3–5]. Ниже дана Табл. 1 с энтропийными оценками всех учитываемых источников погрешности.

Таблица 1. Сравнение топологической энтропии h_{top} разных источников погрешности прогноза

Итерации	Теор. Кантора	Мощность конфиг. КА	Гаусс	Фракталы	ПКА	Марков	Перекладывание
n	$2^n \geq n$	$2n \log 2 / (2e\pi)^{0.5}$	$\text{Dim}_H f(t) * \log m$ Розовый шум	$n * \log 2$	$n * \log \lambda_1$	$\log \gamma$	
1	2	1.232	0.298	(1.167; 1.556)	0.301	0.877	0.48
2	4	1.518	0.367	(1.167; 1.556)	0.602	1.754	0.48
3	8	1.869	0.452	(1.167; 1.556)	0.903	2.631	0.48
4	16	2.304	0.557	(1.167; 1.556)	1.204	2.507	0.48
5	32	2.838	0.687	(1.167; 1.556)	1.505	4.3852	0.48
6	64	3.497	0.846	(1.167; 1.556)	1.806	5.262	0.48
7	128	4.308	1/042	(1.167; 1.556)	2.107	6.139	0.48

Приведённая Табл. 1 позволила избавиться от целой ветви прогнозирования на основе марковского случайного процесса, поскольку уже для 7 итерации работы клеточного автомата этот процесс даёт наибольшую среди остальных энтропийную оценку, а т. е. и наибольшую ошибку.

Для проведения прогнозных расчётов электорального голосования на выборах президента (реальных и прожективных) задаются значения показателей ценностных ориентаций — распространённости и укоренённости в российском социуме накануне старта (фев.2018, авг.2019) избирательных процедур:

$$I_{\text{распрост}}(\text{кол.}) = 62,66; I_{\text{укорен.}}(\text{либ.}) = 29,32;$$

$$I_{\text{укорен}}(\text{кол.}) = 0.265; I_{\text{укорен}}(\text{либ.}) = 0.239. [8]$$

Двузначными числами в вышеуказанных индексах представлены проценты распространённости в российском социуме приверженцев ценностных ориентаций того или иного цвета. Нижняя строка, где записаны дроби, — это степень укоренённости соответствующих ценностей. В процессе поиска источников погрешности прогноза была поставлена серия вычислительных экспериментов (ВЭ) на выявление зависимости выхода ПКА на «плато» равновесия от плотности «белых клеток» — акторов², а также от граничных условий для данного рабочего поля (РП) ПКА. Последние выступали в форме разбиения 4-х границ РП ПКА на подинтервалы $(1, 2, \dots, m)$ и склеивания этих подинтервалов для разных сторон границы в соответствие с заданной перестановкой, например, $(m, 3, 1, \dots, 2)$. Степень перестановки, т.е. число подинтервалов, характеризовала степень связности социума в моделируемой его локальности, а заодно и отражала топологический род 2-мерной компактной замкнутой поверхности. В работе [4] доказано, что $h_{\text{top}} = \infty$, если по РП КА движется «космический корабль». Однако в нашем случае такого события ни разу не наблюдалось, поэтому есть только диффузный переход взаимодействия цветных клеток через границу. В таком случае h_{top} (перекладывания) $\neq 0$ и равняется для 1-го перехода логарифму от степени перестановки, т.е. $h_{\text{top}} = \log \gamma$, где $\gamma \geq 2$.

В ходе ВЭ было установлено, что одного и того же времени релаксации τ к состоянию локального равновесия ПКА можно достичь как варьированием граничными условиями, в том числе, степенью перестановок (числа ручек), так и плотностью клеток — см. Табл. 2.

Таблица 2. Зависимость времени релаксации ПКА к состоянию равновесия от **плотности белых клеток d** и топологического **рода** двумерной поверхности рабочего поля ПКА.

	Процент белых клеток, т.е. блокирующих узлов решётки					
	$d(\%)$	10	20	30	40	70
	0	129/47	122/47	122/50	122/50	111/50
	3	143/45	147/50	126/50	121/50	113/50
	5	145/46	147/47	132/49	125/50	105/50
	7	144/42	136/47	125/50	124/50	110/50

Логика связи между последовательными блоками:

$$\dots \rightarrow \text{ПКА}_{i,1} \rightarrow \text{ПКА}_i \rightarrow \text{ПКА}_{i+1} \rightarrow \dots$$

при этом погрешность задания входных данных каждого блока равняется погрешности выходных данных предыдущего ПКА, если блоки примыкают друг к другу без посредства внеблоковых временных рядов.

²Акторами локального поля взаимодействия в социуме могут выступать как отдельные персоны, так и социальные группы, например, бригады рабочих или социальные группы.

Величина ограничения числа блоков — n в последовательности $\{\text{ПКА}_i\}$ определяется кумулятивной погрешностью в 20% – 30%. Исходя из этого была построена оценка числа блоков ПКА.

Критериальным соотношением является неравенство, опирающееся на распределение Стьюдента:

$$N(s)_k - N(s)_c > 2 * t_c * \sigma \quad (1)$$

Так неравенство справедливо при $t_c(0.8) = 1.296$ для $n = 50$ $s = 7$ (это то количество итераций ПКА, при котором происходит выход на «плато») как в случае $N(s)_k - N(s)_c = 0.78$ (прогноз «Выборы 2018» [8]), так и в случае $N(s)_k - N(s)_c = 0.4$, т. е. для августовского 2019 года прогноза. При этом в последнем случае при $s = 8$ уже доверительные интервалы для альтернативных кандидатов пересекаются. Для расчётов использована Табл. 1 колонка с именем «Гаусс». Указанное число итераций ($s = 7$) означает 7 раз последовательно применённый ПКА без опосредования переходными процессами — в этом ограничение условий применения метода.

В соответствии с гарантированным уровнем достоверности был произведён вычислительный эксперимент на клеточном автомате «ПКА» в августе 2019 году.

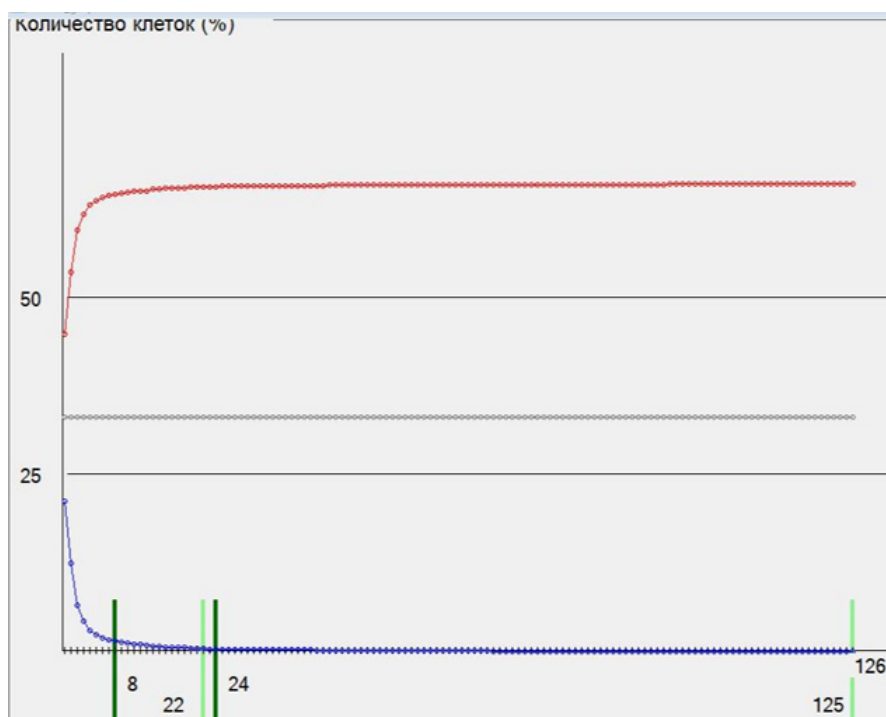


Рис. 2. Прогноз % голосов на выборах президента, если бы они состоялись в 2019 — на основе данных за август Левады – центра.

Выводы и заключение

- Род поверхности γ существенно влияет на процесс перколяции: с ростом рода, т. е. степени связности социума (1 inv), увеличивается скорость процесса релаксации к локальному равновесию.
- Уменьшение плотности d неактивных клеток решётки рабочего поля взаимозаменяемо (2 inv) с родом поверхности γ .
- Среднесрочный прогноз оценки деятельности институтов власти без высоких требований к точности показателей ($\leq 20\%$) может быть осуществлён как последовательный ряд ситуаций трендов и стационарных равновесий вместе с переходными процессами, реализуемыми на перколяционно – клеточных автоматах.
- Мобилизационный потенциал социума тем выше – при прочих равных условиях (численность адептов и сторонников, спонсорство и т.д.), чем быстрее осуществляется выход на «плато», – эта скорость зависит от степени укоренённости культурных кодов социума (3 inv)
- Прогноз «если бы выборы были сегодня» показал устойчивость высокого рейтинга – в силу стабильности режима власти – с объяснимым снижением его уровня из-за непопулярной пенсионной реформы.

Приношу благодарность студенту ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова — магистранту С. В. Сухову за проведённые вычислительные эксперименты по тематике клеточных автоматов.

Литература

1. *Алексеев В.М., Якобсон М.В* Символическая динамика и гиперболические динамические системы. Добавление к книге Р. Боуэна. "Методы символической динамики Серия Математика. Новое в зарубежной науке, М.: Мир, с.203, 1979
2. *Баскакова Ю.М. and Терентьева Н.Н.* "ВЕРОЯТНЫЙ ИЗБИРАТЕЛЬ": ЭВОЛЮЦИЯ И МОДИФИКАЦИИ МОДЕЛИ ГЭЛЛАПА, Мониторинг общественного мнения: экономические и социальные перемены, N4, с.25–38, 2018, Открытое акционерное общество "Всероссийский центр изучения общественного мнения doi=<https://doi.org/10.14515/monitoring>
3. *Каток А.* Введение в современную теорию динамических систем, 1999, М: "Факториал"
4. *Лакштанов Е.Л., Лангваген Е.С.* Энтропия многомерных клеточных автоматов, Проблемы передачи информации, N 42(1), 2006

5. *Лоскутов А.Ю., Козлов А.А. и Хаханов Ю.М.* Энтропия и прогноз временных рядов в теории динамических систем, Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика, N 17(4), 2009, с.98–114
6. *Шведовский В.А.* Зависимость энтропии бильярдов от топологии области (случай квадрата и тора), препринт Р17-80-180 ОИЯИ, Дубна, 1980
7. *Шведовский В.А., Сухов С.В.* Объединённая с клеточными автоматами перколяционная модель (первые результаты расчётов информационного противоборства), Математическое моделирование социальных процессов: сборник трудов, N 20, ред. А.П.Михайлов, М: ИПМ им. М.В.Келдыша, 2018, с.280
8. *Шведовский В.А.* Фильтрующая роль культурных кодов в выборе вектора преобразований социума России, Представительная власть – XXI век, № 155(4), с.21–29, 2017

РЕШЕНИЕ

XVIII ВСЕРОССИЙСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ-ШКОЛЫ МОЛОДЫХ
ИССЛЕДОВАТЕЛЕЙ
"СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО
МОДЕЛИРОВАНИЯ"

С 16 по 21 сентября 2019 состоялась XVIII Всероссийская конференция-школа молодых исследователей "СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ".

В работе Конференции-школы приняли участие 46 ученых из 10 городов России, представлявшие 17 научных центра. Из них 16 докторов наук, 14 кандидатов наук, 1 аспирант и 2 студента. Было прочитано 17 лекций ведущими российскими учеными в области математического моделирования, сделаны 18 докладов исследователями различных научных центров, из которых 6 докладов были сделаны молодыми учеными.

Подводя итоги проведенной Конференции-школы, участники отмечают

- высокий научный уровень большинства представленных докладов, разнообразие тематик и новые оригинальные подходы к решению задач математического моделирования;
- высокий интерес к участию в работе Конференции-школы молодых ученых;
- высокую активность молодых ученых, студентов, аспирантов и высокое качество сделанных ими докладов

и постановляют

- выразить благодарность профессорам Василевскому Ю.В. и Гордину В.А. за привлечение к работе школы большого количества молодых ученых из возглавляемых ими научных коллективов;
- выразить благодарность Оргкомитету за проведенную им работу по организации конференции-школы;
- выразить благодарность администрации и сотрудникам пансионата "Моряк" за помощь в проведении Конференции-школы;
- опубликовать Труды Конференции-школы;
- выставить презентации лекций на сайте Конференции-школы;
- наметить проведение XIX Всероссийской конференции-школы "СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ" на 2021 год.

Научное издание

**СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ**

Сборник трудов

**XVIII ВСЕРОССИЙСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ-ШКОЛЫ
МОЛОДЫХ ИССЛЕДОВАТЕЛЕЙ**

пос. Абрау-Дюрсо, 16–21 сентября 2019 г.

Подписано в печать 24.12.2019 г.

Бумага офсетная. Формат 60×84 ¹/₁₆. Усл. печ. лист. 9,07.

Уч. изд. л. 6,6. Заказ № 7435. Тираж 100 экз.

Отпечатано в отделе полиграфической, корпоративной и сувенирной продукции
Издательско-полиграфического комплекса КИБИ МЕДИА ЦЕНТРА ЮФУ.
344090, г. Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 200/1, тел (863) 243-41-66.